

Elementi di Elettrodinamica Classica

Filippo Esposito

*In memoria di Francesco
che non ha avuto fortuna*



Invito

Il lettore che desidera chiarimenti su passi oscuri, o indicazioni bibliografiche per ulteriori letture, o ancora ritiene di aver individuato degli errori, può scrivere all'indirizzo

`files@na.infn.it`

per porre le sue domande. Grazie a questo feedback spero di emendare e migliorare il testo. Modifiche e aggiunte verranno rapidamente riportate nel file che viene distribuito.

La presente versione è aggiornata a gennaio 2011.

Presentazione

Questo libro è stato scritto per gli allievi del corso di Fisica Generale che ho tenuto per molti anni presso l'Università "Federico II" di Napoli. Il livello dell'esposizione è quindi quello di un primo triennio universitario per il quale esiste un'ampia letteratura; tuttavia alcune scelte didattiche sono assai diverse da quelle della maggior parte dei testi attualmente in circolazione. Elenco qui le più importanti:

1. Una delle condizioni essenziali per fare scienza è l'uso di un linguaggio quanto più possibile preciso e non ambiguo, nelle definizioni e negli enunciati; ciò comporta l'adozione di costrutti matematici che, specialmente per la trattazione dei fenomeni elettromagnetici, risultano spesso ignoti allo studente (anche gli insegnamenti di matematica hanno i loro problemi con l'ordinamento triennale!). Piuttosto che ricorrere a enunciati fumosi, ho preferito introdurre esplicitamente le necessarie nozioni matematiche (anche non del tutto elementari) ogni qualvolta un'idea fisica importante lo richiedeva. Un esempio: il campo elettrico e il campo magnetico non sono due entità indipendenti ma costituiscono – per così dire, in termini vaghi –, le 'componenti' di un'unica grandezza fisica; questa idea può essere resa precisa introducendo la nozione di *tensore*, concetto geometrico essenziale non solo nell'ambito dell'elettromagnetismo ma in tutta la Fisica. Perciò ho ritenuto opportuno inserire un breve paragrafo che introduce questo costrutto.

Dove possibile, fornisco la prova degli enunciati matematici; ovviamente, non si tratta di vere e proprie 'dimostrazioni' soddisfacenti gli standard usuali del 'rigore' matematico; il mio intento non è quello di presentare argomentazioni formalmente impeccabili, ma piuttosto di portare alla luce il motivo sostanziale per cui vale un determinato teorema.

2. Un secondo elemento peculiare di questa esposizione, è l'adozione del SISTEMA GAUSSIANO di unità di misura, che è largamente usato nell'ambito della letteratura scientifica in fisica. Nelle applicazioni pratiche, e nella quasi totalità dei manuali universitari, viene invece adottato il SISTEMA INTERNAZIONALE (SI) che è stato ratificato appunto da una conferenza internazionale. La scelta del sistema di unità è una convenzione arbitraria, in linea di principio non condizionata da considerazioni fisiche stringenti; tuttavia, esistono validi motivi pedagogici che rendono di gran lunga preferibile l'adozione del sistema gaussiano nel momento in cui si formano i concetti. Questi motivi sono abbondantemente illustrati nel testo; qui voglio segnalarne uno particolarmente importante: nel sistema gaussiano il campo elettrico e il campo magnetico sono due grandezze omogenee, come è giusto che sia in vista della 'unità dei campi' citata sopra; ciò non avviene nel SI, con la conseguenza che riesce più difficile instillare il concetto che i due campi sono 'componenti' dello stesso ente fisico.

Comunque, nel testo sono riportate anche le formule in versione SI quando sono diverse dalle espressioni gaussiane, e i fattori di conversione per tutte le grandezze di uso pratico.

3. Infine, la scelta più caratterizzante: le leggi dell'elettrodinamica classica vengono inquadrare *ab initio* nella cornice del Principio di Relatività di Einstein.

Storicamente l'indagine sperimentale e l'elaborazione teorica, coronate dalla sintesi completa di Maxwell hanno preceduto la Relatività, per cui è possibile svolgere un corso sull'elettromagnetismo prescindendo totalmente da essa; a mia conoscenza, questa è la prassi usuale nelle nostre università. Nei manuali più popolari, la Relatività viene esposta di regola nei capitoli finali, insieme a: fisica dello stato solido, fisica nucleare e subnucleare, astrofisica, e chi più ne ha più ne metta; ovviamente, l'idea è che tutti questi argomenti non entreranno a far parte del programma di esame.

Due considerazioni, una pedagogica e l'altra culturale hanno consigliato l'approccio seguito in questo testo. In primo luogo, la teoria dei fenomeni elettromagnetici è *'intrinsecamente'* relativistica, per cui nelle esposizioni tradizionali non si può evitare di lasciare in ombra questioni importanti come l'incompatibilità della legge di forza di Lorentz con i principi della meccanica classica, oppure le leggi di trasformazione del campo elettromagnetico. Una trattazione basata sul Principio di Relatività risulta invece 'trasparente' e di conseguenza più lineare. In secondo luogo, il Principio di Relatività costituisce per la fisica contemporanea il fondamento su cui basare i tentativi di interpretare il mondo sensibile; che uno studente di discipline scientifiche possa concludere il proprio corso di studi conservando le concezioni settecentesche di spazio e tempo, mi sembra francamente inammissibile.

Per concludere, devo dichiarare il mio debito nei confronti dello splendido testo di Edward M. Purcell “ELECTRICITY AND MAGNETISM” Berkeley Physics Course, Vol. 2, McGraw-Hill, dal quale ho imparato tanto da giovane e che ha costituito il modello che ho cercato di emulare. Comunque, tutti gli errori, le imprecisioni, le oscurità di questo libro sono di mia esclusiva responsabilità.

Que otros se jacten de las páginas que han escrito;
a mí me enorgullecen las que he leído.
JORGE LUIS BORGES, *Elogio de la sombra*.

Indice

1	Carica elettrica e Campo Elettrico	1
1.1	La legge di Coulomb	1
1.2	Struttura elettrica della materia	4
1.3	Principio di sovrapposizione	7
1.3.1	Campo elettrico	8
1.3.2	Linee di flusso	10
1.4	Distribuzioni continue di carica	13
1.5	Legge di Gauss	20
1.5.1	Angoli solidi	20
1.5.2	Legge di Gauss	25
1.5.3	Legge di Gauss e linee di flusso	26
1.5.4	Distribuzioni a simmetria sferica	27
1.6	Forme locali della legge di Gauss	31
1.6.1	Il teorema della divergenza	35
1.6.2	Forma locale per cariche di superficie	35
2	Potenziale	39
2.1	Campi conservativi	39
2.1.1	Campi centrali	41
2.1.2	Legge di circuitazione e linee di flusso	43
2.2	La funzione potenziale	44
2.3	L'operatore Gradiente	50
2.4	Il problema generale dell'elettrostatica	52
2.4.1	Prova dell'unicità della soluzione per il problema di Dirichlet	56
2.5	Energia di un sistema di cariche	58
2.6	Energia del campo elettrostatico	61
3	Campo Elettrico nella Materia	65
3.1	Il Campo medio	65
3.2	Elettrostatica dei conduttori	67
3.2.1	Il problema esterno per un solo conduttore	69
3.2.2	Schermo elettrostatico	75
3.2.3	Condensatori	77
3.2.4	Considerazioni energetiche	81
3.2.5	Stabilità dell'equilibrio elettrostatico dei conduttori	84
3.3	Dielettrici	85

3.3.1	Approssimazione di dipolo	88
3.3.2	Campo di dipolo	93
3.3.3	Azioni meccaniche sulle distribuzioni di carica . . .	94
3.3.4	Polarizzazione per orientamento	98
3.3.5	Il vettore densità di polarizzazione	101
3.4	Elettrostatica dei dielettrici	105
4	Il Principio di Relatività	111
4.1	Relatività di Galilei	111
4.2	La meccanica di Newton	115
4.3	Relatività di Einstein	117
4.4	Invarianza della Carica	123
4.5	La trasformazione di Lorentz	126
4.6	Campo elettrico di cariche in moto	132
4.7	Lo spazio-tempo	137
4.8	Cinematica relativistica	141
4.9	Dinamica relativistica	147
4.9.1	Moto di una carica in campo elettrostatico	152
5	Correnti elettriche	155
5.1	Densità di corrente	155
5.2	La conservazione della carica	162
5.3	Processi stazionari	164
5.4	Correnti nella materia	167
5.4.1	Modello di Drude	170
5.4.2	Effetto Joule	173
5.5	Resistori	175
5.6	Generatori di corrente	180
6	Interazione magnetica	187
6.1	Il Campo Magnetico	188
6.1.1	Magnetismo e Relatività	190
6.1.2	Il vettore Campo Magnetico	193
6.1.3	Tensori	196
6.2	Forze sulle correnti	198
6.3	Il Campo di Biot-Savart	202
6.4	Leggi generali del campo magnetico statico	207
6.4.1	Distribuzioni a simmetria cilindrica	210
6.5	Forme locali delle leggi della magnetostatica	211
6.5.1	Correnti di superficie	211
6.5.2	Correnti di volume.	214
6.6	La prima formula di Laplace	220
7	Campo magnetico nella materia	229
7.1	Il momento magnetico	229
7.2	Momenti magnetici atomici	236
7.3	Campi macroscopici	239
7.4	Proprietà magnetiche dei materiali	244

7.4.1	Diamagnetismo	245
7.4.2	Paramagnetismo	247
7.4.3	Ferromagnetismo	249
8	Moto di cariche in campo elettromagnetico	253
8.1	Moto di cariche in campo magnetico	253
8.1.1	Campo lentamente variabile con la posizione	257
8.2	Moto in campo elettrico e magnetico	260
9	Il campo elettromagnetico	265
9.1	Il tensore elettromagnetico e le leggi di trasformazione dei campi	265
9.2	Induzione elettromagnetica	271
9.2.1	Corrente indotta in un circuito in moto	271
9.2.2	Induzione su un circuito in quiete	277
9.3	La corrente di spostamento di Maxwell	280
9.4	Equazioni di Maxwell e Onde Elettromagnetiche	282
9.5	Processi quasi-stazionari	287
9.5.1	Coefficienti di mutua e autoinduzione	288
9.5.2	Circuiti elettrici a parametri concentrati	291
9.6	Energia del campo elettromagnetico	297
10	Onde elettromagnetiche e Ottica	301
10.1	Generazione delle onde elettromagnetiche	301
10.2	Radiazione di dipolo	305
10.3	Onde monocromatiche nel vuoto	309
10.4	Energia delle Onde Elettromagnetiche	313
10.5	Propagazione nei mezzi materiali	319
10.5.1	Riflessione e rifrazione	322
10.6	Dispersione	328
10.6.1	Pacchetti d'onda	333
10.7	Coerenza e Interferenza	338
10.8	Diffrazione	346
10.8.1	Diffrazione da una fenditura	349
10.8.2	Reticoli	353
10.9	Diffusione della luce	358
10.10	Ottica Geometrica	364
10.10.1	Specchi	370
10.10.2	Sistemi diottrici	373

Capitolo 1

Carica elettrica e Campo Elettrico

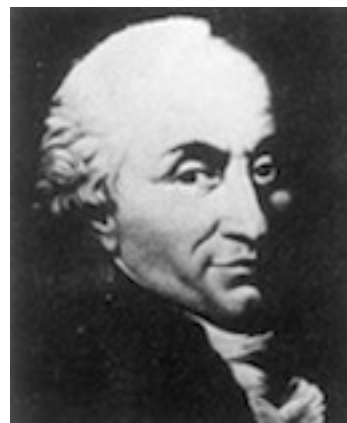
Strofinando energicamente una bacchetta di vetro e una di resina e separandole si osserva una forza di attrazione che viene chiamata elettrica. Forze di questo tipo si manifestano tra corpi della più varia natura opportunamente trattati. In tutti i casi i corpi che, strofinati, attraggono il vetro respingono la resina e viceversa. La descrizione di queste forze può essere data in termini di un parametro di ‘carica elettrica’ che può essere di tipo ‘vetroso’ o ‘resinoso’: i corpi aventi carica vetrosa (resinosa) si respingono tra loro e attraggono quelli con carica resinosa (vetrosa). Il motivo per cui attualmente viene usata la classificazione meno suggestiva di cariche positive¹ (le vetrose) e negative (le resinose) è che la carica risulta essere un parametro additivo: rimettendo insieme la bacchetta di vetro e quella di resina che erano state strofinate insieme la ‘virtù elettrica’ scompare. Più in generale, l’insieme delle esperienze elementari di elettrizzazione porta ad assumere che la carica di un corpo è la somma algebrica delle cariche delle sue parti.

1.1 La legge di Coulomb

La forza elettrica tra due corpi *puntiformi*, cioè separati da una distanza r molto più grande delle dimensioni dei corpi stessi, e dotati di cariche q_1 e q_2 è data da

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Questa legge venne formulata da Charles Augustin de Coulomb nel 1788 in base a un’indagine sperimentale, ma certamente anche per la suggestione della legge di gravitazione di Newton. La formula scritta sopra esprime la proporzionalità della forza alla carica di ciascuno dei corpi. La costante di proporzionalità k rimane indefinita finché non viene scelta una unità di misura per la carica. In più, sperimentalmente si osserva che la forza tra corpi carichi, e di conseguenza k , è influenzata dal mezzo



CHARLES AUGUSTIN DE
COULOMB
1736 – 1806

¹Questa convenzione fu introdotta da Benjamin Franklin

in cui essi sono immersi; in tutto questo capitolo e nel successivo resta inteso che il mezzo sia sempre il vuoto. Per determinare il valore di k nel vuoto si può scegliere un'unità di misura per la carica e misurare la forza che si esercita tra due cariche note poste a una distanza nota. In effetti si può anche procedere all'inverso: si *sceglie* un valore per k e dalla misura della forza si ricava il valore delle cariche elettriche. Storicamente, entrambi i metodi sono stati adottati, portando alla introduzione di diversi sistemi di unità di misura per le grandezze elettriche. Attualmente soltanto due di questi sopravvivono: il sistema gaussiano, preferito dai fisici, e il sistema internazionale (SI), preferito dagli ingegneri. Questi due sistemi differiscono in primo luogo per le unità meccaniche che sono c.g.s. (centimetro, grammo, secondo) per il gaussiano, e M.K.S. (metro, chilogrammo, secondo) per l'SI. La conversione da un sistema all'altro di grandezze meccaniche implica fattori che sono potenze di dieci e non presenta alcuna difficoltà. Comunque il lettore che ha familiarità soltanto con l'M.K.S. è invitato a svolgere il semplice esercizio riportato in margine. Nel sistema gaussiano, adottato in questa esposizione, si *assume* $k = 1$ e pertanto la carica unitaria è definita come quella che esercita una forza di una dyne su una carica eguale posta a distanza di un centimetro. Tale unità prende il nome di '*franklin*' o '*statcoulomb*'.

Esercizio - L'unità c.g.s. di forza si chiama 'dyne', e quella di energia 'erg'; dimostrare che

$$\begin{aligned} 1 \text{ Newton} &= 10^5 \text{ dyne}, \\ 1 \text{ Joule} &= 10^7 \text{ erg}. \end{aligned}$$

Dimostrare inoltre che l'unità di pressione c.g.s. è un decimo di quella M.K.S.

Nel SI viene scelta invece (con un procedimento che verrà spiegato nel Capitolo 6) l'unità di carica, che prende il nome di '*Coulomb*', abbreviato con C , e il valore di k si determina sperimentalmente. Si trova:

$$k \simeq 8.9874 \times 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}. \quad (1.1)$$

Pertanto una carica di un Coulomb esercita su una carica uguale a distanza di un metro una forza di $8.9874 \times 10^9 \text{ N}$. Nel SI la costante della legge di Coulomb viene espressa per mezzo della 'permettività elettrica del vuoto'[†] ε_0 , definita dalla formula:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iff \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} \simeq 8.854 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}.$$

[†] A dispetto del nome suggestivo, la costante ε_0 , al pari di k , non ha alcun significato fisico, ma è soltanto l'espressione di una convenzione.

Esercizio - Trovare il fattore di conversione da Coulomb a statcoulomb. Calcolare il valore della permettività elettrica del vuoto.

Vedremo più avanti che l'evidenziare il fattore 4π nella legge di Coulomb comporta la semplificazione di un analogo fattore nella legge di Gauss. Il SI è indispensabile per le applicazioni pratiche in quanto esso è stato adottato come standard per convenzione internazionale; ciò implica che tutti gli apparati e gli strumenti di misura forniscono l'indicazione delle grandezze elettriche in questo sistema. Il fatto che il SI sia l'unico sistema di unità ammesso dagli ingegneri ha portato come conseguenza che da molti anni la quasi totalità dei testi di Fisica Generale, per ovvi motivi commerciali, lo adottò. Perché, allora, insistere con il sistema gaussiano? Il motivo essenziale potrà essere spiegato solo nel Capitolo 6. Intanto, si può rilevare che nel SI tutte le formule sono infestate dalla fastidiosa e insignificante costante ε_0 che ne rende meno agevole la lettura; ma la differenza più importante tra i due sistemi (ed il peggiore difetto del SI dal punto di vista fisico) è la seguente: nel gaussiano la costante k

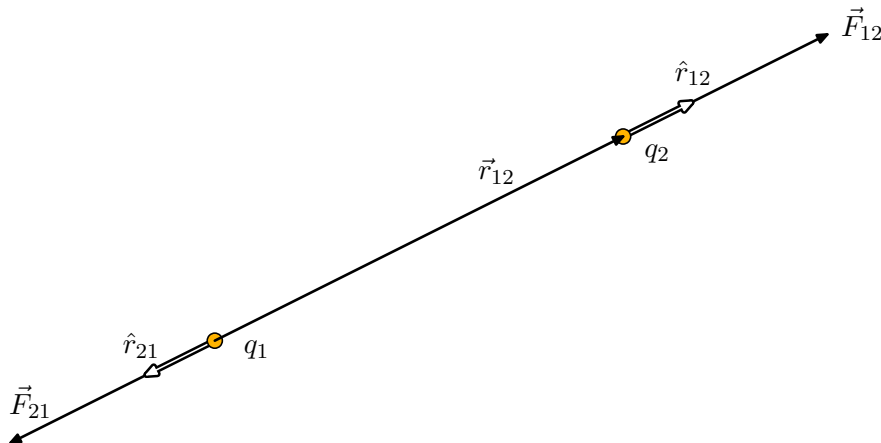
viene assunta per definizione *adimensionale*; non si introduce, quindi, una nuova grandezza fondamentale ma si esprime anche la carica in termini delle grandezze meccaniche lunghezza massa e tempo. Dalla legge di Coulomb risulta allora che le dimensioni gaussiane della carica sono:

$$[\text{carica}] = [\text{massa}]^{1/2}[\text{lunghezza}]^{3/2}[\text{tempo}]^{-1}.$$

Nel SI, invece, si introduce una nuova grandezza fondamentale indipendente da quelle meccaniche², e quindi k ha le dimensioni indicate nella (1.1).

Data l'importanza nelle applicazioni del SI, per tutte le grandezze di rilevanza pratica verranno discusse le unità e le dimensioni in entrambi i sistemi con i relativi fattori di conversione. Tutto lo sviluppo dei concetti fisici verrà invece trattato esclusivamente nel sistema gaussiano.

Veniamo ora alle altre caratteristiche della legge di Coulomb; in primo luogo la direzione della forza mutua tra due punti carichi è quella della congiungente i punti stessi; in secondo luogo la forza soddisfa il principio di azione e reazione: la forza che la carica q_1 esercita sulla carica q_2 è opposta a quella che q_2 esercita su q_1 . Tutto ciò è illustrato nella figura sotto, dove i corpi carichi sono rappresentati dai pallini gialli.



Queste leggi empiriche sono riassunte nella formula:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}, \quad (1.2)$$

con ovvio significato dei simboli. Notiamo in particolare che \hat{r}_{12} è il versore orientato dalla carica q_1 a q_2 e quindi le forze sono repulsive o attrattive secondo che le cariche abbiano segni eguali oppure opposti. La figura sopra mostra un esempio di cariche dello stesso segno.

Esercizio - Due piccole sferette metalliche di massa m pendono da fili di seta di lunghezza l e sono in contatto tra loro. Mettendo le sferette in contatto con una macchina elettrostatica esse acquisiscono la stessa carica q e si separano di una distanza r . Trovare la formula che esprime q in termini di m , l e r . Calcolare q in statcoulomb per $m = 10$ g, $l = 50$ cm e $r = 20$ cm.

²Questa grandezza è in realtà l'Ampère, unità di misura della corrente elettrica; il Coulomb è definito come la carica che, in un secondo, attraversa una sezione di un filo in cui circola la corrente di un Ampère (vedi Cap. 6).



HENRY CAVENDISH
1731 – 1810

Limiti di validità della legge di Coulomb - Nel caso di corpi che hanno dimensioni non trascurabili, la forza non dipende dalla distanza secondo la legge semplice $1/r^2$ (anzi per corpi non puntiformi la distanza r non è definita). Tuttavia vedremo che in questo caso la forza può essere calcolata sommando le forze agenti tra parti dei corpi abbastanza piccole da poter essere approssimate a punti ed applicando a queste parti la legge di Coulomb. Quindi non si può parlare, in senso stretto, di un limite di validità sotto questo profilo.

Un ruolo essenziale giocherà nel seguito l'esponente di r a denominatore della (1.2). In linea di principio, dato che esso viene determinato sperimentalmente, non è possibile conoscerne il valore *esatto*, e tuttavia l'intera teoria dell'elettromagnetismo si basa pesantemente sull'assunzione che esso sia *esattamente* 2: se questo esponente avesse un valore, sia pur lievemente diverso, tutta la nostra descrizione dei fenomeni elettromagnetici dovrebbe essere radicalmente cambiata. Gli esperimenti di Coulomb fornivano una precisione per questo esponente che può essere stimata intorno al 3% , ma, prima ancora di Coulomb, Henry Cavendish lo aveva determinato con una incertezza inferiore al 2% . Il metodo di Cavendish, che verrà discusso nel terzo capitolo, è stato adoperato anche in esperimenti moderni che hanno permesso di abbassare il limite dell'errore a una parte su 10^{16} per valori di r dell'ordine di alcune decine di centimetri. Questo è un altro aspetto che va considerato; si conoscono infatti esempi di forze non elettromagnetiche (all'interno dei nuclei atomici) che per valori di r abbastanza piccoli seguono con buona approssimazione una legge di variazione con la distanza di tipo coulombiano ma che per r 'grande' ($\sim 10^{-13}$ cm) decrescono molto più rapidamente di $1/r^2$. Orbene, tutta l'evidenza sperimentale conferma, per la forza di Coulomb, la dipendenza da $1/r^2$ con grandissima precisione sia su scala microscopica che su scala cosmica.

Un limite di validità si ha invece per quello che riguarda la velocità dei corpi carichi: *la legge di Coulomb è valida solo per cariche in quiete*. In altre parole la (1.2) può essere applicata, in linea di principio, solo in un sistema di riferimento inerziale in cui ambedue i corpi carichi hanno velocità nulla. Tuttavia, se le velocità dei corpi sono piccole rispetto alla velocità c della luce la (1.2) costituisce una buona approssimazione. Questo punto verrà discusso in dettaglio nel Capitolo 4; in questo capitolo e nei due successivi ci occuperemo esclusivamente di *elettrostatica* e cioè dei fenomeni relativi all'interazione tra cariche in quiete e perciò assumeremo valida la legge di Coulomb.

1.2 Struttura elettrica della materia

La carica elettrica è presente in tutti i corpi materiali; esperimenti come quelli citati in precedenza non creano le cariche ma ne mettono in evidenza l'esistenza. L'enorme accumulo di conoscenze sulla costituzione microscopica della materia conseguito nell'ultimo secolo, e le innumerevoli applicazioni tecnologiche che ne sono scaturite, hanno reso nozione

comune il fatto che la materia è fatta di atomi e che gli atomi sono a loro volta aggregazioni, più o meno stabili, di *elettroni, protoni e neutroni*; la ricerca in questo settore ha portato alla catalogazione di un gran numero di ‘particelle elementari’ ma in questo contesto è sufficiente fare esplicita menzione soltanto di queste tre che costituiscono i mattoni della materia ‘normale’. Per una discussione dell’elettrodinamica classica possiamo immaginare le particelle elementari come dei punti materiali caratterizzati, tra le altre proprietà fisiche, da una ben determinata massa e una ben determinata *carica*; ciò vuol dire che la massa e la carica sono *caratteristiche intrinseche* delle particelle elementari. In altre parole tutti gli elettroni hanno la stessa massa e la stessa carica e così come un elettrone non può essere privato della massa non può essere spogliato della sua carica. Lo stesso vale per tutte le altre particelle elementari.

Con la convenzione adottata per i segni delle cariche, la carica dell’elettrone risulta negativa e quella del protone positiva; i neutroni hanno invece carica nulla. Dato che la carica elettrica di un pezzo di materia qualsiasi è la somma delle cariche delle singole particelle elementari che lo costituiscono, possiamo interpretare l’elettrizzazione per strofinio citata all’inizio del capitolo come un passaggio di elettroni dal vetro alla resina. Il vetro si carica positivamente perché perde elettroni e la resina si carica negativamente perché li acquista.

Quantizzazione della carica - La misura della carica dei costituenti elementari della materia ha dato un risultato estremamente semplice:

Le particelle elementari hanno cariche che sono un multiplo intero (positivo o negativo) di una *carica elementare*:

$$e \approx 1.6022 \times 10^{-19} \text{ C} \approx 4.8032 \times 10^{-10} \text{ statcoulomb}.$$

In particolare l’elettrone ha carica $-e$ e il protone carica $+e$. La quantizzazione della carica dà ragione del fatto che i corpi materiali non presentano di solito una carica elettrica; infatti gli atomi contengono numeri eguali di elettroni e protoni. L’argomento si può anche invertire: la neutralità elettrica della materia fornisce evidenza per la quantizzazione della carica. Infatti, anche una minuscola differenza tra le cariche dell’elettrone e del protone si manifesterebbe attraverso imponenti forze coulombiane tra i corpi macroscopici.* La carica elementare è abbastanza grande da far sì che, su scala atomica e molecolare l’interazione elettrica sia dominante. A titolo di esempio confrontiamo la forza coulombiana F_e tra un protone e un elettrone con la forza gravitazionale F_g tra le stesse particelle; indicando con G la costante di gravitazione e con m_e , m_p le masse si ha

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{e^2/r^2}{Gm_em_p/r^2} \approx \frac{(4.8 \times 10^{-10})^2}{6.7 \times 10^{-8} \cdot 9.1 \times 10^{-28} \cdot 1.7 \times 10^{-24}} \approx 2 \times 10^{39}.$$

Si noti che il rapporto non dipende dalla distanza r tra le particelle. Il fattore 10^{39} è così grande da rendere del tutto irrilevante il ruolo della

***Esercizio** Dimostrare che se la carica del protone differisse, in valore assoluto, da quella dell’elettrone per una parte su 10^9 , tra gli oggetti che maneggiamo nella nostra vita quotidiana si eserciterebbero forze (repulsive) dell’ordine di $10^7 - 10^9$ volte più grandi della forza peso.

forza di gravitazione sulla scala atomica e molecolare. Di conseguenza, tutte le proprietà meccaniche, chimiche, termodinamiche, della materia sono determinate esclusivamente dall'interazione elettrica.

Al tempo stesso, la carica elementare è abbastanza piccola da consentire di trattare la carica dei corpi macroscopici come una variabile continua. Qui il parametro che entra in gioco è il numero di Avogadro: in un esperimento come quello del vetro strofinato con la resina anche se il vetro cede una frazione di $1/10^{12}$ dei suoi elettroni acquisisce una carica che è 10^{11} volte la carica elementare. E infatti la natura discreta della carica elettrica è stata messa in evidenza nei primi anni del secolo scorso da Robert Millikan,³ più di cinquanta anni dopo la formulazione completa delle leggi dell'elettrodinamica classica.

Conservazione della carica - Nei processi nucleari le particelle elementari possono essere create o annientate e con esse la carica che loro appartiene. Tuttavia la creazione o distruzione di una particella carica si accompagna *sempre* alla creazione o distruzione di altre particelle cariche in modo che

la somma algebrica delle cariche elettriche delle particelle create è uguale alla somma algebrica delle cariche delle particelle annientate.

Uno degli esempi più semplici è il decadimento del neutrone; quando non è legato in un nucleo atomico il neutrone non è stabile ma decade spontaneamente in un protone, un elettrone e un antineutrino:

$$\mathbf{n} \Longrightarrow \mathbf{p}^+ + \mathbf{e}^- + \bar{\nu}.$$

Mentre la massa del neutrone è maggiore della somma delle masse delle tre particelle generate nella reazione, la carica è uguale alla somma delle cariche. Al contrario di ciò che avviene per la massa, la conservazione della carica è verificata su tutte le scale di energia alle quali la ricerca sperimentale ha avuto fin'ora accesso; essa sembra essere una delle leggi costitutive del mondo. Ovviamente la conservazione della carica vale a maggior ragione in tutti i processi a energia più bassa, come quelli chimici ad esempio, in cui le particelle elementari non vengono create o distrutte.

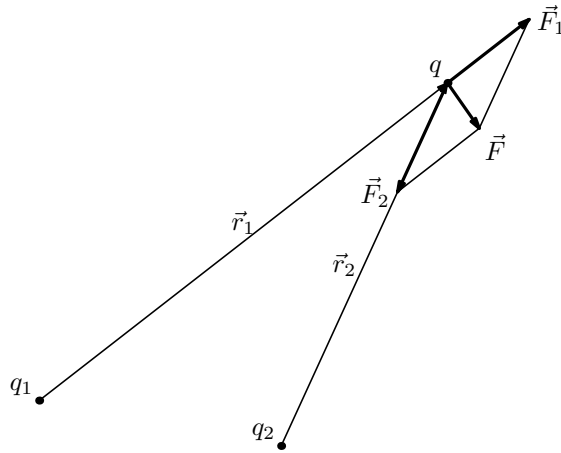
La legge di conservazione della carica può essere formulata in un modo per così dire 'geometrico': consideriamo una regione qualsiasi \mathcal{V} dello spazio delimitata da una frontiera (superficie) \mathcal{S} : la carica totale contenuta in \mathcal{V} può cambiare soltanto se attraverso \mathcal{S} delle cariche entrano o escono. Più precisamente l'incremento (decremento) della carica contenuta nella regione \mathcal{V} è pari alla quantità di carica immigrata (emigrata) attraverso \mathcal{S} . In particolare, una regione 'elettricamente isolata', delimitata cioè da una frontiera impervia alle cariche elettriche ha una carica totale (somma algebrica delle cariche positive e negative) fissata, anche se la somma delle sole cariche positive (o negative) può cambiare.

³Per una descrizione di questo classico esperimento vedi per es. Lovitch, Rosati; Fisica Generale vol. II - Ed. Ambrosiana.

1.3 Principio di sovrapposizione Campo Elettrico

Supponiamo di avere tre corpi puntiformi con cariche q , q_1 , q_2 e interessiamoci alla forza \vec{F} che agisce su q . Indicando con \vec{F}_1 e \vec{F}_2 le forze coulombiane che q_1 e q_2 esercitano su q si verifica, sperimentalmente, che

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$



Si osservi che la direzione di \vec{F} è del tutto diversa da quella di \vec{r}_1 e \vec{r}_2 . Le cariche q_1 e q_2 in figura hanno segno opposto; il lettore è invitato a fare uno schizzo per il caso di cariche con lo stesso segno.

Figura 1.1: Illustrazione del principio di sovrapposizione

Conviene sottolineare il fatto che questa è una legge empirica, del tutto indipendente dalla legge di Coulomb, che si può enunciare asserendo che la forza che una carica (puntiforme) esercita sulla carica q non è influenzata dalla presenza di altre cariche. Ovviamente la proprietà si estende a un numero arbitrario di cariche:

La forza che un insieme qualsiasi di cariche puntiformi esercita su una carica q è la somma delle forze (coulombiane) che ciascuna carica esercita da sola.

Questa legge prende il nome di **Principio di Sovrapposizione**. Per un sistema di N cariche, con ovvio significato dei simboli si scrive

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i q}{r_i^2} \hat{r}_i, \quad (1.3)$$

La validità del principio di sovrapposizione, nell'ambito della elettrodinamica classica⁴, è stata stabilita sperimentalmente con estrema precisione, sia su scala macroscopica che microscopica. Questa legge non è meno importante della legge di Coulomb ed anzi si può anticipare fin d'ora che essa, al contrario della legge di Coulomb, vale anche per cariche in moto con velocità arbitraria.

Esercizio - a) Una carica Q è posta al centro di un segmento ai cui estremi si trovano due cariche eguali a q . Trovare per quale valore del rapporto Q/q il sistema è in equilibrio. b) Stesso problema in due dimensioni con Q al centro di un triangolo equilatero con tre cariche q ai vertici.

⁴Qui l'aggettivo *classico* è usato nel senso di *non quantistico*.

1.3.1 Campo elettrico

Nella (1.3) il fattore q non dipende dall'indice i e può essere messo in evidenza:

$$\vec{F} = q \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i = q \vec{E}(\vec{r}), \quad (1.4)$$

ponendo per definizione

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i. \quad (1.5)$$

Il vettore \vec{E} prende il nome di *campo elettrico*. Il termine ‘campo’ sta

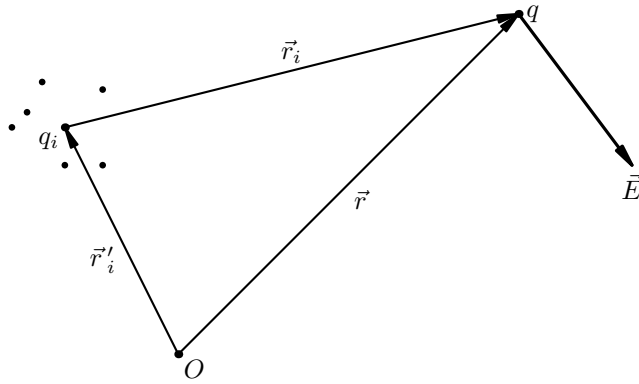


Figura 1.2: Punti sorgente e punto campo

ad indicare che il vettore \vec{E} è funzione del punto: in ciascun punto dello spazio si avrà, in generale, un diverso valore di \vec{E} in quanto gli r_i e \hat{r}_i che compaiono nella (1.5) dipendono, oltre che dalle posizioni delle cariche q_i , dalla posizione in cui si trova la carica q . Ciò può essere reso evidente con l'uso di una notazione più esplicita; rispetto a un'origine O , scelta arbitrariamente, indichiamo con \vec{r}_i' il vettore che individua la posizione della carica q_i (punto sorgente) e con \vec{r} il vettore che individua la posizione di q (punto campo). Si ha allora (vedi figura)

$$r_i = |\vec{r} - \vec{r}_i'| \quad \text{e} \quad \hat{r}_i = \frac{\vec{r} - \vec{r}_i'}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|},$$

e la (1.5) si scrive

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i'). \quad (1.6)$$

Questa notazione piuttosto pesante verrà usata solo nei casi in cui è indispensabile distinguere esplicitamente la variabile che ‘corre’ sui punti sorgente da quella che individua il punto campo. Poiché nella discussione che segue ci interesseremo soprattutto di proprietà del campo elettrico che riguardano la dipendenza di \vec{E} dal punto campo potremo quasi sempre utilizzare la notazione più leggera (1.5).

La nozione di campo elettrico è il concetto essenziale per eliminare l'idea di azione a distanza dalla descrizione delle interazioni tra cariche elettriche. Infatti tutta la discussione precedente può essere riformulata nel modo seguente. Si *definisce* il vettore campo elettrico in un punto dello spazio come il fattore di proporzionalità tra la carica q posta *in quiete* in quel punto e la forza che si manifesta su di essa:

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q}. \quad (1.7)$$

In questo modo l'azione è *locale*: la forza che agisce su una carica è prodotta da una grandezza fisica, il campo elettrico, nel punto in cui la carica è collocata. La legge di Coulomb e il principio di sovrapposizione vengono quindi reinterpretate come le leggi che permettono di *esprimere*, mediante la (1.6), il campo generato da una assegnata distribuzione di cariche sorgenti *in quiete* (campo elettrostatico).

Dalla (1.7) si ha immediatamente che l'unità di misura del campo elettrico nel SI è Newton/Coulomb e nel sistema gaussiano è dyne/statcoulomb. Lascio come esercizio la verifica che l'unità gaussiana di campo elettrico è circa 3×10^4 volte più grande di quella SI.

Come esempio di applicazione della (1.5) calcoliamo il campo prodotto da una coppia di cariche $-q$ e $+q$ separate da una distanza $2a$. Nella figura 1.3 si è indicato con \hat{z} l'asse congiungente le due cariche e orientato nel verso che va dalla carica negativa a quella positiva e con \hat{r} un semiasse perpendicolare a \hat{z} con origine nel punto medio O del seg-

Nota: la carica 'di prova' q , esercita a sua volta, sulle cariche q_i , forze di reazione che possono modificare la posizione delle sorgenti: come spesso accade in Fisica, lo strumento misurante può alterare la grandezza misurata. Ovviamente, in un esperimento ben condotto, occorre tenere presente questo effetto, scegliendo q abbastanza piccola da produrre una perturbazione trascurabile del campo, e ove questo non sia possibile, di tenerne conto attraverso un'adeguata analisi, che sarà basata, *in ogni caso*, sulla definizione di campo elettrico data a lato. L'abitudine di molti autori di scrivere

$$\vec{E} \stackrel{??}{=} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q},$$

è condannabile per l'uso improprio del simbolo matematico di limite, fuorviante, perché *non è vero* che la perturbazione prodotta dalla carica di prova possa essere resa sempre trascurabile, e soprattutto, è sbagliata perché la definizione (1.7) si applica senza *nessuna* restrizione sulla carica q .

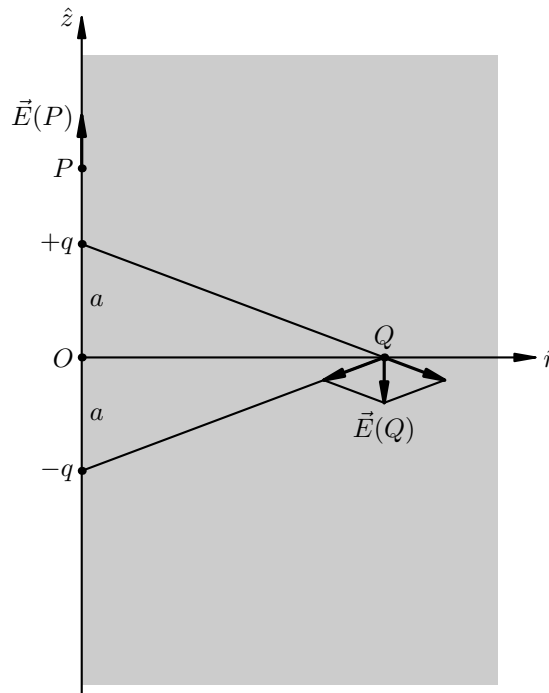


Figura 1.3: Campo di due cariche opposte

mento che unisce le cariche. È evidente che basta determinare \vec{E} nel semipiano meridiano, del quale si è evidenziata in figura una porzione rettangolare, avente come bordo \hat{z} e contenente \hat{r} , perchè la stessa configurazione di campo si replica identica in tutti i semipiani aventi come bordo \hat{z} . È altresì ovvio che il vettore \vec{E} in qualsiasi punto dello spazio giace nel semipiano passante per quel punto. Pertanto il vettore \vec{E} può essere caratterizzato mediante le componenti E_z e E_r lungo le direzioni orientate \hat{z} e \hat{r} . Sull'asse \hat{z} il campo ha la direzione di \hat{z} ($E_r = 0$). In un punto P al di sopra della carica $+q$ ($z > a$, vedi figura) si ha facilmente

$$E_z(z) = \frac{q}{(z-a)^2} - \frac{q}{(z+a)^2} = \frac{4aqz}{(z^2 - a^2)^2}.$$

Per $z < -a$ si ottiene la stessa formula con $-z$ al posto di z ; quindi il campo ha verso concorde con \hat{z} all'esterno del segmento $(-a, a)$. Riassumendo in un'unica formula:

$$E_z(z) = \frac{4aq |z|}{(z^2 - a^2)^2} \quad \text{per } |z| > a. \quad (1.8)$$

Nell'intervallo $(-a, a)$, il campo punta invece dalla parte opposta:

$$E_z(z) = -\frac{q}{(z-a)^2} - \frac{q}{(z+a)^2} = -\frac{2q(z^2 + a^2)}{(z^2 - a^2)^2} \quad \text{per } |z| < a.$$

Infine, per i punti dell'asse \hat{r} , mediante considerazioni geometriche elementari, si ottiene subito $E_r = 0$ e

$$E_z = 2\frac{q}{a^2 + r^2} \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right) = -\frac{2qa}{(a^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (1.9)$$

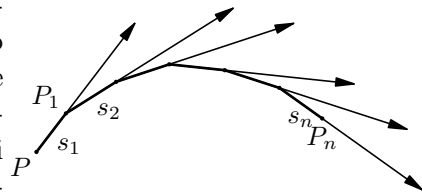
Esercizio - Discutere il caso di cariche dello stesso segno. In particolare, determinare in quale punto dell'asse \hat{r} il modulo del campo è massimo.

Per un punto generico saranno diverse da zero ambedue le componenti E_r e E_z . Ricavare le formule per il caso generale è un semplice esercizio di geometria che lascio al lettore; inoltre, sulla falsariga del calcolo eseguito sopra si può agevolmente svolgere l'esercizio proposto a margine.

1.3.2 Linee di flusso

Il modo più efficace di rappresentare un campo vettoriale è quello di disegnare le linee di flusso. Una linea di flusso è, per definizione, una curva che in ogni suo punto è tangente al campo in quel punto.

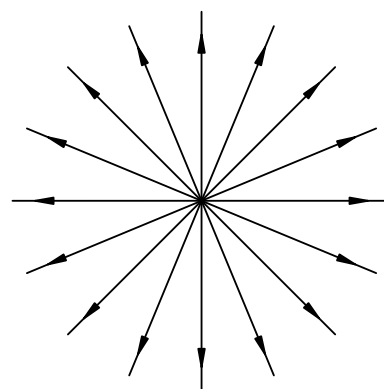
Nella figura a lato viene mostrato un procedimento attraverso il quale si può costruire una approssimazione alla linea di flusso passante per un punto P . Spostandosi di s_1 nella direzione e nel verso del campo in P si raggiunge il punto P_1 . Da questo punto si effettua uno spostamento s_2 nella direzione e nel verso del campo in P_1 raggiungendo un punto P_2 , e così via.



La spezzata $P P_1 \dots P_n$ costituisce una approssimazione alla linea di flusso desiderata, tanto migliore, quanto più sono piccoli i segmenti $s_1 s_2 \dots s_n$. Il termine ‘linea di flusso’ è mutuato dall'idrodinamica: nel caso in cui il campo vettoriale è quello della velocità euleriana di un fluido in moto stazionario le linee di flusso sono le traiettorie delle particelle di fluido. Ciò è evidente dal procedimento di costruzione accennato sopra. Nel caso del campo elettrico la parola flusso non deve, ovviamente, far pensare al movimento di qualcosa. Nella vecchia teoria dell'etere le linee di flusso potevano essere pensate come una descrizione dello stato di deformazione di questo ipotetico mezzo elastico che trasmetteva la forza tra le cariche. Nel quarto capitolo vedremo che l'etere non esiste e tuttavia è legittimo pensare alle linee di flusso come a una sorta di fili elastici tesi tra le cariche purché si tenga ben presente che si tratta di fili immateriali.

La determinazione analitica delle linee di flusso di un campo vettoriale costituisce in generale un problema assai complesso che ben di rado ammette una soluzione in forma chiusa. Quando non sarà agevole una determinazione esatta delle linee di flusso ci contenteremo di uno schizzo qualitativo che può essere ottenuto sulla base di alcune proprietà che dimostreremo in questo paragrafo e nei successivi. Osserviamo innanzitutto che una linea di flusso può essere tracciata in ogni punto nel quale il campo ha una direzione ben definita. La direzione di \vec{E} non è definita nei punti in cui il modulo è zero o infinito, oppure dove esistono discontinuità di prima specie; vedremo più avanti che tutte e tre queste eventualità si possono presentare.

Con l'eccezione di tali punti ‘*singolari*’, risulta allora ovvio che per ogni punto dello spazio passa una e una sola linea di flusso. Come esempio, si osservi la figura accanto dove sono tracciate alcune linee di flusso del campo generato da una sola carica puntiforme. Il fatto che queste linee sono semirette che partono dal punto in cui è situata la carica è un'immediata conseguenza della legge di Coulomb. Alle linee di flusso si assegna anche un verso che è quello del campo elettrico tangente. La figura corrisponde quindi a una carica positiva.



Per costruzione, il verso del campo tangente non cambia lungo la linea di flusso. Anticipando una proprietà che dimostreremo nel §2.7, che le linee di flusso del campo elettrostatico non possono essere chiuse, possiamo asserire che le linee di flusso di \vec{E} hanno sempre origine in un punto (eventualmente all'infinito) in cui il campo è singolare e terminano sempre in un altro punto singolare. Nella rappresentazione del campo coulombiano le linee partono dalla carica (campo infinito) e terminano all'infinito (campo nullo). Per una carica negativa il verso è opposto: le linee partono dall'infinito e terminano sulla carica. In generale, per il

campo di una collezione di cariche, vi saranno linee di flusso che partono dalle cariche positive e terminano sulle cariche negative o all'infinito, e linee che partono dall'infinito e terminano sulle cariche negative⁵. Due

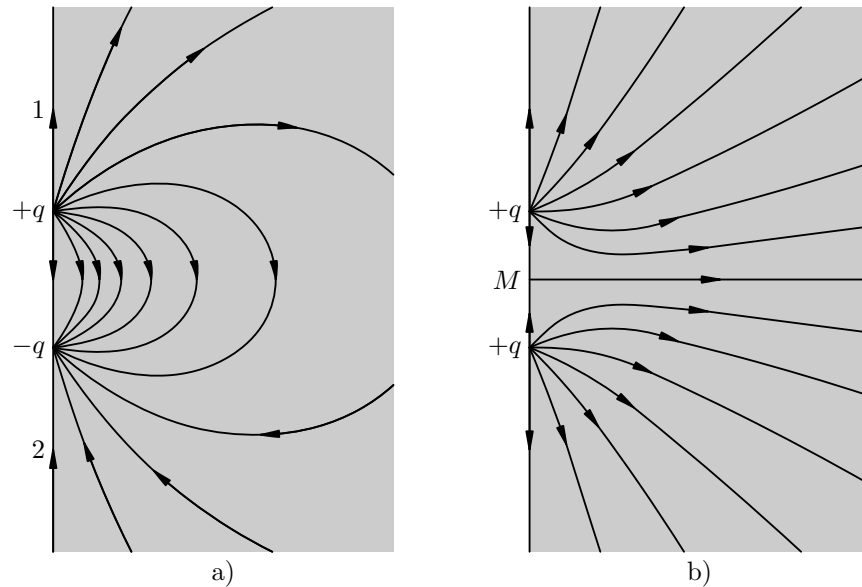


Figura 1.4: Linee di flusso: a) cariche opposte; b) cariche eguali

[†]In un semipiano meridiano, come quello della Figura 1.3.

esempi sono mostrati nella figura 1.4 dove sono rappresentati[†] i campi di due cariche opposte e di due cariche eguali. Si noti nella Figura 1.4 a) che tutte le linee che partono dalla carica positiva, eccetto la linea 1, terminano sulla carica negativa; similmente tutte le linee che terminano sulla carica negativa, eccetto la 2, provengono dalla carica positiva. Nella Figura 1.4 b) il campo è nullo nel punto medio M del segmento che congiunge le cariche. Vi sono due linee che partono dalle cariche e terminano in questo punto; da questo parte poi una linea (in effetti infinite linee, perché infiniti sono i semipiani meridiani) che va all'infinito come tutte le altre linee di flusso.

Il disegno delle linee di flusso non contiene informazioni sull'intensità E del campo elettrico: infatti, se tutte le cariche vengono moltiplicate per uno stesso fattore, diciamo k , per la (1.5) il campo viene moltiplicato per k , e pertanto il modulo varia senza che cambi la direzione. Tuttavia, la geometria delle linee di flusso può fornire informazioni sull'andamento di E , vale a dire in quali regioni il campo è più intenso e in quali meno intenso. Per questo avremo bisogno delle proprietà del campo elettrico che verranno esposte più avanti.

⁵Nel caso in cui vi sono punti di campo nullo o discontinuo vi saranno anche linee che partono o arrivano da questi punti.

1.4 Distribuzioni continue di carica

Nello studio delle proprietà elettriche dei corpi macroscopici che verrà svolto nel terzo capitolo l'espressione (1.5) del campo elettrico risulta, in pratica, inutilizzabile; infatti il numero di particelle cariche presenti in un pezzo di materia è dell'ordine di grandezza del numero di Avogadro ($\approx 6 \times 10^{23}$) e la somma di un numero così grande di termini non può essere calcolata neanche dal più potente calcolatore attualmente esistente. D'altra parte in queste circostanze neanche i singoli termini della somma sono noti; infatti la posizione esatta di ciascun elettrone o protone di un corpo è ben lungi dall'essere nota, e ciò non solo per motivi pratici ma anche perché, per gli oggetti microscopici, vi è una impossibilità di principio inerente alle leggi della Meccanica Quantistica. Per esempio un elettrone in un atomo non può essere localizzato con una precisione migliore di $\approx 10^{-8}$ cm. Per questi motivi, la descrizione della distribuzione delle cariche in un corpo viene effettuata con metodi statistici introducendo delle grandezze mediate su regioni di dimensioni grandi rispetto alla scala delle lunghezze atomiche. Questa idea è illustrata nella figura 1.5. Supponiamo di voler calcolare il campo elettrico generato da una 'nuvola' di punti carichi aventi tutti la stessa carica e , in un punto P al fuori della nuvola. Una buona approssimazione per $\vec{E}(P)$ può essere ottenuta suddividendo la regione \mathcal{V} dei punti sorgente in elementi o celle di dimensione molto piccola rispetto a r . Nella figura è rappresentato uno di questi elementi come un cubetto di spigolo d , ma la forma dell'elemento non ha alcuna importanza perché, in virtù del fatto che $d \ll r$, assumiamo che il contributo al campo in P delle cariche in esso contenute sia rappresentato da un'unica carica puntiforme Q posta al centro dell'elemento e pari alla somma di tutte le cariche contenute nella cella. In sostanza l'approssimazione consiste nel sostituire le distanze da P dei singoli punti carichi con un valore medio dato dalla distanza dal centro. Ricoprendo l'intera regione \mathcal{V} occupata dai punti carichi con celle simili si esprime il campo come una somma analoga alla (1.5) ma con un numero

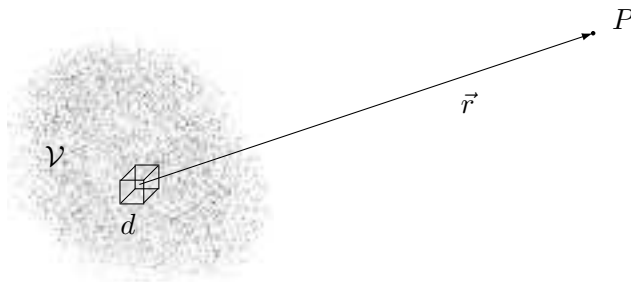


Figura 1.5: Campo prodotto da una nuvola di punti carichi

di termini molto più piccolo:

$$\vec{E}(P) \approx \sum_{k=1}^{N_c} \frac{Q_k}{r_k^2} \hat{r}_k,$$

dove N_c è il numero di celle necessario per ricoprire la regione \mathcal{V} occupata dalla nuvola di cariche. La distribuzione di cariche viene quindi caratterizzata dalle cariche Q_k delle singole celle. Se le dimensioni delle celle sono piccole su scala macroscopica ma grandi rispetto alle dimensioni atomiche ognuna di esse conterrà un numero di cariche proporzionale al volume Δv_k della cella. Questa costante di proporzionalità, che verrà indicata con n_k , rappresenta il numero di particelle per unità di volume nella zona in cui si trova la cella k . Pertanto la carica di ciascun elemento viene espressa come:

$$Q_k = en_k \Delta v_k.$$

*Ovviamente funzione del punto sorgente nella regione \mathcal{V} .

Per una suddivisione abbastanza fine della regione \mathcal{V} (elementi piccoli su scala macroscopica), n_k non varia sensibilmente passando da una cella ad un'altra adiacente. Possiamo allora definire una funzione* continua $n(P')$, *densità del numero di particelle*, il cui valore nel centro della cella k è n_k , e caratterizzare la distribuzione delle cariche attraverso questa funzione piuttosto che attraverso l'elencazione dei numeri n_k . La funzione n è un costrutto matematico e pertanto ha senso dire che in un elemento infinitesimo di volume dv , centrato intorno a un punto P' della regione \mathcal{V} , vi è un numero

$$dN = n(P') dv$$

di particelle. Questa formula può apparire sconcertante in vista del fatto che N è un intero. Si tenga presente però che dN ha un significato statistico in quanto rappresenta il numero *medio* di particelle nel volume dv . In definitiva, n descrive una sorta di fluido idealizzato di particelle che, nei limiti di una descrizione macroscopica, ben rappresenta la nube discreta di particelle. Allo stesso modo la distribuzione di carica elettrica sarà rappresentata da una funzione ρ 'densità di volume di carica elettrica'

$$\rho(P') = en(P'),$$

che determina la carica contenuta in un elemento di volume dv centrato intorno al punto P' :

$$dq = e dN = en(P') dv = \rho(P') dv.$$

Nel caso più generale, in cui le particelle non hanno tutte la stessa carica, si deve fare una classificazione in s 'specie chimiche' ciascuna caratterizzata da una propria carica e_j e densità n_j . La densità di particelle e la densità di carica sono ovviamente espresse da

$$n = \sum_{j=1}^s n_j \quad \text{e} \quad \rho = \sum_{j=1}^s e_j n_j.$$

Poiché nei corpi materiali vi sono sia cariche positive che negative avremo sempre almeno due ‘fluidi’: quello delle cariche positive con carica e^+ e densità n_+ , e quello delle cariche negative con carica e^- e densità n_- . Si ha quindi:

$$n = n_+ + n_- \quad \text{e} \quad \rho = n_+e^+ + n_-e^-.$$

È interessante notare che ρ può essere nulla senza che lo sia n . Questo è il caso della materia neutra per la quale $e^+ = -e^- = e$ (la carica elementare) e $n_+ = n_-$. Questo punto verrà ripreso, con maggiori dettagli, nel quinto capitolo; per il momento è sufficiente tenere presente soltanto la definizione formale della funzione densità di carica espressa dalla relazione

$$dq = \rho(P') d\nu, \quad (1.10)$$

come il fattore di proporzionalità tra il volume $d\nu$ di una cella infinitesima, centrata intorno al punto sorgente P' , e la carica dq in essa contenuta. Il campo elettrico prodotto da questa carica in un punto P individuato dal vettore \vec{r} , per la legge di Coulomb, è dato da

$$d\vec{E} = \frac{dq}{r^2} \hat{r} = \frac{\rho(P')}{r^2} \hat{r} d\nu,$$

e il campo generato dall'intera distribuzione contenuta nella regione \mathcal{V} è

$$\vec{E}(P) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(P')}{r^2} \hat{r} d\nu. \quad (1.11)$$

Questa formula rappresenta una versione della (1.5) valida per una di-

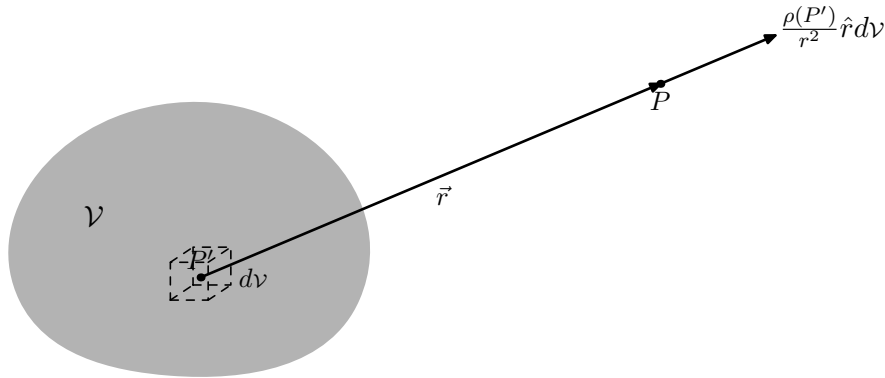


Figura 1.6: Campo prodotto da una carica di volume

stribuzione continua in un volume \mathcal{V} . Conviene puntualizzare che il vettore $\vec{r} = \overrightarrow{P'P}$ dipende sia dal punto campo P che dal punto sorgente P' (si osservi la figura 1.6 dove sono rappresentate le grandezze geometriche in discussione) e che nell'integrazione P' corre su \mathcal{V} mentre P è fissato. La (1.11) rappresenta un modo compatto di esprimere una regola di calcolo; nel caso in cui si debba effettivamente calcolare il campo prodotto da una distribuzione particolare nota, occorre effettuare una scelta di sistema di coordinate. Per esempio, se si usa un sistema di coordinate cartesiane:

- i punti P e P' vengono individuati mediante le triple (x, y, z) e (x', y', z') ,
- la densità di carica è specificata come una funzione $\rho(x', y', z')$,
- la distanza r è espressa come $\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$,
- le componenti di \hat{r} sono $((x - x')/r, (y - y')/r, (z - z')/r)$,
- il volume dell'elemento infinitesimo è $dx' dy' dz'$,
- il campo \vec{E} viene rappresentato dalle componenti (E_x, E_y, E_z) .

Allora dalla (1.11) si ha:

$$E_x = \int_V \frac{\rho(x', y', z')}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}} (x - x') dx' dy' dz',$$

Le espressioni di E_y , E_z sono identiche, a parte uno scambio di ruoli tra le variabili x , y e z . Questa formula è stata scritta con il solo scopo di dare un'idea del tipo di matematica sotteso dalla (1.11). Infatti, i metodi analitici per il calcolo degli integrali di volume che vengono usualmente trattati nei corsi di Analisi, non saranno utilizzati in questo libro perché, in una esposizione dei principî fisici dell'elettrodinamica, le tecniche di calcolo non costituiscono un interesse primario. Inoltre, nei pochi casi in cui sarà necessario calcolare effettivamente il campo di una distribuzione continua, avremo sempre da considerare problemi altamente simmetrici per i quali l'integrale nella (1.11) può essere calcolato con metodi elementari.

La discussione precedente si basa sull'ipotesi che il campo venga calcolato in punti lontani da tutte le cariche sorgenti; infatti, solo in questo caso le dimensioni della cella 'infinitesima' possono essere assunte molto piccole rispetto alla distanza r tra punto sorgente e punto campo. Pertanto, il campo prodotto da un corpo macroscopico, può essere calcolato mediante la (1.11) soltanto *all'esterno* del corpo. Tuttavia, nel Capitolo 3 vedremo che la nozione di distribuzione continua di carica può essere utilizzata anche nello studio dei campi nella materia.

L'altra condizione che gioca un ruolo essenziale nella nozione di densità di carica è che il numero di punti carichi nella distribuzione che genera il campo sia molto grande. Alla scala microscopica, anche questa condizione può essere violata, e tuttavia molti risultati qualitativamente, e spesso anche quantitativamente corretti, possono essere ottenuti nello studio della struttura della materia assumendo che le cariche elementari siano, per così dire, 'diffuse' in una regione dello spazio invece che concentrate in un punto. In questo caso l'approssimazione viene giustificata sulla base dei principî della Meccanica Quantistica. Pertanto, pur tenendo presente che la struttura delle cariche elettriche è discreta, conviene esprimere le leggi dell'elettromagnetismo utilizzando questa metafora di distribuzioni continue di carica.

Infine, vi sono molte situazioni interessanti in cui i punti carichi si addensano in regioni che hanno una o due dimensioni microscopiche o, comunque, trascurabili rispetto alle altre. In questi casi sarà conveniente introdurre le nozioni di carica di superficie o di linea. L'idea generale è stata, spero, sufficientemente chiarita per le distribuzioni di volume e mi limito quindi a dare le definizioni formali. La densità di carica di superficie $\sigma(P)$ in un punto P di una superficie carica è definita come il fattore di proporzionalità tra l'area ds di un elemento infinitesimo della superficie centrato intorno a P e la carica dq che su tale elemento è collocata:

$$dq = \sigma(P)ds.$$

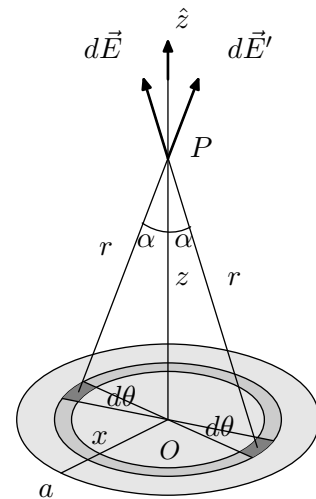
Analogamente indicando con $d\ell$ la lunghezza di un arco di curva centrato intorno a P la densità di carica di linea $\lambda(P)$ è definita dalla formula

$$dq = \lambda(P)d\ell.$$

Le espressioni del campo generato da distribuzioni di superficie e di linea sono del tutto analoghe alla (1.11) e il lettore può facilmente scriverle per esercizio.

Esempi - Ad illustrazione delle nozioni introdotte sopra calcoliamo il campo di due distribuzioni di carica particolarmente importanti.

Consideriamo una carica di superficie uniforme (σ costante) su un disco di raggio a . Calcoliamo il campo elettrico in un punto P dell'asse \hat{z} perpendicolare al disco nel centro O ; il verso di \hat{z} è scelto a piacere e la coordinata z di P sarà positiva o negativa secondo che P si trovi dalla parte verso cui punta \hat{z} o dalla parte opposta. È del tutto intuitivo che \vec{E} deve avere la direzione di \hat{z} , ma, per una volta conviene argomentare con un minimo di pedanteria. Poiché \hat{z} è asse di simmetria della distribuzione di carica, per ogni elemento della superficie ve n'è uno simmetrico che contiene la stessa carica e che ha la stessa distanza da P ; i contributi, $d\vec{E}$ e $d\vec{E}'$, al campo totale di questi due elementi hanno quindi lo stesso modulo. D'altra parte, osservando la figura a lato, si vede subito che i due vettori formano angoli eguali, α , con l'asse \hat{z} e da ciò segue subito che la loro somma ha la direzione di \hat{z} . Dato che l'intera superficie può essere ricoperta con coppie di elementi simmetrici segue infine che il campo totale ha la direzione dell'asse. A questa stessa conclusione si può giungere con un ragionamento più sintetico, basato sull'idea potente di invarianza. Osserviamo che, se il corpo che porta la carica σ viene ruotato intorno all'asse \hat{z} di un angolo arbitrario, in virtù della simmetria, la distribuzione di carica rimane *invariante*; allora anche il campo elettrico in P deve rimanere invariante e ciò può accadere solo se \vec{E} ha la direzione di \hat{z} . Più in generale, con questo tipo di argomento si vede facilmente che la configurazione del campo si replica identica in tutti i semipiani meridiani aventi \hat{z} come bordo. In



definitiva, per i punti dell'asse, possiamo scrivere $\vec{E} = E_z \hat{z}$ e pertanto c'è da calcolare soltanto lo scalare

$$E_z = \vec{E} \cdot \hat{z} = \int_S \frac{\sigma ds}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{z} = \int_S \frac{\sigma ds}{r^2} \cos \alpha.$$

Dall'osservazione della figura si ricava immediatamente che r e α hanno lo stesso valore per tutti i punti di una corona circolare con centro in O e spessore infinitesimo. Indicando con x il raggio e dx lo spessore della corona si ha

$$ds = 2\pi x dx.$$

Inoltre, mediante considerazioni geometriche elementari si possono esprimere r e $\cos \alpha$ in funzione di x :

$$r^2 = z^2 + x^2, \quad \cos \alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2 + x^2}}.$$

Sostituendo nell'integrale si ottiene

$$\begin{aligned} E_z &= 2\pi\sigma z \int_0^a \frac{x}{(z^2 + x^2)^{3/2}} dx = 2\pi\sigma z \left[\frac{-1}{\sqrt{z^2 + x^2}} \right]_0^a = \\ &= 2\pi\sigma \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Da questa formula risulta in primo luogo che $E_z(-z) = -E_z(z)$ e, di conseguenza, $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$, come si poteva facilmente prevedere con una semplice considerazione di simmetria.

Esercizio - Disegnare il grafico di E_z in funzione di z nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$.

È molto interessante studiare i due casi limite $z \ll a$ e $z \gg a$. Nel primo caso risulta immediatamente:

$$E_z \approx \begin{cases} 2\pi\sigma & \text{per } z > 0 \\ -2\pi\sigma & \text{per } z < 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Più avanti verrà dimostrato che questa formula vale non solo per i punti dell'asse \hat{z} ma anche per tutti i punti che hanno una distanza da detto asse minore di a (sempre nel limite $z \ll a$). Per i punti che non appartengono all'asse \hat{z} vi sarà anche una componente del campo elettrico parallela al piano del disco ma nella zona centrale del disco ($x \ll a$) tale componente è trascurabile rispetto a E_z e la formula scritta sopra rappresenta con buona approssimazione l'intero campo. La (1.13) vale esattamente in tutti i punti dello spazio quando $a \rightarrow \infty$; questo è il caso di una distribuzione di carica che ricopre interamente il piano $z = 0$. Per questo motivo il campo (1.13) viene chiamato *campo di uno strato piano*. Ovviamente una distribuzione infinita di cariche non esiste in natura ma la possibilità di utilizzare l'approssimazione dello strato piano si presenta in molti casi importanti. Si noti che il campo elettrico non è definito sul disco perché la componente E_z presenta una discontinuità a salto da $2\pi\sigma$ a $-2\pi\sigma$. Abbiamo qui un esempio di singolarità del campo del tipo menzionato nel § 1.3.2. Questa discontinuità, non è specifica del campo di un disco; vedremo più avanti che in un punto appartenente a

una superficie carica, i limiti di \vec{E} dalle due parti della superficie esistono ma sono differenti. In questi punti singolari confluiscono quindi due linee di flusso.

Il limite dei grandi valori di z viene ottenuto osservando che

$$\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{z}{|z|} \frac{1}{\sqrt{1 + (a/z)^2}},$$

e sviluppando al primo ordine in $(a/z)^2$

$$\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \rightarrow \frac{z}{|z|} \left(1 - \frac{a^2}{2z^2}\right).$$

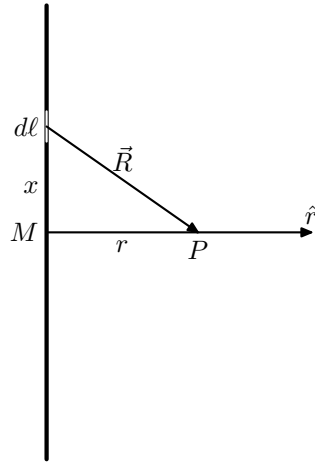
Sostituendo nella (1.12) si ha allora

$$E_z \approx \frac{z}{|z|} \frac{\pi a^2 \sigma}{z^2}.$$

Questo è, come si poteva prevedere, il campo coulombiano di una carica puntiforme $\pi a^2 \sigma$ pari alla carica totale del disco. Il fattore $z/|z|$, che vale ± 1 secondo che z sia positivo o negativo rende conto del verso di \vec{E} .

Un'altra distribuzione di particolare interesse è una densità lineare uniforme λ su un segmento di lunghezza L .

Nella figura a lato il segmento carico viene mostrato piuttosto spesso allo scopo di evidenziare con l'ombreggiatura l'elemento generico $d\ell$ della distribuzione. Calcoliamo il campo in un punto P del piano perpendicolare al segmento e passante per il punto medio M . Per simmetria è evidente che il campo elettrico giace in questo piano e nel semipiano meridiano avente come bordo la retta cui appartiene il segmento e passante per P . Il campo ha quindi la direzione del semiasse \hat{r} di origine M . Pertanto basta calcolare la componente E_r



$$E_r = \int_L \frac{\lambda d\ell}{R^2} \hat{R} \cdot \hat{r}$$

Indicando con x la distanza da M del generico elemento $d\ell$ e con r l'ascissa del punto P si ottiene facilmente

$$E_r = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda r}{(r^2 + x^2)^{3/2}} dx = \frac{\lambda}{r} \left[\frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{\lambda}{r} \frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2/4}} \quad (1.14)$$

Anche in questo caso è interessante studiare i limiti $r \ll L$ e $r \gg L$. Si vede subito che per piccoli valori di r la (1.14) fornisce

$$E_r \approx \frac{2\lambda}{r}. \quad (1.15)$$

Formalmente, questa è l'espressione esatta del campo generato da un filo infinitamente lungo ($L \rightarrow \infty$) e la (1.15) prende il nome di campo di

un filo rettilineo indefinito. Nel mondo reale non esistono fili infiniti ma la formula trovata fornisce una approssimazione valida nella zona vicina al centro di un lungo filo carico che risulterà molto utile nel seguito.

L'espressione di E_r a grande distanza viene ottenuta sviluppando al primo ordine in L/r e si trova con facili calcoli

$$E_r \approx \frac{\lambda L}{r^2},$$

che è il campo coulombiano di un punto di carica λL pari alla carica totale del filo.

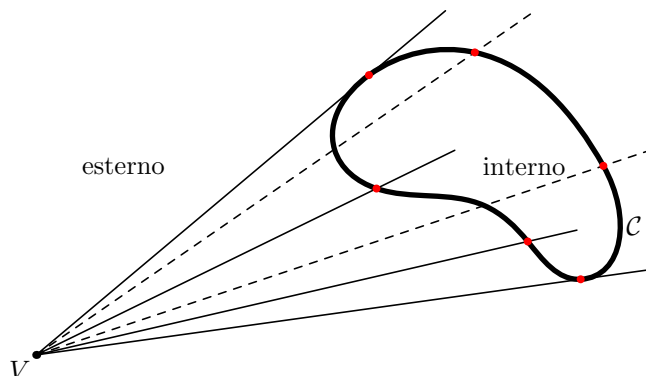
1.5 Legge di Gauss

Come osservato in precedenza, la nozione di campo elettrico (1.7) consente di esprimere la forza agente su una carica in forma locale: la forza agente sulla carica collocata in un punto dello spazio è determinata dal valore del campo *in quello stesso punto*. Tuttavia l'espressione di \vec{E} in termini delle cariche data dalla (1.5), è una legge di azione a distanza: il campo in un punto dello spazio dipende dalle cariche sorgenti poste in *altri* punti dello spazio, eventualmente molto distanti. Anzi, in linea di principio, il campo in un punto è generato da *tutte* le cariche dell'universo, e solo la neutralità della materia su grande scala consente che 'si metta in evidenza' il campo prodotto da poche cariche ben individuate. Una relazione locale tra il campo e le cariche è espressa dalla legge di Gauss che costituisce l'oggetto di questo paragrafo. Questa legge può essere dedotta per via analitica a partire dalla legge di Coulomb e dal Principio di sovrapposizione, e per questo viene spesso chiamata 'Teorema' di Gauss; tuttavia, essa è suscettibile di verifica sperimentale indipendente con precisione di gran lunga superiore a quella della legge di Coulomb, e ha validità molto più generale, per cui la qualifica di 'Teorema' non è appropriata.

La dimostrazione analitica può essere conseguita con un ragionamento *ad hoc* senza particolari difficoltà. Tuttavia ritengo conveniente premettere una discussione del concetto di angolo solido che, oltre a rendere banale la dimostrazione, costituisce una nozione importante di per se.

1.5.1 Angoli solidi

La nozione di angolo solido è l'estensione a tre dimensioni del concetto di angolo in geometria piana e si basa sulla generalizzazione dell'idea elementare di cono. Procedendo in maniera intuitiva, un cono può essere costruito conducendo da un punto fissato V (il vertice) tutte le semirette che intersecano una curva chiusa \mathcal{C} come mostrato in figura



Il lettore faccia uno sforzo per immaginare il rilievo tridimensionale, con le semirette tratteggiate che ‘stanno dietro’ a quelle a tratto continuo, e ‘vedere’ la superficie ‘rigata’ generata da queste semirette; per agevolare l’interpretazione della figura i punti di intersezione con \mathcal{C} sono colorati in rosso. Questa *superficie conica*, divide lo spazio in due regioni che prendono il nome di *coni* o *angoli solidi*; convenzionalmente, esse possono essere distinte con gli appellativi di cono interno e cono esterno. Ovviamente non esiste alcun criterio per decidere quale dei due coni è interno e quale è esterno; le denominazioni scelte nella figura possono anche essere scambiate*.

La nozione di cono è alquanto più generale di quella suggerita dal contenitore di gelato; la ‘forma’ di un cono può assumere gli aspetti più diversi come mostrano gli esempi mostrati in figura 1.7. Il primo cono,

* La stessa cosa avviene, nel piano, per i due angoli formati da due semirette con la stessa origine.

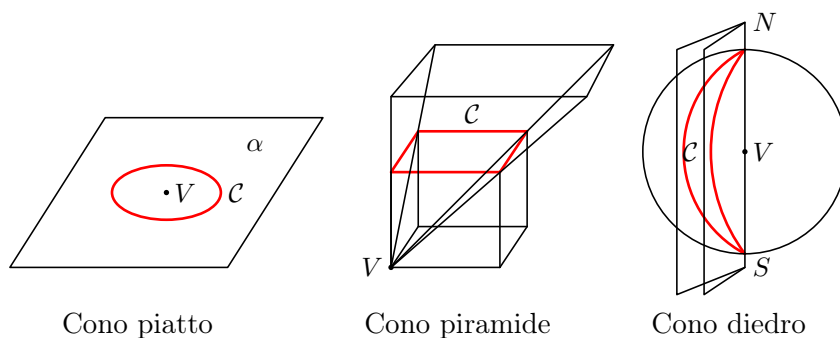


Figura 1.7: Alcuni esempi di cono

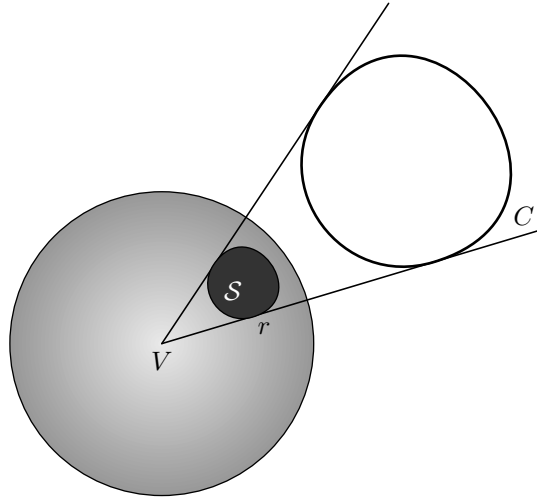
denominato piatto[†], è costruito con una curva \mathcal{C} piana e un vertice V appartenente allo stesso piano α della curva e situato all’interno della curva stessa. La superficie conica coincide con il piano α e i due coni sono i due semispazi in cui questo piano divide l’intero spazio. Il cono piramide ha il vertice coincidente con un vertice di un cubo, e la curva chiusa \mathcal{C} è il bordo di una delle facce del cubo che non contiene V . La superficie conica è formata dai quattro angoli piani delineati in figura. Infine il cono ‘diedro’ viene ottenuto prendendo come vertice il centro

[†] Le denominazioni della figura non sono canoniche, ma inventate dall’autore.

della Terra e come curva chiusa quella costituita dai due mezzi meridiani passanti per Greenwich e Napoli; la superficie conica è costituita dai due semipiani aventi come bordo l'asse Nord-Sud e passanti per le dette città.

La misura degli angoli solidi viene definita in maniera del tutto analoga a quella degli angoli piani: tracciando una sfera di raggio arbitrario r con centro in V e intersecando con il cono si ottiene una suddivisione della superficie in due regioni indicate nella figura sotto con ombreggiature differenti. Anche qui è essenziale vedere il rilievo: la curva \mathcal{C} è in primo piano, il vertice V è sullo sfondo, e le due semirette che delineano il cono 'escono dalla pagina' verso chi legge. Facendo riferimento al cono interno, indichiamo con \mathcal{S} l'area della porzione di sfera intercettata. La misura dell'angolo solido è per definizione

$$\Omega \equiv \frac{\mathcal{S}}{r^2}.$$



Esercizio: Riferendosi alla figura 1.7:

- a) dimostrare che la misura del cono piatto è 2π ;
- b) dimostrare che la misura del cono piramide è $\pi/6$;
- c) indicando con α la longitudine est di Napoli dimostrare che per l'angolo diedro

$$\Omega = 2\alpha.$$

Sapendo che $\alpha = 14^\circ 15'$ calcolare il valore numerico di Ω .

È appena il caso di osservare che Ω è indipendente da r e, come la misura in radianti degli angoli piani, adimensionale; inoltre è evidente che unendo due o più coni si ottiene un cono la cui misura è la somma delle misure dei singoli coni. Infine, ricordando che l'area di una superficie sferica è $4\pi r^2$, si ha immediatamente che, se il cono interno ha misura Ω , quello esterno ha misura $4\pi - \Omega$.

Un cono può essere caratterizzato anche da una superficie 'aperta' e cioè dotata di bordo, come ad esempio la faccia del cubo nel cono piramide o la porzione di superficie terrestre tra i due semi-meridiani nel cono diedro; in figura 1.7 gli orli di queste superfici sono evidenziati in rosso.[†] Dal momento che il bordo di una superficie \mathcal{S} è necessariamente una curva chiusa \mathcal{C} , per qualsiasi superficie aperta si può costruire il cono avente vertice in un punto P , che prende il nome di *angolo solido sotteso dalla superficie \mathcal{S}* rispetto al punto P ; la cosa è illustrata in figura 1.8. Ora, suddividendo la superficie in elementi infinitesimi piani, si induce una suddivisione del cono in coni infinitesimi; indicando con $d\Omega$ la misura del generico cono infinitesimo, la misura dell'angolo solido sotteso dalla superficie è ovviamente

$$\Omega = \int_{\mathcal{S}} d\Omega.$$

[†]Qual'è la superficie nel caso del cono piatto?

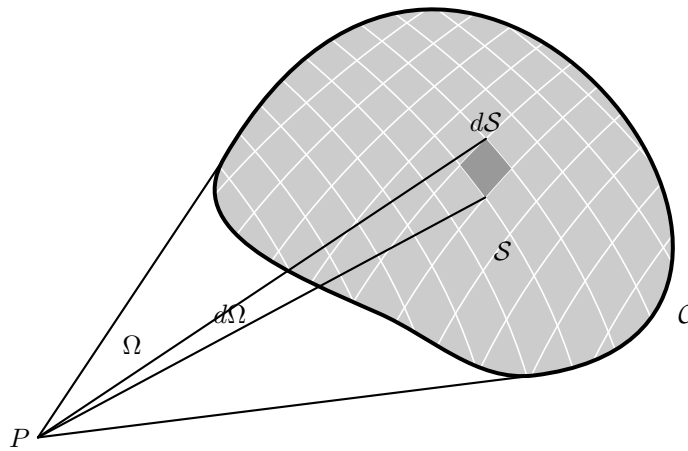


Figura 1.8: Angolo solido sotteso da una superficie

Una espressione analitica per $d\Omega$ si ricava facilmente osservando la Figura 1.9 dove è mostrato il cono infinitesimo di un generico elemento dS . Per misurare l'angolo prendiamo una sfera di raggio r pari alla distanza da P a dS ; l'intersezione di questa sfera con il cono è delineata in figura con una linea punteggiata e indicata con ds' . Trattandosi di elementi infinitesimi, si può asserire che ds' è la proiezione ortogonale di dS sul piano perpendicolare a \hat{r} . Dall'osservazione della figura si vede subito che

$$ds' = dS \cos \alpha,$$

dove α è l'angolo tra \hat{r} e il versore \hat{n} della normale alla superficie. Perciò

$$ds' = \hat{r} \cdot \hat{n} dS \quad \Rightarrow \quad d\Omega = \frac{ds'}{r^2} = \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \hat{n} dS.$$

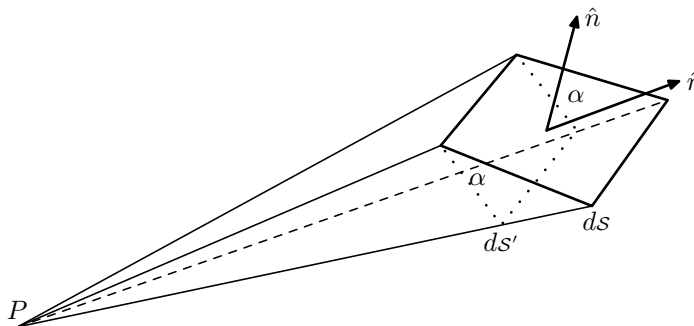


Figura 1.9: Angolo solido sotteso da una superficie infinitesima

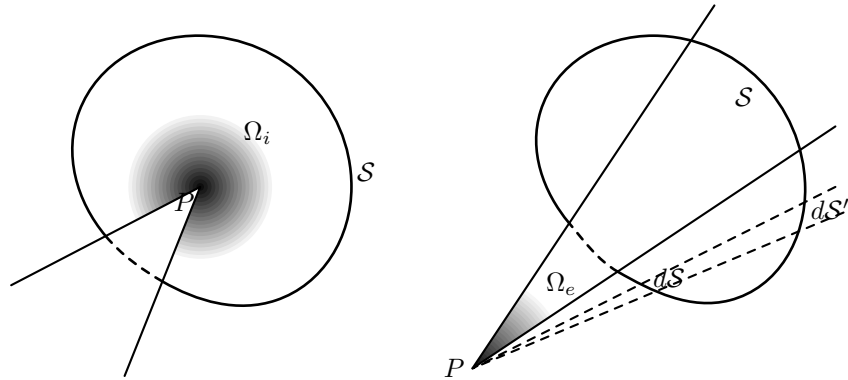
La misura dell'angolo solido sotteso da una superficie S rispetto a un punto P si scrive quindi

$$\Omega = \int_S \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \hat{n} ds, \quad (1.16)$$

dove \vec{r} è il raggio vettore dal punto P all'elemento ds della superficie. Questa espressione costituisce una generalizzazione della nozione di misura di angolo solido, in quanto il valore di Ω fornito dalla (1.16) può essere sia positivo che negativo secondo il verso che viene scelto per la normale \hat{n} ; e questa generalizzazione è opportuna in quanto una superficie è un oggetto geometrico *orientabile* per il quale vi è la possibilità di distinguere due *pagine*[†]. Una volta scelto un verso per la normale a una superficie, possiamo asserire che un punto P 'vede' la pagina positiva se il verso di $d\vec{S}$ si allontana da P come in Figura 1.9. In caso contrario diremo che P vede la pagina negativa (e di conseguenza l'angolo solido sotteso è negativo).

[†]L'esempio più ovvio è quello delle pagine pari e dispari di un libro

La formula (1.16) si può applicare anche a superfici *chiuse*, intendendo con questo termine le superfici come la sfera o la buccia di una patata, che sono prive di bordo. Per queste superfici l'angolo solido sotteso rispetto a un punto dato P , viene calcolato molto facilmente considerando il limite di una superficie aperta il cui bordo si contrae a un punto (come l'imboccatura di un sacco che viene chiuso). Il risultato dipende esclusivamente dal fatto che P appartenga o meno alla regione delimitata da \mathcal{S} - brevemente, se P è interno o esterno a \mathcal{S} . Si osservi la parte a sinistra nella figura che segue, dove per semplicità si è soppressa una dimensione.



L'angolo solido Ω_i calcolato dalla (1.16) è quello indicato dalla ombreggiatura; quando l'orlo si contrae a un punto quest'angolo tende all'angolo 'giro' e vale 4π . Nella parte destra della figura è illustrato il caso in cui il vertice P è esterno alla superficie. La porzione di superficie che non appartiene all'angolo Ω_e ombreggiato, dà un contributo complessivamente nullo all'integrale (1.16); infatti, in questa regione, a ogni elemento dS se ne può associare un altro, dS' che dà un contributo opposto; le due linee tratteggiate in figura mostrano la corrispondenza. Quando l'orlo si riduce a un punto l'angolo Ω_e tende ovviamente a zero.

In conclusione, convenendo di orientare la normale a una superficie chiusa \mathcal{S} sempre verso l'esterno, tutta la discussione precedente si può riassumere nella formula

$$\oint_{\mathcal{S}} \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \hat{n} d\mathcal{S} = \begin{cases} 4\pi & \text{se } P \text{ è interno a } \mathcal{S} \\ 0 & \text{se } P \text{ è esterno a } \mathcal{S} \end{cases} \quad (1.17)$$

Un lettore con inclinazione per la matematica può chiedersi quanto vale Ω nel caso in cui P appartiene a \mathcal{S} . Gli propongo allora il seguente

Esercizio. Sia \mathcal{S} la superficie che delimita un cubo. Dimostrare che se P appartiene a una faccia, ma non a uno spigolo, l'angolo vale 2π ; se P appartiene a uno spigolo, ma non è un vertice, l'angolo è π ; infine, se P è un vertice $\Omega = \pi/2$. Da questo risultato si può inferire un enunciato di carattere generale? ■

1.5.2 Legge di Gauss

Per un qualsiasi campo vettoriale \vec{v} , data una superficie \mathcal{S} orientata (per la quale si è scelto un verso della normale), si definisce *flusso di \vec{v} attraverso \mathcal{S}* l'integrale di superficie:

$$\phi_{\mathcal{S}}(\vec{v}) \equiv \int_{\mathcal{S}} \vec{v} \cdot \hat{n} d\mathcal{S}. \quad (1.18)$$

Il termine flusso è mutuato dall'idrodinamica dove, con \vec{v} campo delle velocità di un fluido, $\phi_{\mathcal{S}}$ rappresenta il volume di fluido che attraversa (nel verso scelto per \hat{n}) la superficie \mathcal{S} per unità di tempo. In elettrostatica, anche se niente si muove, ha grande importanza il flusso del campo elettrico attraverso una superficie. Nel sistema di unità gaussiano si ha immediatamente dalla (1.18) che il flusso di \vec{E} ha le dimensioni di una carica elettrica e si misura in statcoulomb. Per il campo elettrico generato da una sola carica puntiforme q è facile trovare un'espressione generale per il flusso. Ricordando la legge di Coulomb si ha immediatamente

$$\phi_{\mathcal{S}}(\vec{E}) = \int_{\mathcal{S}} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{n} d\mathcal{S} = q \int_{\mathcal{S}} \frac{\hat{r} \cdot \hat{n}}{r^2} d\mathcal{S} = q\Omega,$$

dove Ω è l'angolo solido sotteso dalla superficie \mathcal{S} rispetto al punto in cui è situata la carica. In particolare se la superficie \mathcal{S} è chiusa $\phi_{\mathcal{S}}(\vec{E})$ viene chiamato flusso uscente* e vale zero o $4\pi q$ secondo che la carica si trova all'esterno o all'interno della superficie.

In generale, per una collezione di cariche puntiformi, (q_1, \dots, q_n) , in virtù del principio di sovrapposizione abbiamo che:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i,$$

e quindi

$$\phi_{\mathcal{S}}(\vec{E}) = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{S}} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \cdot \hat{n} d\mathcal{S} = \sum_{i=1}^n \phi_{\mathcal{S}}(\vec{E}_i) = \sum_{i=1}^n q_i \Omega_i.$$



CARL FRIEDRICH GAUSS
1777 – 1855

* La normale a una superficie chiusa, come detto sopra, viene orientata verso l'esterno

Se la superficie \mathcal{S} è chiusa nella somma sono diversi da zero soltanto i termini che corrispondono alle cariche interne alla superficie, e per ognuno di essi Ω vale 4π . Lo stesso ragionamento si può ripetere per campi generati da distribuzioni continue di carica e possiamo quindi, del tutto in generale, asserire la validità della:

Legge di Gauss: *Il flusso del campo elettrico uscente da una superficie chiusa \mathcal{S} è eguale a 4π per la carica totale Q che si trova nella regione delimitata da \mathcal{S} :*

IN UNITÀ SI

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \hat{n} ds = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \hat{n} ds = 4\pi Q.$$

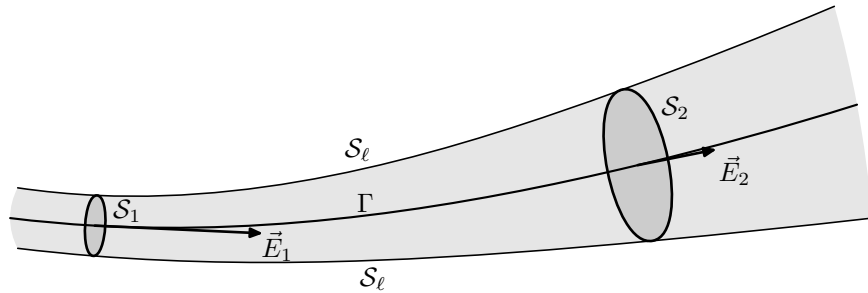
Il fatto che il flusso sia determinato dalle sole cariche *interne* a \mathcal{S} caratterizza la legge di Gauss come legge *locale*. Se il lettore riflette sulla dimostrazione, si renderà conto che il punto chiave è la dipendenza $1/r^2$ della forza di Coulomb; la nostra convinzione che l'esponente di r a denominatore, sia esattamente 2 deriva proprio da questa circostanza. Vedremo più avanti che, anche per cariche in moto - quando la legge di Coulomb non è più valida -, la legge di Gauss implica una dipendenza $1/r^2$ dall'interazione tra cariche puntiformi.

1.5.3 Legge di Gauss e linee di flusso

Dalla legge di Gauss si ricava un'importante proprietà qualitativa delle linee di flusso del campo elettrico:

In una regione *priva di cariche*, le linee di flusso si avvicinano dove il campo è più intenso; equivalentemente, l'intensità del campo decresce dove le linee di flusso divergono.

L'affermazione viene facilmente provata ragionando sullo schizzo disegnato qui sotto:



La curva contrassegnata con Γ rappresenta una linea di flusso e \mathcal{S}_1 una qualsiasi superficie *aperta* attraversata dalla linea. Le linee di flusso passanti per il bordo di \mathcal{S}_1 generano una superficie tubolare, leggermente ombreggiata nel disegno, che prende il nome di '*tubo di flusso*'; la ragione di questa denominazione è che il flusso del campo attraverso qualsiasi altra sezione \mathcal{S}_2 è uguale a quello attraverso \mathcal{S}_1 :

$$\int_{\mathcal{S}_1} \vec{E} \cdot \hat{n} ds = \int_{\mathcal{S}_2} \vec{E} \cdot \hat{n} ds. \quad (1.19)$$

Ovviamente, le normali alle due superfici devono essere orientate in maniera concorde: ambedue nel verso della linea di flusso o nel verso opposto. La (1.19) segue facilmente dalla legge di Gauss. Consideriamo infatti la superficie *chiusa* costituita dall'unione di \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 e dalla superficie laterale \mathcal{S}_ℓ del tubo (vedi figura)

$$\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_\ell.$$

Per l'ipotesi di assenza di cariche nella regione, la legge di Gauss impone che il flusso uscente da \mathcal{S} sia nullo; inoltre, il flusso uscente dalla superficie laterale del tubo, \mathcal{S}_ℓ , è nullo perché il campo è dappertutto tangente. Pertanto i flussi *uscenti* da \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 sono opposti; tenendo presente che i flussi uscenti da queste superfici sono calcolati con normali *discordi* si ricava la (1.19).

Assumendo in particolare che \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 abbiano piccola estensione e siano perpendicolari a Γ si ha

$$\int_{\mathcal{S}_1} \vec{E} \cdot \hat{n} ds \approx \mathcal{S}_1 E_1, \quad \int_{\mathcal{S}_2} \vec{E} \cdot \hat{n} ds \approx \mathcal{S}_2 E_2 \quad \implies \quad \mathcal{S}_1 E_1 = \mathcal{S}_2 E_2,$$

dove E_1 ed E_2 sono le intensità del campo nei punti di Γ indicati in figura; ora, dove le linee di flusso divergono, la sezione (\mathcal{S}_2 in figura) del tubo aumenta, e perciò l'intensità del campo (E_2) decresce.

1.5.4 Distribuzioni a simmetria sferica

Una distribuzione di carica si dice a simmetria sferica quando la densità di carica dipende solo dalla distanza r da un punto fisso O . Nel caso di densità di volume (di superficie) questo significa che ρ (σ) ha lo stesso valore in tutti i punti delle sfere di centro O (ma, in generale, valori differenti per sfere di raggi differenti); non sono possibili distribuzioni con densità di carica lineare. Una distribuzione a simmetria sferica rimane invariante per tutte le rotazioni intorno a qualsiasi asse passante per O ; ciò implica che anche il campo deve essere invariante per rotazione. Allora, indicando con \vec{r} il vettore posizione riferito a O di un qualsiasi punto P dello spazio, il campo elettrico deve essere '*radiale*'

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r \hat{r}.$$

Infatti la direzione \hat{r} è l'unica che resta invariante per rotazione intorno all'asse OP . Inoltre, la componente radiale E_r deve dipendere esclusivamente da r (e non da \vec{r}):

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r) \hat{r}. \quad (1.20)$$

Un campo esprimibile in questo modo viene detto '*centrale*'[†].

[†] Vedi anche § 2.1.1

La legge di Gauss consente di determinare facilmente la componente radiale E_r . Prendendo infatti come superficie gaussiana la sfera \mathcal{S} con

centro in O e raggio r , si ha ovviamente $\vec{E} \cdot \hat{n} ds = E_r ds$ e tenendo presente che E_r è uniforme sulla sfera, risulta

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} ds = E_r \oint_S ds = E_r 4\pi r^2.$$

Indicando con $Q(r)$ la carica contenuta nella sfera di raggio r si ha dalla legge di Gauss:

$$E_r 4\pi r^2 = 4\pi Q(r) \implies E_r = \frac{Q(r)}{r^2} \quad (1.21)$$

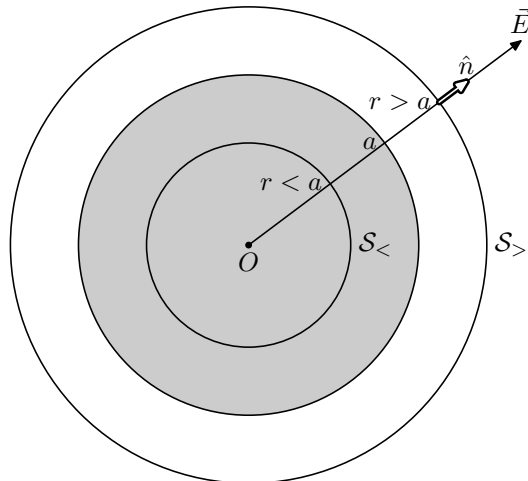
Si badi che questa *non* è la legge di Coulomb perché Q è una funzione di r . In effetti una distribuzione di carica costituita da una singola carica puntiforme Q può essere considerata come un caso limite di distribuzione a simmetria sferica; in questo caso $Q(r)$ è, ovviamente, indipendente da r e la formula scritta sopra rappresenta effettivamente la legge di Coulomb. Non si deve però pensare che la (1.21) dimostri che la legge di Gauss consenta *da sola* di ricavare la legge di Coulomb. Infatti, nel ragionamento svolto sopra gioca un ruolo essenziale l'ipotesi di centralità del campo che è del tutto indipendente dalla legge di Gauss; vedremo più avanti che per cariche in moto il campo non è centrale nonostante che la legge di Gauss continui a essere valida. In sintesi, la legge di Gauss 'contiene' la proporzionalità tra campo e carica e la dipendenza $1/r^2$ dalla distanza ma non la centralità della forza Coulombiana.

Consideriamo ora due semplici applicazioni della (1.21). Supponiamo che la distribuzione di carica abbia una densità uniforme ρ nella palla[†] di raggio a e densità nulla per $r > a$ (vedi figura sotto). Si ha immediatamente:

$$Q(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi\rho r^3 & \text{per } r \leq a \\ \frac{4}{3}\pi\rho a^3 = q & \text{per } r \geq a \end{cases},$$

[†]Nel linguaggio comune sia la superficie sferica che il dominio tridimensionale di cui essa è frontiera vengono designate con il termine 'sfera'. Per evitare ambiguità, in matematica il termine sfera è riservato alla superficie, mentre il suo interno si chiama 'palla' (ball).

indicando con q la carica totale della distribuzione.

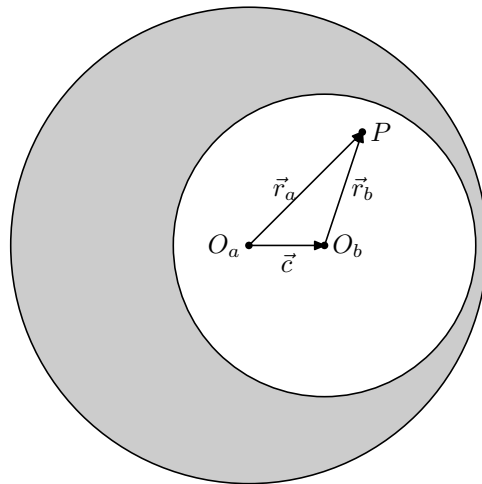


Nella figura sono disegnate due sfere $\mathcal{S}_<$ e $\mathcal{S}_>$, la prima di raggio minore di a e la seconda di raggio maggiore di a , per illustrare il fatto che mentre la prima contiene solo una parte della carica totale l'altra la contiene tutta. Sostituendo nella (1.21) si ottiene:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi\rho\vec{r} & \text{per } r \leq a \\ \frac{q}{r^2}\hat{r} & \text{per } r \geq a \end{cases}.$$

All'esterno della sfera di raggio a il campo è identico a quello di una carica puntiforme mentre all'interno cresce proporzionalmente alla distanza dal centro.

Esercizio. Calcolare il campo elettrico all'interno di una cavità sferica di raggio b , dove la densità di carica è nulla, praticata all'interno di una palla di raggio a avente densità uniforme ρ . La distanza del centro della cavità dal centro della palla carica è c e $a > b + c$ (la cavità è tutta interna alla palla di raggio a).



Soluzione: La distribuzione di carica descritta equivale alla somma di una densità ρ uniforme in *tutta* la palla di raggio a e di una densità $-\rho$ all'interno della sfera di raggio b . Il campo elettrico può essere calcolato come la somma dei campi generati da queste due distribuzioni. Indicando con r_a e r_b (vedi figura) le distanze dai centri delle due sfere di un punto nella cavità P si ha:

$$\vec{E}(P) = \frac{4}{3}\pi\rho\vec{r}_a + \frac{4}{3}\pi(-\rho)\vec{r}_b = \frac{4}{3}\pi\rho(\vec{r}_a - \vec{r}_b).$$

Osservando che $\vec{r}_a - \vec{r}_b$ è il vettore \vec{c} che congiunge i centri delle due sfere si ha

$$\vec{E} = \frac{4}{3}\pi\rho\vec{c}.$$

Pertanto il campo elettrico all'interno della cavità è uniforme. ■

Come seconda applicazione della (1.21) consideriamo il caso di una distribuzione di carica di superficie; la simmetria sferica viene rispettata solo con densità uniforme σ su una sfera di raggio a . Ora è evidente

che, per una superficie gaussiana sferica di raggio minore di a la carica interna è nulla, mentre una sfera di raggio maggiore di a contiene tutta la distribuzione:

$$Q(r) = \begin{cases} 0 & \text{per } r < a \\ 4\pi\sigma a^2 & \text{per } r > a \end{cases},$$

e pertanto

$$E_r(r) = \begin{cases} 0 & \text{per } r < a \\ \frac{4\pi\sigma a^2}{r^2} & \text{per } r > a \end{cases}.$$

Come nel caso precedente, il campo all'esterno della sfera carica è eguale al campo di una carica puntiforme pari alla carica totale della distribuzione posta nel centro della sfera. All'interno invece il campo è identicamente nullo e ciò comporta l'esistenza di una discontinuità alla superficie della sfera di raggio a . Infatti dalla formula precedente risulta

$$\lim_{r \rightarrow a^-} E_r(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow a^+} E_r(r) = 4\pi\sigma.$$

Il campo non è definito per $r = a$. Una discontinuità analoga è stata già riscontrata per il campo di un disco carico (vedi la 1.13). Nel prossimo paragrafo vedremo che la presenza di una carica di superficie implica sempre una discontinuità a salto.

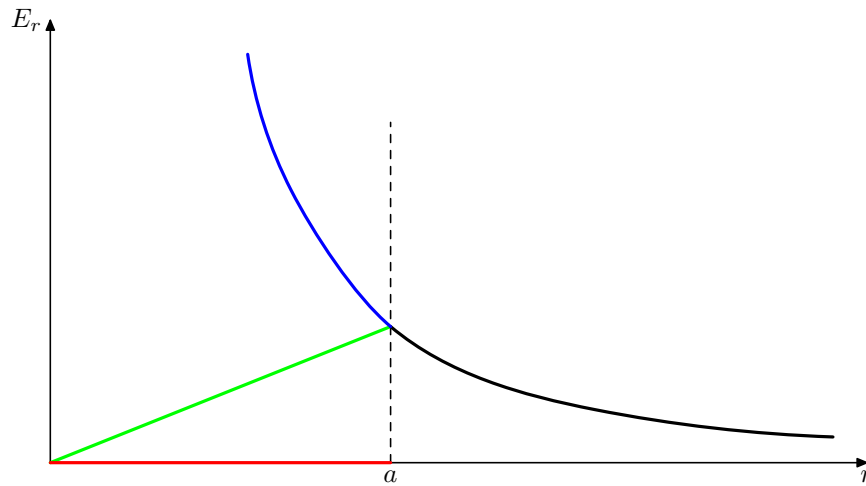


Figura 1.10: Componente radiale del campo: **blu** carica puntiforme, **verde** carica di volume, **rosso** carica di superficie.

I risultati della precedente discussione sono condensati nella Figura 1.10. La curva **blu** è il grafico di E_r per una carica puntiforme q , la **verde** per una carica totale eguale distribuita uniformemente *all'interno* della sfera di raggio a , la **rossa** per la stessa carica distribuita uniformemente *sulla* superficie sferica di raggio a . Si noti che per $r > a$, curva in nero, il campo è lo stesso per le tre distribuzioni.

1.6 Forme locali della legge di Gauss

Abbiamo già osservato che la dipendenza del flusso di \vec{E} uscente da una superficie chiusa dalle sole cariche interne, è una caratteristica locale; ciò può essere reso esplicito ricavando delle relazioni tra campo e carica valide punto per punto. Osserviamo che, dato un punto P dello spazio, la legge di Gauss vale per ‘qualsiasi’ superficie contenente P ; allora, una relazione ‘puntuale’ può essere ottenuta studiando l’andamento del flusso di \vec{E} uscente da superfici che includono P , nel limite in cui le dimensioni di queste superfici tendono a zero. Questo processo di ‘contrazione’ porta ad espressioni differenti secondo che in P vi siano o meno cariche concentrate (puntiformi, di linea o di superficie). Consideriamo dapprima il caso in cui non vi sono cariche concentrate: la distribuzione di carica nelle adiacenze di P viene quindi descritta da una densità di volume continua ρ . Si noti che il caso delle regioni prive di cariche è incluso in questa ipotesi perché $\rho \equiv 0$ è una funzione continua. Indicando con \mathcal{V} la regione delimitata da una superficie gaussiana \mathcal{S} , la carica totale contenuta in questa superficie è

$$Q(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{V}} \rho dv.$$

Per il teorema della media, se $\Delta\mathcal{V}$ indica il volume della regione \mathcal{V} , si ha

$$\int_{\mathcal{V}} \rho dv = \rho(M) \Delta\mathcal{V},$$

dove M è un punto interno a \mathcal{S} . Dalla legge di Gauss si ottiene quindi

$$\frac{\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \hat{n} ds}{\Delta\mathcal{V}} = 4\pi\rho(M).$$

Consideriamo allora una successione ordinata di superfici gaussiane

$$\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_k, \dots,$$

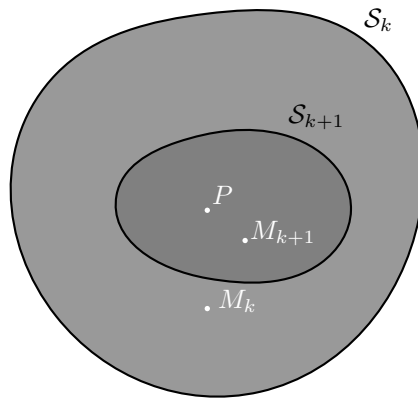


Figura 1.11: Due superfici di una famiglia che si contrae in un punto P

*Più precisamente, il diametro delle regioni \mathcal{V}_k tende a zero. Questa condizione implica che il volume tende a zero ma esclude, per esempio, una famiglia di cilindri in cui l'altezza va a zero mentre il raggio di base resta costante.

tutte contenenti P , ognuna delle quali è propriamente inclusa nella regione delimitata dalla superficie precedente; inoltre i volumi $\Delta\mathcal{V}_k$, tendono a zero*. Nella figura 1.11 sono mostrate due superfici successive di indici $k, k+1$ e i corrispondenti punti M_k, M_{k+1} . Ovviamente, la successione dei punti M_k tende al punto P

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_k = P,$$

e perciò

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\oint_{S_k} \vec{E} \cdot \hat{n} ds}{\Delta\mathcal{V}_k} = 4\pi \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(M_k) = 4\pi\rho(P).$$

Dal momento che l'ultimo membro non dipende dalla particolare successione di superfici S_k , ma solo dal punto P , anche il primo membro sarà una ben definita funzione della posizione. Si può quindi definire[†] l'operatore locale *divergenza* del campo

[†]Naturalmente questa definizione non si applica solo al campo elettrico ma a qualsiasi campo vettoriale per cui il limite converge.

$$\text{div } \vec{E}(P) \equiv \lim_{\Delta\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} ds}{\Delta\mathcal{V}}, \quad (1.22)$$

e scrivere la forma locale della legge di Gauss

$$\text{div } \vec{E}(P) = 4\pi\rho(P), \quad (1.23)$$

valida in ogni punto P dello spazio in cui la distribuzione di carica è descritta da una densità di volume continua.

Il significato intuitivo della definizione di divergenza è piuttosto trasparente: la divergenza di un vettore rappresenta il flusso per unità di volume che 'esce' dal punto P . Particolarmente suggestivo è il caso del campo di velocità di un fluido: qui la divergenza misura la quantità di fluido che sgorga (per unità di tempo e per unità di volume) da P .

Dal punto di vista matematico la definizione di divergenza sembra implicare un calcolo piuttosto complicato, ma in realtà, rappresentando il campo vettoriale mediante le componenti rispetto a un sistema di coordinate si ottengono espressioni piuttosto semplici. Supponiamo per esempio che \vec{E} sia dato attraverso le componenti (E_x, E_y, E_z) rispetto a tre assi cartesiani. Prendiamo come superficie gaussiana un parallelepipedo di spigoli $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, come mostrato in figura 1.12. In figura sono ombreggiate le facce perpendicolari all'asse \hat{x} . Osserviamo che le normali uscenti da queste facce sono una concorde e l'altra discorde con il verso dell'asse \hat{x} . Di conseguenza $\vec{E} \cdot \hat{n} ds$ vale $E_x dS$ su una faccia e $-E_x dS$ sull'altra. Calcolando il campo al centro di ciascuna faccia e tenendo conto che $dS = \Delta y \Delta z$, il flusso uscente dalle facce considerate si esprime allora come

$$(E_x(x + \Delta x/2, y, z) - E_x(x - \Delta x/2, y, z)) \Delta y \Delta z.$$

Un attimo di riflessione porta subito a concludere che i flussi uscenti dalle altre due coppie di facce, perpendicolari agli assi \hat{y} e \hat{z} , ammettono delle

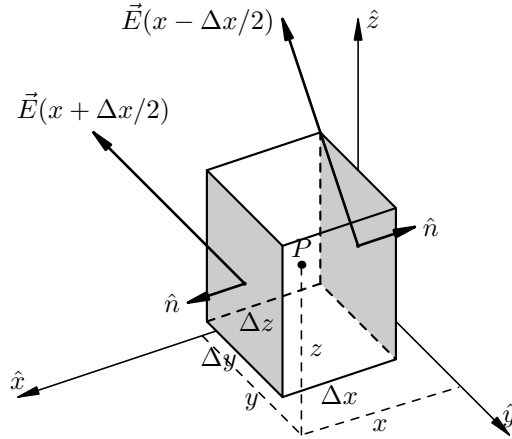


Figura 1.12: Calcolo della divergenza in coordinate cartesiane

espressioni identiche a parte lo scambio di ruoli tra le variabili x , y e z . Poiché il volume del parallelepipedo è $\Delta x \Delta y \Delta z$ si ha

$$\operatorname{div} \vec{E} = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{E_x(x + \Delta x/2, y, z) - E_x(x - \Delta x/2, y, z)}{\Delta x} + \frac{E_y(x, y + \Delta y/2, z) - E_y(x, y - \Delta y/2, z)}{\Delta y} + \frac{E_z(x, y, z + \Delta z/2) - E_z(x, y, z - \Delta z/2)}{\Delta z} \right).$$

Ricordando la definizione di derivata parziale il limite si calcola immediatamente e si ottiene in definitiva

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (1.24)$$

Questa espressione della divergenza in coordinate cartesiane induce a introdurre un operatore di derivata vettoriale ∇^\dagger definito come

[†] Leggi ‘nabla’

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

mediante il quale la divergenza si può indicare simbolicamente come un prodotto scalare

$$\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E}.$$

Questa notazione, molto usata in letteratura, ha il merito di rendere evidente che la divergenza di un vettore è uno scalare che si esprime per mezzo delle derivate delle componenti del vettore. In questo libro non farò uso della notazione basata sull’operatore ∇ per evitare il rischio che la (1.24) possa essere recepita dal lettore come la definizione della divergenza che è invece data dalla (1.22). Anche se la divergenza di un vettore si può esprimere mediante le derivate delle componenti in un sistema di coordinate, essa va *pensata* come un flusso per unità di volume, del tutto

indipendentemente dalla scelta di un sistema di coordinate. Ovviamente per *calcolare* la divergenza la (1.24) è assai utile. Anzi conviene conoscere le espressioni per la divergenza anche in altri sistemi di coordinate. Per gli scopi di questa trattazione sarà sufficiente fornire le espressioni della divergenza in coordinate cilindriche e sferiche.

a) *Coordinate cilindriche*: Indicando con (r, z, ϕ) le coordinate di un punto e con \vec{A} un campo vettoriale si ha

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (1.25)$$

b) *Coordinate sferiche*: Indicando con (r, θ, ϕ) le coordinate di un punto e con \vec{A} un campo vettoriale si ha

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}. \quad (1.26)$$

La dimostrazione di queste formule, che si può ottenere con un procedimento del tutto simile a quello esposto per le coordinate cartesiane, non è di particolare interesse nel presente contesto e verrà omessa⁶.

In conclusione, la legge di Gauss, in tutti i punti in cui il campo elettrico è derivabile, da luogo alla seguente relazione locale tra il campo e la carica

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho. \quad (1.27)$$

Questa equazione costituisce la relazione fondamentale tra campo elettrico e carica elettrica e rappresenta il primo passo nella eliminazione dell'azione a distanza nella descrizione delle interazione tra cariche.

Esercizi

1) Dimostrare che la divergenza di un campo uniforme è zero usando la definizione intrinseca (1.22). Scegliendo gli assi in maniera appropriata ottenere la stessa dimostrazione usando le formule per i tre sistemi di coordinate discussi nel testo.

2) Stesso problema per il campo coulombiano. Dire perché la divergenza è definita in tutto lo spazio escluso il punto dove si trova la carica.

3) Verificare, facendo i calcoli in coordinate cartesiane e sferiche, che il campo prodotto da una palla uniformemente carica, discusso nel paragrafo precedente, soddisfa la legge di Gauss. In quale sistema di coordinate i calcoli sono più semplici?

*Ovviamente 'radiale' qui va inteso rispetto all'asse \hat{z} e non rispetto all'origine.

4) In un sistema di coordinate cilindriche la componente radiale* del campo elettrico è espressa dalla formula

$$E_r = \begin{cases} \frac{2k}{a^2} r & \text{per } r \leq a \\ \frac{2k}{r} & \text{per } r \geq a \end{cases}$$

dove k e a sono due costanti. Le componenti E_z e E_ϕ sono nulle. Determinare la distribuzione di carica che genera questo campo. Qual'è il significato fisico di k ?

⁶Per la dimostrazione si può consultare: A. Ramsey, *Electricity and Magnetism*, Cambridge University Press (1960).

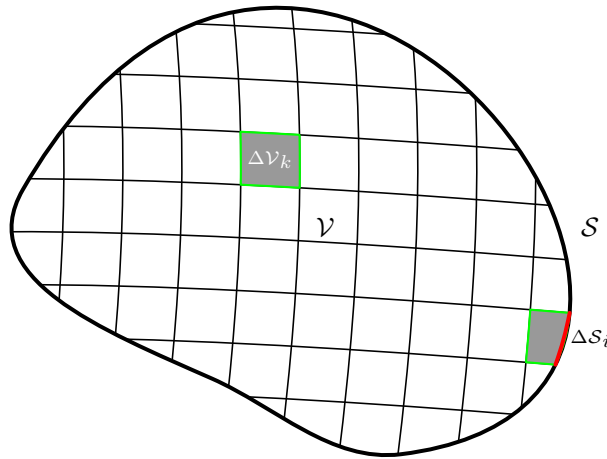
1.6.1 Il teorema della divergenza

La nozione di divergenza interviene in un'importante identità matematica, nota come teorema della divergenza o teorema di Gauss, che avremo occasione di utilizzare in seguito: se \mathcal{V} è la regione dello spazio delimitata dalla superficie \mathcal{S} risulta

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \hat{n} ds \equiv \int_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{E} dv, \quad (1.28)$$

per qualsiasi vettore \vec{E} sufficientemente regolare perché $\text{div } \vec{E}$ sia definita in tutti i punti della regione \mathcal{V} .

La dimostrazione è semplice: l'integrale di volume a secondo membro è la somma dei contributi calcolati per una arbitraria suddivisione in celle 'piccole' della regione \mathcal{V} :

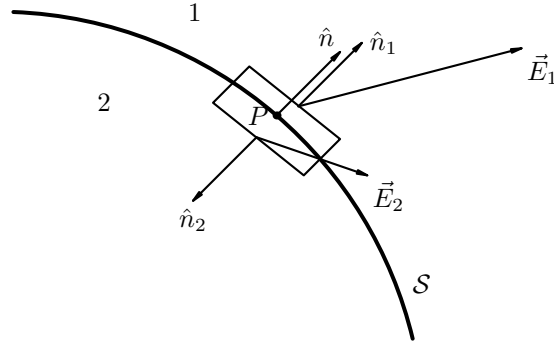


Per definizione di divergenza, il contributo della generica cella ΔV_k è uguale alla somma dei flussi uscenti dai setti che separano la cella k -esima da quelle adiacenti (nella figura schematica in due dimensioni evidenziati con colore verde) o da elementi di frontiera appartenenti a \mathcal{S} (vedi la cella i -esima); nella somma su tutte le celle ogni setto di separazione tra due celle adiacenti compare due volte con versi opposti della normale, per cui tutti i flussi si sommano a zero; restano quindi solo i contributi al flusso degli elementi appartenenti alla frontiera, come ΔS_i evidenziato in rosso, la cui somma è appunto il flusso uscente da \mathcal{S} .

1.6.2 Forma locale per cariche di superficie

La (1.27) è valida soltanto nei punti in cui il campo elettrico è privo di singolarità. In precedenza abbiamo visto vari esempi in cui il campo non è definito in qualche punto. Ciò avviene sempre quando vi sono cariche 'concentrate' come distribuzioni di superficie, di linea o cariche puntiformi. In questi casi la legge di Gauss fornisce ancora una relazione locale tra campo e carica ma di forma diversa dalla (1.27).

Consideriamo dapprima il caso di cariche di superficie. Nello studio del campo di un disco (pagina 18) e del campo di una superficie sferica (pagina 30) abbiamo constatato la presenza di una discontinuità a salto nei punti in cui vi è la carica.



Nella figura è rappresentata schematicamente una arbitraria distribuzione con densità σ su una superficie \mathcal{S} (la figura, per semplicità di disegno, è in ‘sezione’: la superficie è rappresentata dalla curva a tratto grosso; chiedo al lettore un piccolo sforzo di immaginazione). P è un punto qualsiasi della superficie e \hat{n} la normale a \mathcal{S} in P orientata con un verso scelto ad arbitrio. Converrò di chiamare zona 1 la regione verso cui punta \hat{n} , zona 2 quella dalla parte opposta. Il rettangolo tracciato con una linea sottile rappresenta (in sezione) un cilindro, con le basi parallele a \mathcal{S} , che adotteremo come superficie gaussiana. Il cilindro è schiacciato con l’altezza molto più piccola del diametro delle basi e quindi il contributo al flusso della superficie laterale può essere trascurato rispetto a quello delle basi. Inoltre, indicando con A l’area delle basi, in vista del fatto che il cilindro si contrae nel punto P , il flusso attraverso queste può essere espresso come

$$\vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1 A + \vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2 A,$$

dove \vec{E}_1 e \vec{E}_2 indicano i valori limite del campo in P dalle due parti della superficie. La carica contenuta nel cilindro (sempre nella stessa approssimazione) è ovviamente $\sigma(P)A$ e quindi dalla legge di Gauss si ha

$$\vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1 + \vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2 \approx 4\pi\sigma,$$

con un’approssimazione tanto migliore quanto più piccola è la superficie A . Osserviamo ora che $\hat{n} = \hat{n}_1 = -\hat{n}_2$ e indichiamo con $(E_n)_1$ e $(E_n)_2$ i limiti in P di $\vec{E} \cdot \hat{n}$ dalla zona 1 e dalla zona 2; la formula scritta sopra conduce a

$$(E_n)_1 - (E_n)_2 = 4\pi\sigma. \quad (1.29)$$

È questa l’espressione locale della legge di Gauss nei punti in cui è presente una densità di carica superficiale. La verifica che questa legge generale è soddisfatta nei due casi citati sopra, del disco e della sfera carica, è immediata.

IN UNITÀ SI

$$(E_n)_1 - (E_n)_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Nel caso di distribuzioni di carica lineari o puntiformi, il campo elettrico diverge; forme locali della legge di Gauss possono essere date anche in questi casi come andamenti asintotici del campo, ma, dal momento che non ne avremo bisogno, non le presentiamo.

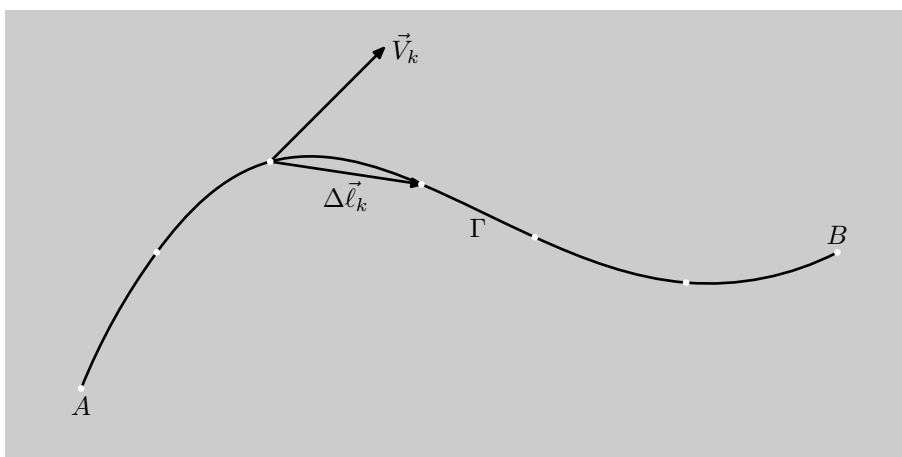
Capitolo 2

Potenziale

Nella discussione della legge di Gauss è stata evidenziata in vari punti la non completa equivalenza con la legge di Coulomb. Mentre la legge di Gauss, sia nella forma integrale che nelle varie forme locali, viene dimostrata partendo dalla legge di Coulomb il viceversa non è possibile. L'elemento che manca per l'implicazione inversa è la simmetria sferica del campo coulombiano. In questo paragrafo viene dimostrata una seconda proprietà del campo elettrostatico che dipende specificamente dalla centralità dell'interazione, e che insieme alla legge di Gauss permette di dedurre la legge di Coulomb. In questo contesto verrà anche discussa la nozione di potenziale elettrico che è di grande importanza sia teorica che applicativa.

2.1 Campi conservativi

Richiamiamo in primo luogo la nozione di integrale di linea di un vettore; dato un campo vettoriale \vec{V} e una curva Γ avente come estremi i punti A e B operiamo una suddivisione di Γ in n archi. Indichiamo con $\Delta\vec{\ell}_k$ il vettore che unisce gli estremi del generico arco come mostrato in figura.



\vec{V}_k indica il valore assunto da \vec{V} in un punto qualsiasi dell'arco k -esimo. L'integrale di linea di \vec{V} lungo Γ da A a B è definito come

$$(\Gamma) \int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{\ell} \equiv \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \vec{V}_k \cdot \Delta\vec{\ell}_k, \quad (2.1)$$

dove il limite è calcolato facendo tendere a zero la massima lunghezza $\Delta\ell$ dei segmenti $\Delta\ell_k$. Nel caso in cui \vec{V} è una forza, questa è la definizione di lavoro familiare dalla meccanica, ma la nozione geometrica di integrale di linea è applicabile a qualsiasi campo vettoriale. Ovviamente, l'integrale di linea di un vettore dipende in generale *sia* dai punti A e B , *sia* dalla curva Γ . Inoltre, fissata la curva Γ , segue immediatamente dalla definizione che

$$(\Gamma) \int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = -(\Gamma) \int_B^A \vec{V} \cdot d\vec{\ell}.$$

Particolarmente importante è l'integrale di linea lungo una curva chiusa; in questo caso, per indicare l'integrale adotteremo un simbolo leggermente diverso perché una curva chiusa non ha punti estremi. Se \mathcal{C} è una curva chiusa indicheremo l'integrale di linea lungo la curva con il simbolo

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell}.$$

Si tenga ben presente che una curva è una varietà orientabile (si possono scegliere due opposti versi di percorrenza su \mathcal{C}) e che il segno dell'integrale dipende appunto dall'orientazione scelta. L'integrale di un vettore lungo una curva chiusa e orientata prende il nome di *circuitazione* e risulta, al pari del flusso uscente da una superficie chiusa, una delle proprietà che caratterizzano un campo vettoriale. Un campo vettoriale può avere circuitazione nulla senza essere identicamente nullo, anzi è di interesse lo studio dei campi irrotazionali:

un campo vettoriale \vec{V} si dice *irrotazionale* se per qualsiasi curva chiusa \mathcal{C} la circuitazione è nulla:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = 0. \quad (2.2)$$

Un campo irrotazionale che dipende solo dalla posizione (e non dal tempo) si dice *conservativo*

La nozione introdotta ha un significato puramente geometrico e si applica a qualsiasi campo vettoriale. Il termine irrotazionale fa riferimento al moto dei fluidi[†], mentre il termine conservativo dovrebbe essere già familiare al lettore dallo studio dei campi di forze in meccanica. A noi interessa il campo elettrico e quindi d'ora in avanti indicherò il campo vettoriale con \vec{E} ma il lettore non dovrebbe avere difficoltà a riconoscere quali degli enunciati sono indipendenti dalla natura fisica del campo ma hanno un significato esclusivamente geometrico. Resta comunque inteso che in tutto questo paragrafo si parla di campi dipendenti esclusivamente dalla posizione.

[†]Se il vettore velocità è irrotazionale, una qualsiasi porzione del fluido trasla senza ruotare.

2.1.1 Campi centrali

Un campo vettoriale \vec{E} si dice *radiale* rispetto a un centro O se in ogni punto P dello spazio esso ha la direzione della retta OP . Nel punto P definiamo il versore $\hat{r}(P)$ come il versore della direzione OP orientata nel verso che va da O a P . Nel seguito lascerò sottintesa la dipendenza da P e scriverò semplicemente \hat{r} . Un campo radiale si può quindi scrivere

$$\vec{E} = E_r(P)\hat{r}.$$

La componente radiale E_r (definita come al solito da $E_r = \vec{E} \cdot \hat{r}$) dipende dal punto P e sarà negativa o positiva secondo che \vec{E} punta verso O oppure dalla parte opposta.

Un campo radiale si dice *centrale* se $E_r(P)$ dipende esclusivamente dalla distanza r di P da O . Converrà essere pedanti: assumendo un sistema di coordinate sferiche con centro in O , un punto P è individuato dalle coordinate (r, θ, ϕ) e quindi scrivere $E_r(P)$ equivale a scrivere $E_r(r, \theta, \phi)$. Asserire che un campo è centrale significa che E_r non dipende da θ e ϕ , e quindi

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\hat{r}. \quad (2.3)$$

Con questa definizione risulta immediato che il campo di una carica puntiforme q è centrale con $E_r = q/r^2$. Ora si dimostra facilmente che ogni campo centrale è conservativo. Osserviamo che una curva può essere suddivisa in archi dalle intersezioni con una famiglia di sfere di centro O e raggi via via crescenti; se \mathcal{C} è chiusa, gli archi possono essere associati in coppie generate dalle stesse sfere come mostrato in figura 2.1 (per la soppressione di una dimensione spaziale le sfere appaiono come archi di cerchio). Si vede facilmente che i termini corrispondenti a questi due archi nella somma a secondo membro della (2.1) si cancellano. Infatti si ha

$$\vec{E}_1 \cdot \Delta \vec{\ell}_1 + \vec{E}_2 \cdot \Delta \vec{\ell}_2 = E_r(r)\hat{r}_1 \cdot \Delta \vec{\ell}_1 + E_r(r)\hat{r}_2 \cdot \Delta \vec{\ell}_2 = E_r(r)\Delta r - E_r(r)\Delta r = 0.$$

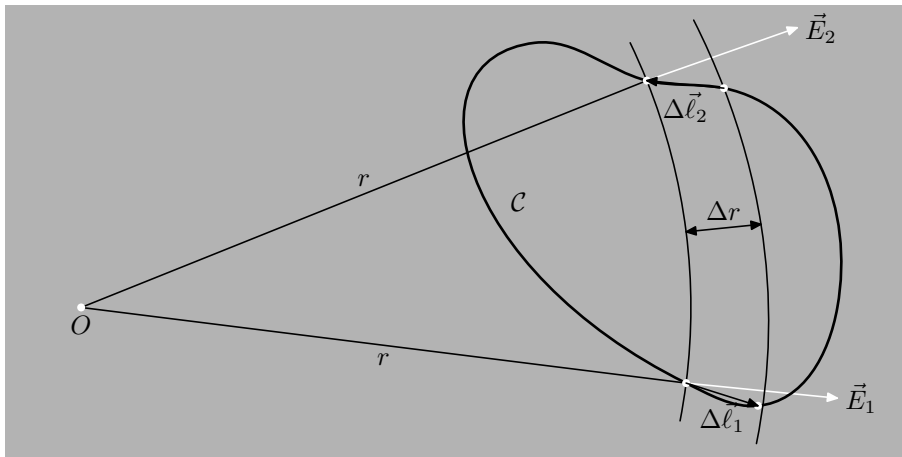


Figura 2.1: Un campo centrale ha circuitazione nulla.

Nel primo passaggio interviene la definizione (2.3) di campo centrale e il fatto che i due archi hanno la stessa distanza r dal centro O ; il secondo passaggio è immediato se si osserva che le componenti radiali di $\Delta\vec{\ell}_1$ e $\Delta\vec{\ell}_2$ in valore assoluto sono eguali alla differenza di raggio delle due sfere, mentre i segni sono opposti perché i vettori sono uno ‘entrante’ e l’altro ‘uscente’ dalle sfere. Dato che la somma (2.1) è costituita da tutte coppie di termini di questo tipo resta stabilito che un campo centrale è irrotazionale e in particolare che il campo elettrico di una carica puntiforme è conservativo.

Ancora più semplice è verificare che la somma di due campi conservativi è un campo conservativo. Infatti se

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Attenzione: nelle formule a lato, \vec{E}_1 e \vec{E}_2 , a differenza dei simboli adottati nella figura 2.1, indicano due campi prodotti da sorgenti *differenti* allora nello *stesso* punto.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C \vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell} + \oint_C \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell}.$$

La circuitazione della somma di due campi è eguale alla somma delle circuitazioni di ciascun campo. Pertanto se \vec{E}_1 e \vec{E}_2 hanno circuitazione nulla così è anche per la loro somma. L’affermazione si estende ovviamente al caso in cui \vec{E} è espresso come la somma di un numero arbitrario[†] di addendi. In virtù del principio di sovrapposizione (1.5) concludiamo quindi che:

[†]Naturalmente, in questo contesto non ci preoccupiamo di questioni di convergenza.

Il campo elettrico generato da una distribuzione qualsiasi di cariche in quiete è conservativo

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0. \quad (2.4)$$

Un’importante conseguenza della (2.4) è che, per distribuzioni di carica superficiali, la *componente tangenziale* di \vec{E} , contrariamente alla componente normale, è continua nell’attraversamento della superficie carica. Si definisce componente tangenziale \vec{E}_\perp a una superficie il vettore

Esercizio: Scegliendo un sistema di coordinate cartesiane con l’asse \hat{z} coincidente con \hat{n} , dimostrare che

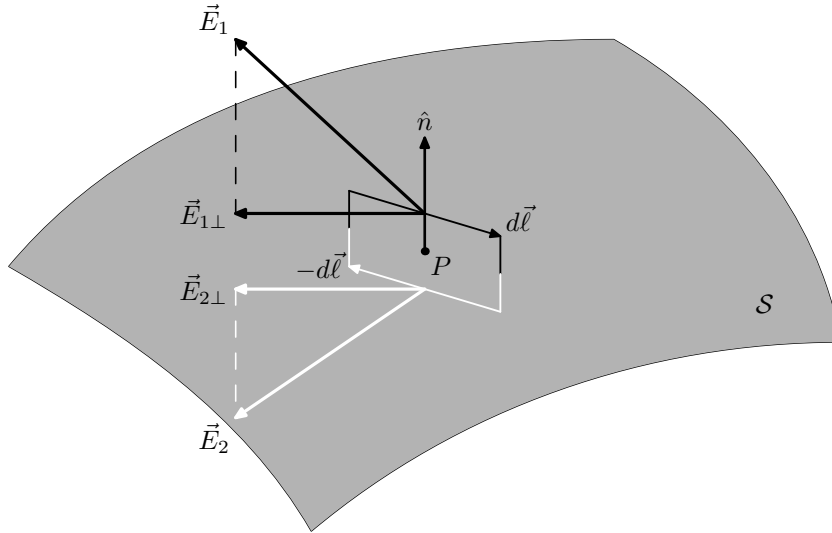
$$\vec{E}_\perp \equiv \hat{n} \times (\vec{E} \times \hat{n}), \quad (2.5)$$

$$\vec{E}_\perp \equiv (E_x, E_y, 0)$$

dove \hat{n} è la normale alla superficie (vedi figura 2.2). In effetti il termine ‘componente’ non è appropriato perché \vec{E}_\perp è un vettore e non uno scalare; spero mi venga perdonato questo piccolo abuso di terminologia. Il pedice \perp indica che la componente tangenziale è la proiezione di \vec{E} nel piano perpendicolare a \hat{n} (e tangente alla superficie) come si vede dalla figura 2.2. Come semplice esercizio, il lettore può verificare l’uguaglianza

$$\vec{E} = E_n \hat{n} + \vec{E}_\perp \quad (2.6)$$

Applichiamo ora la (2.4) a un rettangolo centrato intorno a un punto P di una superficie carica \mathcal{S} , costruito con due segmenti $d\vec{\ell}$ e $-d\vec{\ell}$ perpendicolari a \hat{n} e situati da parti opposte rispetto alla superficie; il rettangolo è completato da due segmenti perpendicolari alla superficie che sono infinitesimi rispetto a $d\ell$ e possono essere perciò trascurati nel calcolo della

Figura 2.2: Componenti tangenziali di \vec{E} su una superficie

circuitazione. Per facilitare l'interpretazione della figura, gli elementi situati al di sotto della superficie sono disegnati in bianco. Distinguendo con gli indici 1 e 2 le componenti di \vec{E} dalle parti opposte della superficie la condizione di irrotazionalità (2.4) si esprime

$$\vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell} + \vec{E}_2 \cdot (-d\vec{\ell}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell} = \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell}. \quad (\text{A})$$

Tenendo presente la decomposizione (2.6) e il fatto che $d\vec{\ell}$ è perpendicolare a \hat{n} si ottiene immediatamente

$$\vec{E}_{1\perp} \cdot d\vec{\ell} = \vec{E}_{2\perp} \cdot d\vec{\ell}.$$

Dal momento che $d\vec{\ell}$ ha direzione arbitraria nel piano tangente alla superficie l'uguaglianza scritta sopra può valere solo se

$$\vec{E}_{1\perp} = \vec{E}_{2\perp}. \quad (2.7)$$

Esercizio: Dimostrare che la (2.7) e la (1.29) sono equivalenti a

$$\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 4\pi\sigma\hat{n}. \quad (2.8)$$

Suggerimento: usare la (2.6).

Domanda: perché dalla uguaglianza (A) *non* si può dedurre che $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$?

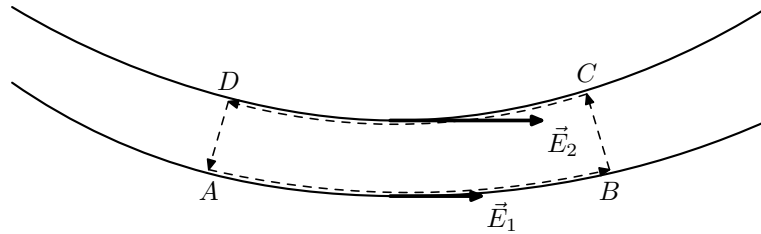
2.1.2 Legge di circuitazione e linee di flusso

La (2.4) implica che le linee di flusso del campo elettrico non possono essere chiuse. Infatti lungo una linea di flusso il prodotto $\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ ha sempre lo stesso segno, positivo se $d\vec{\ell}$ ha verso concorde con quello della linea di flusso, negativo in caso contrario. Di conseguenza l'integrale di linea di \vec{E} lungo una linea di flusso non può mai essere nullo. Se vi fossero linee di flusso chiuse, calcolando la circuitazione lungo una di queste linee avremmo una violazione della (2.4).

Dalla legge di circuitazione si ricava anche un'indicazione qualitativa sull'andamento dell'intensità del campo elettrostatico. Abbiamo già visto nel §1.5.3 che, spostandosi nella direzione del campo, l'intensità cresce o diminuisce secondo che le linee di flusso convergono o divergono; ora la (2.4) consente di stabilire che:

Muovendosi perpendicolarmente a \vec{E} l'intensità del campo cresce dalla parte dove la linea di flusso volge la concavità.

Per semplicità consideriamo una geometria piana: le due linee di flusso adiacenti nella figura sotto sono interamente contenute nel piano del foglio.



Calcoliamo la circuitazione del campo elettrico lungo il percorso chiuso tratteggiato nel senso indicato dalle frecce. I segmenti \overline{BC} e \overline{DA} non contribuiscono alla circuitazione perché sono perpendicolari al campo; invece, lungo gli archi \widehat{AB} e \widehat{CD} il campo è tangente e perciò $\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ vale $Ed\ell$ o $-Ed\ell$ secondo che il verso di percorrenza della curva sia concorde o discorde con quello della linea di flusso; dal momento che i due archi vengono percorsi in sensi opposti, l'annullamento della circuitazione implica

$$\int_A^B Ed\ell = \int_C^D Ed\ell.$$

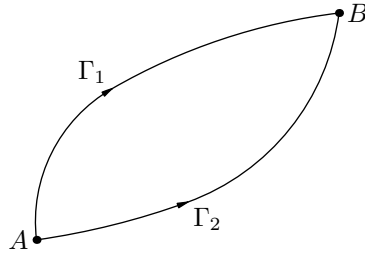
Scegliendo archi abbastanza corti e indicando con ℓ_1 , ℓ_2 le lunghezze di \widehat{AB} e \widehat{CD} possiamo scrivere

$$E_1\ell_1 = E_2\ell_2,$$

dove E_1 , E_2 sono le intensità del campo sulle due linee adiacenti. Dal momento che $\ell_2 < \ell_1$ risulta come asserito $E_2 > E_1$.

2.2 La funzione potenziale

Una conseguenza immediata della (2.4) è che l'integrale di linea tra due punti qualsiasi A e B di un campo conservativo è indipendente dalla curva Γ che unisce i due punti. Siano infatti Γ_1 e Γ_2 due diverse curve aventi A e B come estremi (vedi figura).



L'unione di due curve con gli stessi punti estremi costituisce una curva chiusa e per un campo conservativo si ha

$$\begin{aligned}
 0 &= \oint_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\
 &= (\Gamma_1) \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + (\Gamma_2) \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\
 &= (\Gamma_1) \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} - (\Gamma_2) \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}.
 \end{aligned}$$

L'ultima eguaglianza mostra appunto che non vi è differenza tra gli integrali di linea calcolati lungo due qualsiasi curve con gli stessi estremi. Ciò rende legittimo, nel caso di campi conservativi, scrivere l'integrale di linea senza indicare la curva lungo cui viene calcolato. La proprietà ha anche una importanza pratica, nei casi in cui si vuole effettuare esplicitamente il calcolo dell'integrale di linea di un campo specifico assegnato, perché consente di *scegliere* la curva Γ per cui il calcolo risulta più semplice.

Naturalmente l'integrale *dipende* dai punti estremi e la posizione

$$\varphi(P, K) \equiv \int_P^K \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad (2.9)$$

definisce una funzione φ delle due variabili (punti dello spazio) P e K . Ora, se si mantiene fissato l'estremo superiore K , si ottiene la funzione di *una sola* variabile

$$\varphi_K(P) = \varphi(P, K) = \int_P^K \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad (2.10)$$

che prende il nome di *funzione potenziale* del campo elettrostatico, riferita al punto K . La notazione introdotta serve a evidenziare il fatto che K è un *parametro*, arbitrario ma fissato. La funzione φ_K è un esempio di campo *scalare*, che associa a un punto P dello spazio il numero reale $\varphi_K(P)$.

Osserviamo che se nella (2.10) si sceglie un punto di riferimento differente K' , si ottiene una *diversa* funzione potenziale $\varphi_{K'}(P)$ della *stessa* variabile P ; abbiamo cioè una famiglia di funzioni 'etichettata' dal parametro K . La relazione tra le diverse funzioni della famiglia è estremamente semplice: due qualsiasi funzioni potenziale differiscono per una costante (indipendente da P). Siano infatti φ_K e $\varphi_{K'}$ due funzioni potenziale

riferite a due punti K e K' ; dalla definizione si ha

$$\begin{aligned}\varphi_{K'}(P) - \varphi_K(P) &\equiv \int_P^{K'} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} - \int_P^K \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_K^P \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_P^{K'} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_K^{K'} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}.\end{aligned}$$

L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che l'integrazione lungo una linea che porta da K a P seguita da una integrazione da P a K' equivale a un'unica integrazione da K a K' , e poiché l'integrale non dipende dal percorso il risultato è indipendente da P . Nota quindi *una* funzione potenziale, tutte le altre vengono ottenute aggiungendo una costante e scegliere un punto di riferimento K equivale a scegliere questa costante. Si osservi anche che $\varphi_K(K) = 0$, per cui la scelta di K corrisponde a scegliere lo zero del potenziale.

La situazione è del tutto analoga a quella, familiare, delle primitive di una funzione di una sola variabile reale; in un senso generalizzato, le funzioni potenziale sono, a meno del segno[†], le primitive del campo conservativo \vec{E} : la conoscenza di una funzione potenziale di \vec{E} consente di calcolare l'integrale di linea del campo tra due punti qualsiasi A e B mediante una formula identica (a parte il segno) a quella valida per le funzioni di una variabile. Per vederlo osserviamo che indicando con K un punto qualsiasi lungo un percorso qualsiasi che porta da A a B si può scrivere

$$\begin{aligned}\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= \int_A^K \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_K^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_A^K \vec{E} \cdot d\vec{\ell} - \int_B^K \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \varphi_K(A) - \varphi_K(B).\end{aligned}$$

Ovviamente lo stesso ragionamento vale per qualsiasi altro punto intermedio K' e cioè per qualsiasi altra funzione potenziale; d'altronde, siccome nella formula compare la differenza tra i valori che la funzione assume nei punti A e B , l'aggiunta di una costante a φ_K non altera l'eguaglianza. Possiamo quindi omettere il suffisso K e scrivere più semplicemente

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \varphi(A) - \varphi(B), \quad (2.11)$$

dove φ è una qualsiasi funzione potenziale. In generale, tutte le leggi dell'elettromagnetismo classico dipendono esclusivamente dalle *differenze* di potenziale, per cui non è mai necessario indicare esplicitamente il punto di zero. Comunque, più avanti vedremo che in genere è possibile una scelta naturale della costante additiva che, salvo esplicito avviso, viene universalmente adottata.

[†] Il cambiamento di segno è dovuto al fatto di aver definito φ come funzione dell'estremo inferiore, invece che dell'estremo superiore, dell'integrale di linea del campo elettrico. Questa scelta è frutto di un accidente storico.

Vediamo ora qualche esempio di funzione potenziale per alcune semplici configurazioni di campo.

a) Campo uniforme. Rispetto a un'origine arbitraria O , indichiamo con \vec{r} il vettore posizione del punto campo P , e con \vec{r}_K il vettore posizione del punto di zero del potenziale. Dalla definizione (2.10) si ha subito

$$\varphi(\vec{r}) \equiv \int_P^K \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \vec{E} \cdot \int_P^K d\vec{\ell} = \vec{E} \cdot \overrightarrow{PK} = \vec{E} \cdot (\vec{r}_K - \vec{r}).$$

Appare naturale scegliere lo zero del potenziale nell'origine dei vettori posizione; identificando K con O si ha

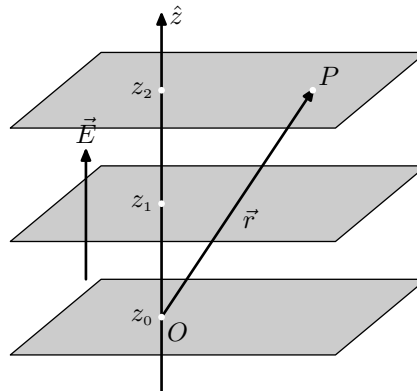
$$\varphi(P) = -\vec{E} \cdot \vec{r}. \quad (2.12)$$

L'interpretazione geometrica di questa formula è molto semplice: se si introduce un sistema di coordinate ortogonali con l'asse \hat{z} parallelo al campo, si ha $\vec{E} = E_z \hat{z}$, e l'espressione della funzione potenziale diventa

$$\varphi(x, y, z) = -E_z \hat{z} \cdot \vec{r} = -E_z z.$$

La funzione potenziale dipende solo dalla coordinata z ; perciò i piani perpendicolari all'asse \hat{z} sono '*superfici equipotenziali*'.

Nella figura accanto sono rappresentati con ombreggiature alcuni di questi piani che intersecano l'asse \hat{z} in z_0, z_1, z_2 . Per le funzioni del punto non è possibile disegnare un grafico come si fa per le funzioni di una sola variabile. Le *superfici di livello*, definite dall'equazione $\varphi(\vec{r}) = k$, dove k è un parametro, costituiscono un modo efficace di rappresentare l'andamento della funzione.



Un po di geometria: In generale, se \hat{n} è un versore arbitrario, l'equazione

$$\hat{n} \cdot \vec{r} = d, \quad (2.13)$$

individua un piano perpendicolare a \hat{n} ; la costante d determina la distanza del piano da O , misurata negativa o positiva secondo che \hat{n} punta verso l'origine o dalla parte opposta.

Esercizio: Trovare l'espressione del potenziale del campo elettrico dello strato piano (1.13) in funzione della distanza h dal piano.

Vale la pena di osservare che le formule scritte sopra valgono anche per la forza peso che è un campo uniforme. In questo caso φ è l'energia potenziale che viene usualmente indicata con U . Se \hat{z} è un'asse verticale diretto in alto, la componente della forza peso è $-mg$, e la (2.12) si riduce alla formula ben nota

$$U(z) = -\vec{P} \cdot \vec{r} = mgz.$$

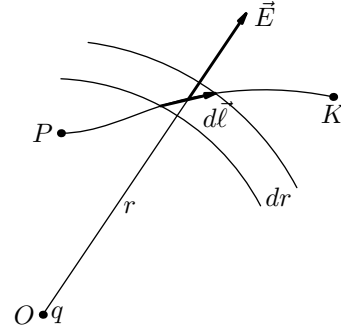
b) Campo coulombiano. Il calcolo dell'integrale nella (2.10) viene eseguito facilmente suddividendo una curva che va da P a K mediante una famiglia di sfere come già fatto in figura 2.1.

Osservando la figura a lato e tenendo presente l'espressione del campo coulombiano si vede subito che

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E_r \hat{r} \cdot d\vec{\ell} = \frac{q}{r^2} dr.$$

Indicando con r e r_K le distanze da O di P e K si ottiene

$$\varphi(P) = \int_r^{r_K} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{r} - \frac{q}{r_K}.$$



Ora non è possibile scegliere l'origine come punto di zero del potenziale, perché il termine $-q/r_K$ diverge quando K tende a O ; appare invece conveniente mandare K all'infinito, con che il potenziale coulombiano diventa semplicemente

$$\varphi(r) = \frac{q}{r}. \quad (2.14)$$

POTENZIALE
COULOMBIANO

Assumere il potenziale zero all'infinito è la scelta più naturale, e viene fatta ogni qual volta è possibile. Si noti però che non sempre questo è consentito; per esempio, nel caso del campo uniforme, se il punto di riferimento K va all'infinito, la (2.12) perde senso. La regola generale è molto semplice: il potenziale può essere preso nullo all'infinito solo quando il campo si annulla all'infinito; ciò è garantito quando tutte le cariche sono contenute in una regione limitata dello spazio. Questa condizione è soddisfatta sempre per distribuzioni di cariche reali, ma, come abbiamo già osservato in precedenza, considerare distribuzioni idealizzate (come lo strato piano illimitato) può risultare un'approssimazione conveniente per trattare problemi particolari.

Dalla (2.14) si vede subito che le superfici equipotenziali del campo coulombiano sono sfere con il centro nella carica. Inoltre φ ha dappertutto il segno di q e tende a $+\infty$ o $-\infty$, secondo che q sia positiva o negativa, quando $r \rightarrow 0$.

c) Campo di una carica di superficie su una sfera. Supponiamo la densità di carica σ uniforme come nell'esempio a pagina 30 e prendiamo anche in questo caso il potenziale zero all'infinito. Ricordiamo che il campo all'esterno della sfera è eguale al campo di una carica puntiforme pari alla carica totale della sfera. Indicando con $q = 4\pi a^2 \sigma$ questa carica totale si ha all'esterno della sfera ($r > a$) una espressione identica alla (2.14). Sulla superficie della sfera il potenziale, al contrario del campo, è definito e vale ovviamente q/a . Infine, poiché $\vec{E} = 0$ per $r < a$ tutti i punti interni alla sfera hanno lo stesso potenziale della superficie.

Riassumendo

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{q}{a} & \text{per } r \leq a \\ \frac{q}{r} & \text{per } r \geq a \end{cases} \quad (2.15)$$

In generale una distribuzione di carica di superficie non comporta singolarità della funzione potenziale perché, come nel caso di funzioni di una variabile, l'integrale di una funzione avente discontinuità a salto è una funzione continua degli estremi di integrazione.

Concludiamo questo paragrafo osservando che il potenziale dipende in maniera additiva dal campo; vale a dire che se φ_1 è la funzione potenziale di un campo \vec{E}_1 e φ_2 è la funzione potenziale di un campo \vec{E}_2 (ambedue le funzioni con lo zero nello stesso punto K) allora il campo

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

ha come funzione potenziale la somma delle funzioni potenziale

$$\varphi(P) = \int_P^K \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_P^K \vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell} + \int_P^K \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell} = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Ricordando allora l'espressione (1.5) del campo elettrico generato da una collezione di cariche puntiformi e la (2.14) si ha che il potenziale corrispondente è dato da

$$\varphi(P) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}, \quad (2.16)$$

dove r_i è la distanza di P dal punto dove è situata la carica q_i . La stessa cosa vale per una distribuzione continua di cariche. Per esempio per una distribuzione di volume con densità ρ , tenendo presente la (1.11) si ha

$$\varphi(P) = \int_V \frac{\rho(P')}{r} dv, \quad (2.17)$$

dove r è la distanza del punto campo P dal punto sorgente P' . Queste formule sono molto importanti perché forniscono delle espressioni generali del potenziale del campo elettrostatico; si tenga però ben presente che esse sono applicabili soltanto per distribuzioni di cariche contenute in una regione limitata dello spazio, in quanto sono state ottenute prendendo il potenziale nullo all'infinito.

In onore di Alessandro Volta l'unità di misura del potenziale nel sistema internazionale si chiama 'Volt', simbolo V, mentre nel sistema gaussiano viene chiamata 'statvolt'. Lascio come esercizio di verificare che

$$1 \text{ statvolt} \approx 300 \text{ V}.$$

2.3 L'operatore Gradiente

Nel paragrafo precedente abbiamo osservato che il potenziale di un campo vettoriale conservativo \vec{E} , svolge il ruolo di primitiva (con il segno cambiato) in quanto consente di calcolare l'integrale di linea del campo. Per le funzioni di una variabile, le primitive godono anche della proprietà che la derivata coincide con la funzione stessa. Una proprietà analoga vale anche per le funzioni potenziale: il campo vettoriale \vec{E} , nota la φ , può essere calcolato in un punto qualsiasi P attraverso un'operazione, che prende il nome di '*gradiente*', che differisce da una derivata ordinaria per il fatto di produrre un vettore a partire da un campo scalare.

Osserviamo in primo luogo che, in ogni punto P dello spazio, la direzione di \vec{E} è caratterizzata dall'essere perpendicolare alla superficie equipotenziale \mathcal{S} passante per P . Infatti, per un qualsiasi spostamento infinitesimo $d\vec{\ell}$, dalla (2.11) si ha

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -d\varphi,$$

dove $d\varphi$ è la differenza di potenziale tra gli estremi di $d\vec{\ell}$. Allora, indicando con $d\vec{\ell}_\perp$ uno spostamento nel piano tangente alla superficie \mathcal{S} , si ha ovviamente

$$d\varphi = 0 \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{\ell}_\perp = 0 \Rightarrow \vec{E}_\perp = 0. \quad (2.18)$$

Per determinare \vec{E} occorre dunque trovare la componente E_n del campo lungo la direzione \hat{n} normale alla superficie equipotenziale. Ora per uno spostamento lungo la normale si ha $d\vec{\ell}_\parallel = d\ell \hat{n}$ e quindi

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell}_\parallel = E_n d\ell = -d\varphi \Rightarrow E_n = -\frac{d\varphi}{d\ell}. \quad (2.19)$$

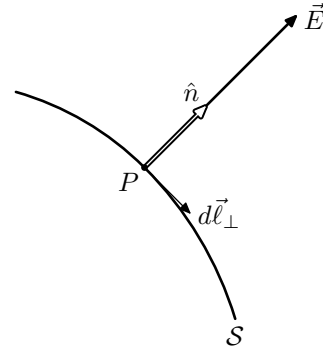
Il rapporto tra infinitesimi che compare nell'ultima uguaglianza ha il significato di una vera e propria derivata che prende il nome di *derivata direzionale* nella direzione \hat{n} . Credo sia opportuno richiamare questa nozione di Analisi Matematica. Nella discussione che segue, φ indica una funzione della posizione (non necessariamente il potenziale), abbastanza regolare da consentire tutte le operazioni analitiche appresso indicate. Dato un asse orientato qualsiasi - diciamo \hat{z} - passante per il punto P , definiamo la restrizione di φ a \hat{z} come la funzione $\varphi(Q)$ calcolata nei punti Q appartenenti all'asse. Dal momento che i punti dell'asse possono essere individuati univocamente mediante un'ascissa z , ($Q = Q(z)$), la restrizione di φ definisce la funzione di *una sola* variabile reale

$$f(z) \equiv \varphi(Q(z)).$$

La derivata ordinaria di $f(z)$ è appunto la derivata direzionale di φ nella direzione \hat{z} . Per indicare questa operazione adoperiamo il simbolo

$$\frac{d\varphi}{d\hat{z}} \equiv \frac{df}{dz}.$$

Notiamo, en passant, che in virtù della proprietà a lato, le linee di flusso dovranno intersecare perpendicolarmente le superfici equipotenziali.



Ora, se \hat{n} è un versore normale alla superficie di livello passante per P , definiamo il *gradiente di φ* come il vettore

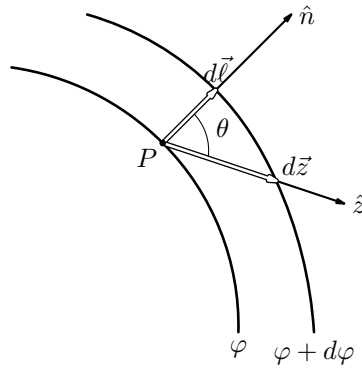
$$\text{grad } \varphi \equiv \frac{d\varphi}{d\hat{n}} \hat{n}. \quad (2.20)$$

La derivata in una direzione arbitraria, diversa da \hat{n} , è la componente del vettore gradiente lungo questa direzione; infatti, osservando la figura accanto, dove sono disegnate due superfici di livello che 'distano' di $d\varphi$ si vede che

$$\frac{d\varphi}{d\hat{z}} = \cos \theta \frac{d\varphi}{d\hat{n}}.$$

Dal momento che $\cos \theta = \hat{n} \cdot \hat{z}$, risulta appunto

$$\frac{d\varphi}{d\hat{z}} = \frac{d\varphi}{d\hat{n}} \hat{n} \cdot \hat{z} = (\text{grad } \varphi) \cdot \hat{z} = (\text{grad } \varphi)_z.$$



Quesito: La normale a una superficie può essere orientata in due versi opposti, ma il verso di $\text{grad } \varphi$ è univocamente determinato. Perché?

La definizione di gradiente data sopra è intrinseca, ma, come già fatto per l'operatore divergenza, conviene darne anche l'espressione nei più comuni sistemi di coordinate. In coordinate cartesiane, basta un attimo di riflessione per convincersi che le componenti del gradiente sono espresse in termini delle derivate parziali di $\varphi(x, y, z)$

$$\text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right). \quad (2.21)$$

COORDINATE
CARTESIANE

Anche per le coordinate cilindriche, $\varphi = \varphi(r, \phi, z)$, le derivate direzionali lungo \hat{r} , e \hat{z} coincidono con le derivate parziali rispetto a r e z ; per la componente lungo $\hat{\phi}$, invece, una variazione $d\phi$ della longitudine comporta uno spostamento $d\ell = r d\phi$ e perciò

$$\text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right). \quad (2.22)$$

COORDINATE
CILINDRICHE

Ragionando in maniera analoga, il lettore può facilmente calcolare come esercizio l'espressione in coordinate sferiche

$$\text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \right). \quad (2.23)$$

COORDINATE
SFERICHE

Queste formule sono molto utili nelle applicazioni ma, come osservato a proposito della divergenza, la definizione intrinseca in termini di derivata lungo la normale alla superficie equipotenziale consente assai meglio di farsi un'idea intuitiva del gradiente; in estrema sintesi il gradiente di uno scalare è un vettore che punta dove la funzione cresce più rapidamente e ha un modulo che misura la rapidità di questa variazione.

Tornando ora al caso specifico della funzione potenziale del campo elettrico, dalla (2.19) si ricava

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (2.24)$$

Conviene puntualizzare che il segno negativo in questa formula, comporta che il campo elettrico punta nel verso in cui il potenziale *decresce*.

Il fatto che, mediante la (2.24), il campo elettrico è univocamente determinato una volta che sia nota una funzione potenziale ha una grande importanza pratica nei casi in cui si voglia calcolare il campo prodotto da un'assegnata distribuzione di cariche; infatti la somma di termini scalari nella (2.16) o l'integrale nella (2.17), che forniscono la funzione potenziale, sono molto più semplici da calcolare delle corrispondenti espressioni del campo (1.5) o (1.11). Pertanto il calcolo del campo elettrico viene spesso eseguito determinando prima la funzione potenziale e applicando a questa l'operatore gradiente.

Tutte le formule di questo paragrafo sono valide in qualsiasi sistema di unità di misura. Pertanto le dimensioni del campo elettrico sono quelle di un potenziale diviso una lunghezza sia nel S.I. che nel sistema gaussiano. È consuetudine esprimere l'unità di misura di \vec{E} in termini di quella di φ , e quindi nel sistema gaussiano il campo viene dato in [statvolt/cm] e nel S.I. in [Volt/m]. Da qui è facile verificare che l'unità gaussiana è circa 3×10^4 volte più grande di quella del S.I.

2.4 Il problema generale dell'elettrostatica

Le due equazioni

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho \\ \vec{E} = -\text{grad } \varphi \end{cases}$$

che esprimono in forma locale la legge di Gauss e la legge di circuitazione contengono tutte le informazioni necessarie per determinare il campo elettrico generato da una distribuzione di cariche in quiete*. Di più, queste equazioni consentono di impostare in maniera matematicamente precisa problemi di elettrostatica in presenza di materia quando la distribuzione di carica non è nota a priori (vedi Cap. 3).

Cominciamo con l'osservare che sostituendo la seconda equazione nella prima si ottiene una equazione per la sola incognita φ :

$$\text{div}(\text{grad } \varphi) = -4\pi\rho \quad (2.25)$$

che viene chiamata equazione di Poisson. L'operatore a primo membro della (2.25) prende il nome di operatore di Laplace o laplaciano e viene indicato con il simbolo ∇^2 (leggi *nabla quadro*) e la (2.25) si scrive

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho. \quad (2.26)$$

Notiamo che ∇^2 è una derivata seconda che opera su uno scalare e produce uno scalare; dalle espressioni del gradiente e della divergenza in termini

* Se sono presenti cariche concentrate oltre all'equazione della divergenza occorre soddisfare anche le condizioni imposte dalle corrispondenti forme locali della legge di Gauss

di derivate parziali si ottengono facilmente le espressioni del laplaciano nei vari sistemi di coordinate. Consiglio, come esercizio, di verificare le seguenti formule:

- in coordinate cartesiane:

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \quad (2.27)$$

- in coordinate cilindriche:

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \quad (2.28)$$

- in coordinate sferiche:

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}. \quad (2.29)$$

Da queste espressioni risulta evidente che qualunque sia il sistema di coordinate utilizzato, l'equazione di Poisson è un'equazione differenziale a derivate parziali del second'ordine nell'incognita φ . Come sempre avviene per le equazioni differenziali le funzioni che soddisfano la (2.26) costituiscono una famiglia infinita. In altre parole in corrispondenza di una distribuzione di carica assegnata sono possibili innumerevoli funzioni potenziale. Infatti se $\bar{\varphi}$ è una soluzione dell'equazione di Poisson e w è soluzione dell'equazione omogenea associata:

$$\nabla^2 w = 0 \quad (\text{Eq. di Laplace}) \quad (2.30)$$

allora, per l'evidente linearità dell'operatore ∇^2 , anche

$$\varphi = w + \bar{\varphi},$$

è soluzione dell'equazione di Poisson. Ora l'equazione di Laplace (2.30) possiede una famiglia infinita di soluzioni che vengono chiamate funzioni *armoniche*. Per rendersi conto di quanto sia numerosa questa famiglia basta pensare che l'equazione di Laplace è soddisfatta da qualsiasi funzione potenziale in una regione priva di cariche. Qualche esempio: le funzioni della forma $\vec{a} \cdot \vec{r} + b$, con \vec{a} e b costanti arbitrarie, sono armoniche in tutto lo spazio; le funzioni c/r con c costante, sono armoniche in tutto lo spazio eccetto il punto $r = 0$ in cui il laplaciano non è definito.

Di solito non si richiede che la funzione potenziale soddisfi l'equazione di Poisson in tutti i punti dello spazio; infatti la presenza di cariche concentrate (di superficie, linea o puntiformi) implica l'esistenza di punti di singolarità in cui l'operatore laplaciano non è definito. Inoltre, nello studio di problemi concreti la densità di carica ρ è nota solo in una regione limitata dello spazio; al di fuori di tale regione l'equazione (2.26) vale perché esprime una legge fisica generale, ma non è utilizzabile in quanto

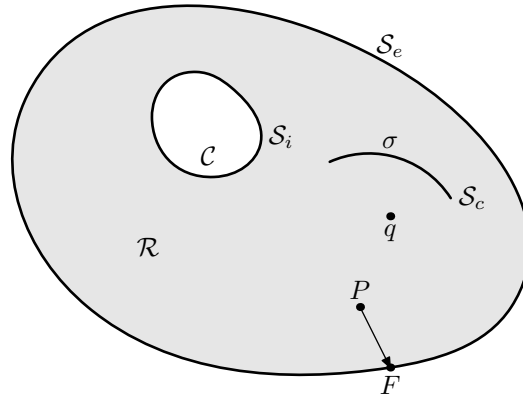


SIMÉON DENIS POISSON
1781 – 1840



PIERRE SIMON LAPLACE
1749 – 1827

il secondo membro non è noto. D'altra parte, in questi casi occorre soltanto conoscere il potenziale in una regione ben delimitata: in un pezzo di materia, all'interno di un laboratorio, nelle adiacenze di un pianeta etc. Dal punto di vista matematico, il problema che si pone è quello di risolvere l'equazione di Poisson in un dominio *aperto* nel senso topologico, vale a dire che non contiene la propria frontiera. Informazioni sull'andamento della funzione potenziale ai confini della regione di interesse che prendono il nome di '*condizioni al contorno*', vengono fornite da leggi fisiche specifiche del sistema che viene studiato; per esempio nel caso di esperimenti effettuati in laboratorio, come verrà mostrato nel prossimo capitolo, si può assumere potenziale nullo sulle pareti (incluso pavimento e soffitto) del laboratorio stesso. La determinazione della soluzione dell'equazione di Poisson con condizioni al contorno è il *problema generale dell'elettrostatica*.



A titolo di illustrazione, nella figura sopra è rappresentata una regione \mathcal{R} - ombreggiata - delimitata da una superficie esterna \mathcal{S}_e e da una interna \mathcal{S}_i che esclude la cavità \mathcal{C} . Nella regione \mathcal{R} è presente una carica di volume (eventualmente nulla), una carica di superficie σ su \mathcal{S}_c e una carica puntiforme q . Le superfici \mathcal{S}_e , \mathcal{S}_i , \mathcal{S}_c e il punto in cui è situata la carica q costituiscono la frontiera di \mathcal{R} , e non fanno parte del dominio. Ovviamente questo è solo un esempio: le cariche puntiformi possono essere più d'una o mancare del tutto, possono essere presenti cariche di linea, le cavità possono essere più di una o nessuna, la superficie esterna può andare all'infinito, etc.

Escludendo per il momento la presenza di cariche concentrate, assumiamo che in ogni punto F della frontiera di \mathcal{R} il valore della funzione potenziale sia noto. Indichiamo con $V(F)$ questa funzione che è definita su tutta la superficie che delimita \mathcal{R} (nell'esempio in figura l'unione di \mathcal{S}_e e \mathcal{S}_i). Dal momento che la funzione potenziale è continua deve risultare

$$\lim_{P \rightarrow F} \varphi(P) = V(F). \quad (2.31)$$

La determinazione della funzione φ che soddisfa l'equazione di Poisson (2.26) in \mathcal{R} , e la condizione al contorno (2.31) sulla frontiera di \mathcal{R} , è un



JOHANN PETER GUSTAV
LEJEUNE DIRICHLET
1805 – 1859

problema analitico noto come *problema di Dirichlet*. Lo studio di questo problema è stato uno dei temi classici della matematica dell'ottocento ed ha stimolato lo sviluppo di vaste aree dell'analisi. Ovviamente la discussione dettagliata di questo problema analitico non si può fare in una esposizione di fisica generale; per i nostri scopi è sufficiente citare il risultato essenziale che è la dimostrazione dell'esistenza ed unicità della soluzione del problema di Dirichlet, sotto ipotesi molto larghe sulla regolarità delle superfici di frontiera e della funzione $V(F)$.

Esistono anche situazioni sperimentali in cui sulle superfici di frontiera è nota la derivata normale del potenziale (e cioè la componente normale del campo elettrico); in questo caso abbiamo condizioni al contorno di Neumann

$$\lim_{P \rightarrow F} \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}}(P) = E_n(F). \quad (2.32)$$

Oppure può accadere che su qualche superficie è dato il potenziale e su qualcun'altra la derivata normale (problema misto, di cui vedremo un esempio nel capitolo 5). In tutti i casi si dimostra un teorema di esistenza e unicità, per cui possiamo parlare di esistenza e unicità della soluzione del problema generale dell'elettrostatica.

Il lettore può pensare che, dal momento che il campo elettrico è osservabile sperimentalmente, la dimostrazione dell'esistenza della soluzione del problema dell'elettrostatica sia un punto di scrupolo matematico che non interessa la fisica, ma non è così; il teorema dimostra che la legge di Gauss e la legge di circuitazione non sono logicamente incompatibili[†] e quindi possono essere entrambe valide proprietà del campo elettrostatico.

Il teorema di unicità ha poi l'importante implicazione che queste due leggi sono anche esaurienti: non occorre conoscere altro per caratterizzare univocamente il campo elettrico. Dell'unicità faremo grande uso in seguito; in mancanza dell'apparato matematico necessario per *calcolare* la soluzione di problemi di elettrostatica, sarà sufficiente *presentare* una funzione che verifica l'equazione di Poisson e le condizioni al contorno per essere sicuri che questa è *la* soluzione. Come esempio di questo modo di procedere risolviamo il problema dell'elettrostatica per una carica puntiforme q posta nell'origine O . Prendiamo come regione \mathcal{R} tutto lo spazio esclusa una cavità sferica di centro O e raggio a ; con riferimento alla figura di pagina 54, la superficie \mathcal{S}_e va all'infinito e quindi abbiamo come condizione al contorno

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi = 0.$$

Sulla sfera di raggio a , per la legge di Gauss deve essere

$$\int_{\mathcal{S}_i} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{S}_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}} ds = 4\pi q.$$

Infine, in tutto il dominio \mathcal{R} la densità di carica è nulla, e quindi la funzione potenziale deve soddisfare l'equazione di Laplace. Ora, si verifica subito che la funzione

$$\varphi = \frac{q}{r},$$

[†]Nel capitolo 9 vedremo un esempio di due leggi che 'sembrano funzionare' in molte condizioni sperimentali, ma non sono matematicamente compatibili.

soddisfa tutte queste condizioni e per il teorema di unicità è la soluzione cercata. Tenendo presente che il raggio a è arbitrario, la funzione q/r è la soluzione del problema dell'elettrostatica per una carica puntiforme in ogni punto distinto da O .

Con ciò resta stabilito che la legge di Gauss e la legge di circuitazione 'contengono' la legge di Coulomb. Più in generale, per una collezione di cariche puntiformi $q_1 \dots q_N$, si vede subito che la soluzione è data dalla (2.16). Da ciò si inferisce che per una distribuzione continua con densità ρ la soluzione dell'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho,$$

che si annulla all'infinito è data dalla (2.17):

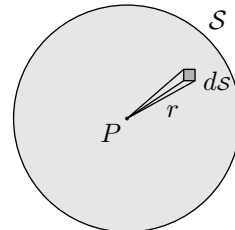
$$\varphi(P) = \int_V \frac{\rho(P')}{r} dV, \quad (2.33)$$

Questo risultato molto importante ci sarà utile in seguito. In sostanza la (2.33) fornisce la soluzione generale del problema di Dirichlet con condizione al contorno nulla all'infinito. Per condizioni al contorno su superfici al finito la soluzione può essere ottenuta in forma analitica solo per geometrie relativamente semplici; qualche esempio elementare verrà fornito nel prossimo capitolo. In generale si deve ricorrere ad approssimazioni mediante serie oppure a metodi numerici. Con l'attuale sviluppo dei calcolatori elettronici la precisione ottenibile nella determinazione della soluzione va al di là di quella richiesta da qualsiasi applicazione pratica. Da questo punto di vista il problema dell'elettrostatica può dirsi completamente risolto.

2.4.1 Prova dell'unicità della soluzione per il problema di Dirichlet

Questa dimostrazione è interessante perché si basa su una proprietà molto importante delle funzioni armoniche. Sia w una funzione armonica in una regione \mathcal{R} e P un punto interno a tale regione; consideriamo una sfera di centro P e raggio r tutta contenuta in \mathcal{R} e calcoliamo il valore medio di w sulla superficie \mathcal{S} della sfera:

$$\langle w \rangle_S \equiv \frac{1}{4\pi r^2} \oint_S w dS.$$



Dimostriamo che se $\nabla^2 w = 0$ in tutta la palla interna a \mathcal{S} allora:

$$w(P) = \langle w \rangle_S, \quad (2.34)$$

vale a dire che il valore medio di w sulla superficie di una sfera è eguale al valore di w al centro della sfera.

Osserviamo in primo luogo che usando coordinate polari con il centro in P si ha

$$\langle w \rangle_s = \frac{1}{4\pi} \oint_S w(r, \theta, \phi) \frac{dS}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \oint_\Omega w(r, \theta, \phi) d\Omega.$$

Il valore medio $\langle w \rangle_s$ dipende dal raggio della sfera *solo* attraverso la funzione integranda. Pertanto

$$\frac{d\langle w \rangle_s}{dr} = \frac{1}{4\pi} \oint_\Omega \frac{\partial w}{\partial r} d\Omega = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_S \frac{\partial w}{\partial r} dS.$$

Ora, poiché la direzione radiale coincide con la normale alla sfera, per la definizione di gradiente risulta:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \text{grad } w \cdot \hat{n},$$

e perciò, usando il teorema della divergenza,

$$\frac{d\langle w \rangle_s}{dr} = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_S \text{grad } w \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{4\pi r^2} \int_V \text{div}(\text{grad } w) dv = 0.$$

In conclusione $\langle w \rangle_s$ non dipende dal raggio della sfera; allora, considerando che

$$\lim_{r \rightarrow 0} \langle w \rangle_s = w(P),$$

si ottiene la (2.34).

Una conseguenza immediata di questa proprietà è che le funzioni armoniche non possono avere punti di estremo (massimo o minimo) relativo. Infatti se P è un punto di massimo (minimo) relativo per una funzione, per qualche conveniente valore di r in tutti i punti della superficie sferica di raggio r e centro P la funzione assume valori minori (maggiori) del valore che assume in P e la (2.34) non può valere. Pertanto una funzione armonica in una regione \mathcal{R} ha il massimo e il minimo (assoluti) sulla superficie che delimita \mathcal{R} ¹.

L'unicità della soluzione del problema di Dirichlet ora segue immediatamente; supponiamo che esistano due funzioni φ e ψ che soddisfano l'equazione di Poisson in \mathcal{R}

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho, \quad \nabla^2 \psi = -4\pi\rho,$$

e assumono lo stesso valore sulla frontiera di \mathcal{R} . Allora, la differenza $w = \varphi - \psi$ è armonica e si annulla sulla frontiera. Per la proprietà delle funzioni armoniche discussa sopra, il massimo e il minimo assoluti di w sono entrambi nulli e pertanto w è identicamente nulla in $\mathcal{R} \Rightarrow \varphi = \psi$.

¹Il potenziale è continuo sulla frontiera e quindi possiede certamente massimo e minimo assoluto.

2.5 Energia di un sistema di cariche

La forza $\vec{F} = q\vec{E}$, agente su una carica q in un campo esterno \vec{E} , è evidentemente conservativa e perciò ammette un'energia potenziale. Ricordiamo dalla meccanica che la differenza di energia potenziale tra due punti, A e B , è data dal lavoro che la forza \vec{F} compie lungo un qualsiasi percorso congiungente i due punti

$$\mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(B) \equiv \mathcal{L}_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = q(\varphi(A) - \varphi(B)).$$

Abbiamo quindi tra l'energia potenziale della carica q e la funzione potenziale del campo elettrico che su di essa agisce, la semplice relazione

$$\mathcal{U}(P) = q\varphi(P), \quad (2.35)$$

in ogni punto P dello spazio. L'energia potenziale, come la funzione potenziale, è determinata a meno di una costante additiva che dipende dalla scelta del punto di zero; infatti l'energia potenziale è la funzione potenziale della forza

$$\vec{F} = -\text{grad}\mathcal{U}.$$

La proporzionalità tra funzione potenziale e energia potenziale ha un'applicazione pratica nello studio di fenomeni microscopici, dalla scala molecolare in giù. In questo dominio, q è la carica elementare e (o un piccolo multiplo di e) e risulta allora conveniente introdurre una unità di misura dell'energia data dal prodotto della carica elementare per il potenziale unitario. Con questa unità, l'energia di una particella avente carica e viene misurata dallo stesso numero che misura il potenziale. Per tradizione, si assume come unità di potenziale il Volt e si definisce l'*elettronvolt* (eV) che vale

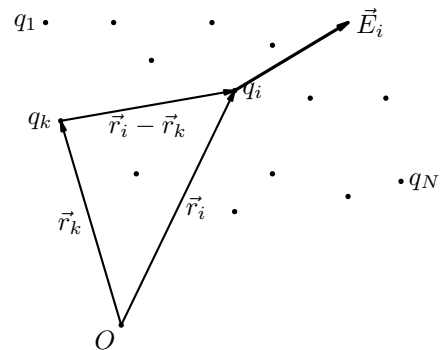
$$1 \text{ eV} \approx 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 1 \text{ V} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} = 1.6 \times 10^{-12} \text{ erg}.$$

Tornando alla discussione dei principi generali, consideriamo un sistema di cariche puntiformi; del punto di vista meccanico si tratta di un sistema di punti materiali interagenti attraverso le mutue forze coulombiane; ciascuna carica è soggetta a una forza determinata dal campo elettrico prodotto da tutte le altre cariche.

Indichiamo con $q_1 \dots q_N$ le cariche e con φ_i , $i = 1, \dots, N$, la funzione potenziale del sistema di tutte le cariche *esclusa* l' i -esima:

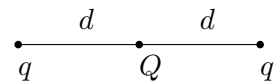
$$\varphi_i(\vec{r}) = \sum_{k \neq i}^N \frac{q_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|}.$$

Allora l'energia potenziale $\mathcal{U}_i(\vec{r}_i)$ della carica i -esima è



$$\mathcal{U}_i(\vec{r}_i) = q_i \varphi_i(\vec{r}_i) = q_i \sum_{k \neq i}^N \frac{q_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} = q_i \sum_{k \neq i}^N \frac{q_k}{r_{ik}}. \quad (2.36)$$

Dal momento che φ_i è armonica in tutto lo spazio, esclusi i punti \vec{r}_k ($k \neq i$) in cui diverge, non esistono punti di minimo relativo per l'energia potenziale \mathcal{U}_i ; pertanto non esistono posizioni di equilibrio stabile per la carica q_i . Ovviamente questa conclusione si può trarre per tutte le cariche del sistema e perciò per il sistema di cariche nel suo complesso: in base alle leggi dell'elettrostatica un sistema di punti materiali interagenti attraverso forze elettriche non può essere in equilibrio stabile. A illustrazione di questa affermazione consideriamo il sistema di cariche della figura a margine. Se la carica $Q = -q/4$ è posta nel punto medio del segmento che unisce le cariche q si verifica immediatamente che la forza agente su ciascuna carica è nulla: il sistema è in equilibrio. Tuttavia l'equilibrio è instabile; infatti, una qualsiasi perturbazione della configurazione che porta Q al di fuori del piano mediano del segmento che unisce le due cariche q fa nascere una forza che allontana ulteriormente Q dalla posizione di equilibrio: il destino di questo sistema è che Q si precipita verso una delle due cariche q mentre l'altra carica q viene respinta all'infinito. Propongo al lettore di fare un utile esercizio calcolando la carica Q da mettere al centro di un triangolo equilatero ai cui vertici si trovano tre cariche uguali a q , per cui il sistema è in equilibrio. Discutere inoltre le deformazioni rispetto alle quali la configurazione sviluppa instabilità.



La conclusione che abbiamo appena raggiunto fa sorgere un serio problema: dato che le forze elettriche sono le sole forze responsabili della formazione di atomi, molecole e cristalli come mai la materia è stabile? Dobbiamo dubitare della validità delle leggi dell'elettromagnetismo su scala microscopica? In effetti su scala atomica le leggi che abbiamo discusso risultano in pieno accordo con i dati sperimentali. La soluzione del problema della stabilità della materia è fornita dai principî della Meccanica Quantistica che sono indispensabili per la comprensione dei sistemi microscopici.

Usando la (2.36) possiamo calcolare facilmente l'energia potenziale totale di un sistema di cariche. Osserviamo che \mathcal{U}_i rappresenta l'energia che viene aggiunta al sistema di $N - 1$ cariche $q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_N$, quando la carica q_i viene portata dall'infinito nella posizione \vec{r}_i . Immaginiamo di aggregare il sistema di N cariche portandole dall'infinito alla posizione finale una alla volta. Per portare la carica q_1 in r_1 , mentre tutte le altre cariche sono all'infinito, non si fa alcun lavoro perchè la forza agente sulla carica è nulla². Una volta che la prima carica è al suo posto, portando q_2 in r_2 si aggiunge un'energia che a norma della (2.36), scritta per $N = 2$, è

$$U_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \mathcal{U}_2 = q_2 \frac{q_1}{r_{12}}.$$

²In linea di principio, questa affermazione è valida solo in condizioni statiche; in tutta la discussione di questo paragrafo si assume che il moto delle particelle avvenga con velocità e accelerazione infime.

Si noti la differenza tra il simbolo \mathcal{U}_k , energia della particella k in campo esterno, e U_n , energia del sistema di n particelle.

Su una terza carica q_3 agisce il campo generato da q_1 e q_2 e quindi l'incremento di energia (formula (2.36) per $N = 3$) sarà

$$\mathcal{U}_3 = q_3 \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right).$$

L'energia totale del sistema di tre cariche risulta perciò

$$U_3(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3 = \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}.$$

L'estensione al caso generale è immediata: l'energia potenziale di un sistema di con un numero arbitrario di cariche è la somma di termini del tipo $q_i q_k / r_{ik}$ estesa a tutte le coppie

$$U_N(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{\text{coppie}} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}. \quad (2.37)$$

È interessante notare che nell'espressione dell'energia compaiono solo le distanze relative tra le particelle, e perciò, se il sistema viene traslato o ruotato rigidamente, l'energia non cambia. Come sappiamo dalla meccanica, questa proprietà implica la conservazione della quantità di moto e del momento angolare del sistema.

Esercizio: Dimostrare che l'energia del sistema di tre cariche in equilibrio, discusso a pagina 59 è nulla. Mettere in relazione questo risultato con il fatto che Q non dipende dalla distanza d . Discutere anche il sistema di tre cariche uguali ai vertici di un triangolo equilatero, equilibrato da una carica Q al centro.

Il calcolo della somma sulle coppie nella (2.37) diventa molto oneroso al crescere del numero N delle particelle; infatti il numero delle coppie cresce come $N(N-1)/2$. Per N grande il calcolo diventa praticamente impossibile. Tuttavia, anche per il calcolo dell'energia, i sistemi con grande numero di particelle possono essere trattati con l'approssimazione delle distribuzioni continue di carica. Osserviamo in primo luogo che la somma sulle coppie può essere scritta come una doppia somma

$$U_N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k \neq i}^N \frac{q_i q_k}{r_{ik}}.$$

Un'attimo di riflessione dovrebbe bastare per convincersi che in questa espressione ogni coppia di indici compare esattamente due volte, il che spiega la presenza del fattore $1/2$. Ora con passaggi elementari si ha

$$U_N = \frac{1}{2} \sum_i q_i \left(\sum_{k \neq i} \frac{q_k}{r_{ki}} \right) = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i.$$

Questa espressione per l'energia di un sistema di cariche si estende immediatamente alle distribuzioni continue, di volume

$$U = \int_V \frac{1}{2} \rho \varphi \, dv, \quad (2.38)$$

e di superficie

$$U = \int_S \frac{1}{2} \sigma \varphi \, dS. \quad (2.39)$$

Dal momento che, sia per cariche di volume che di superficie, la funzione potenziale non presenta singolarità, nelle due formule scritte sopra φ rappresenta il potenziale dell'intera distribuzione di carica: a differenza del caso discreto, la funzione potenziale non diverge nella cella contenente la carica ρdV , e perciò non occorre escludere il contributo a φ della carica nella cella stessa.

Come esempio, calcoliamo l'energia di una carica distribuita uniformemente su una sfera di raggio a . Ricordando la (2.15), sulla superficie φ è uniforme e vale q/a ; dalla (2.39) si ottiene subito

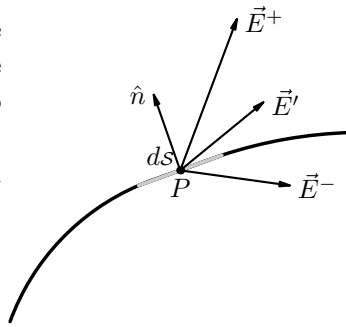
$$U = \frac{1}{2} \frac{q}{a} \int_S \sigma dS = \frac{q^2}{2a}. \quad (2.40)$$

L'energia è tanto maggiore quanto minore è il raggio della sfera, e tende all'infinito nel limite $a \rightarrow 0$. Per questo motivo non è possibile ottenere una carica puntiforme comprimendo una carica distribuita.

2.6 Energia del campo elettrostatico

In assenza di singolarità, l'energia di un sistema di cariche può essere espressa per mezzo del campo da esse generato. Prendiamo come esempio proprio la distribuzione di superficie uniforme su una sfera e immaginiamo di comprimere il raggio da a a $a - da$. Per far questo occorre applicare su ciascun elemento dS della superficie una forza $d\vec{F}$ opposta alla forza repulsiva esercitata sulla carica $dq = \sigma dS$ che sull'elemento risiede, da tutte le altre cariche della distribuzione. Per calcolare questa forza repulsiva non si può semplicemente moltiplicare dq per il campo elettrico prodotto dall'intera distribuzione di carica. Infatti sappiamo dalla (1.29) che \vec{E} ha una discontinuità proprio sulla superficie. In effetti, la determinazione della forza su una carica di superficie, è un problema di carattere generale al quale si può dare una soluzione generale. Per un'arbitraria distribuzione di densità σ su una superficie generica S indichiamo con \vec{E}^+ e \vec{E}^- i valori limite del campo elettrico sulla pagina positiva e su quella negativa rispetto a una normale \hat{n} (vedi figura sotto). Per determinare la forza agente sulla carica $dq = \sigma dS$ posta sull'elemento dS occorre determinare il campo \vec{E}' prodotto da tutte le cariche *esclusa* la carica dq ; dal momento che il contributo al campo totale della carica su dS si può esprimere come il campo di un disco (vedi eq. 1.13) si ha

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}^+ &= \vec{E}' + 2\pi\sigma\hat{n} \\ \vec{E}^- &= \vec{E}' - 2\pi\sigma\hat{n} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{E}' = \frac{\vec{E}^+ + \vec{E}^-}{2}$$



Il risultato è molto intuitivo: dato che la discontinuità del campo totale è interamente dovuta al contributo della carica su dS , calcolando la semisomma dei valori limite sulle due pagine della superficie si ottiene

il campo senza singolarità dovuto alle altre cariche. Nell'esempio che stiamo studiando risulta

$$\vec{E}^+ = 4\pi\sigma\hat{r} \quad \text{e} \quad \vec{E}^- = 0.$$

Perciò la forza repulsiva agente sull'elemento di superficie dS è

$$d\vec{F} = 2\pi\sigma^2 dS\hat{r}, \quad (2.41)$$

e il lavoro di 'compressione' per l'intera superficie si scrive

$$dW = 2\pi\sigma^2 S da = 2\pi\sigma^2 d\nu,$$

dove $d\nu$ è il volume della corona sferica di raggi $a - da$ e a (vedi figura 2.3). Osserviamo che il campo elettrico all'esterno della sfera di raggio

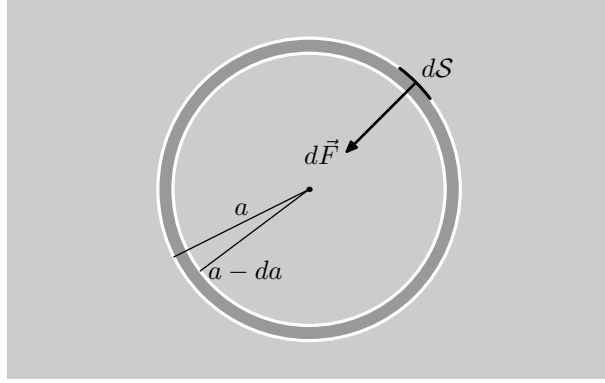


Figura 2.3: Compressione di una sfera carica.

a (zona grigia in figura) è lo stesso prima e dopo la compressione (vedi la Figura 2.3); lo stesso vale per il campo elettrico all'interno della sfera di raggio $a - da$ dove il campo è nullo. Perciò l'unico risultato della compressione è quello di creare il campo $E = 4\pi\sigma$ nella corona con ombreggiatura più scura in figura. Ora, esprimendo σ in funzione di E , si ha per la differenza di energia tra le due configurazioni

$$dU = dW = 2\pi \left(\frac{E}{4\pi} \right)^2 d\nu = \frac{E^2}{8\pi} d\nu.$$

Questa formula mostra che per produrre un campo di intensità E in una cella di volume $d\nu$ occorre un'energia proporzionale al volume secondo il fattore

$$u = \frac{E^2}{8\pi}. \quad (2.42)$$

Le dimensioni di u sono ovviamente quelle di energia per unità di volume e ciò giustifica la denominazione di '*densità di energia*' del campo elettrico. L'idea sottintesa da questa terminologia è che il lavoro compiuto sulle cariche venga accumulato come *energia del campo elettrico*,

per cui l'energia totale del sistema di cariche si può esprimere in termini del campo da esse prodotto

$$U = \int \frac{E^2}{8\pi} dv, \quad (2.43)$$

dove l'integrale senza suffisso, come d'uso in Analisi, si intende esteso a tutto lo spazio (o perlomeno a tutta la regione in cui \vec{E} non è nullo).

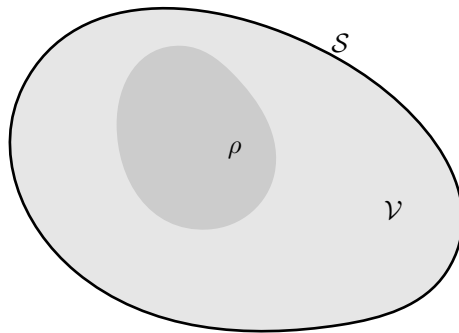
A titolo di esempio e verifica calcoliamo con questa formula l'energia totale di una carica q distribuita uniformemente sulla superficie di una sfera di raggio a :

$$U = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dv$$

$$U = \int \frac{E^2}{8\pi} dv = \frac{1}{8\pi} \int_a^\infty \left(\frac{q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \frac{q^2}{a}, \quad (2.44)$$

in accordo con la (2.40) del paragrafo precedente.

L'espressione (2.43) dell'energia in termini di campo è valida anche per le distribuzioni di carica di volume. Per vederlo, osserviamo in primo luogo che il dominio di integrazione \mathcal{V} nella (2.38) può essere allargato a una qualsiasi regione che contiene interamente la distribuzione di carica; infatti, aggiungendo al dominio celle in cui la densità ρ è nulla non si altera il valore dell'integrale. La geometria è illustrata nella figura sotto



Mediante la legge di Gauss, $\rho = \text{div } \vec{E}/4\pi$, si può eliminare la densità di carica dalla (2.38):

$$U = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{8\pi} (\text{div } \vec{E}) \varphi dv.$$

Ora utilizzando la semplice identità vettoriale (che il lettore può facilmente verificare valendosi dell'espressione cartesiana degli operatori differenziali)

$$\text{div}(\varphi \vec{E}) \equiv \text{grad } \varphi \cdot \vec{E} + \varphi (\text{div } \vec{E}), \quad (2.45)$$

si ha

$$(\text{div } \vec{E}) \varphi = -\text{grad } \varphi \cdot \vec{E} + \text{div}(\varphi \vec{E}) = E^2 + \text{div}(\varphi \vec{E}).$$

Sostituendo nell'integrale risulta

$$U = \int_{\mathcal{V}} \frac{E^2}{8\pi} dv + \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{V}} \text{div}(\varphi \vec{E}) dv = \int_{\mathcal{V}} \frac{E^2}{8\pi} dv + \frac{1}{8\pi} \oint_S (\varphi \vec{E}) \cdot d\vec{S}.$$

Nell'ultimo passaggio si è fatto uso del teorema della divergenza per trasformare il secondo integrale di volume nel flusso del vettore $\varphi \vec{E}$ uscente dalla superficie \mathcal{S} . Osserviamo ora che la funzione integranda nell'integrale di volume è non negativa (positiva dove il campo non è nullo) e perciò, facendo espandere la regione \mathcal{V} , il primo termine nell'espressione dell'energia non decresce (di solito cresce). Il termine di superficie, invece, tende a zero quando \mathcal{S} si espande all'infinito. Infatti, per grandi valori di r la funzione potenziale φ tende a zero come $1/r$, il campo elettrico va a zero come $1/r^2$, mentre l'area della superficie cresce come r^2 , e quindi il flusso tende a zero (come $1/r$). In conclusione, facendo espandere la regione di integrazione \mathcal{V} a tutto lo spazio si ottiene la (2.43).

Attribuire al campo elettrico l'energia di un sistema di cariche può sembrare una speculazione piuttosto astratta in vista del fatto che la nozione stessa di campo può essere considerata, per quel che riguarda le forze tra corpi in quiete, come un puro artificio matematico introdotto per agevolare la descrizione delle interazioni elettriche. Conviene quindi segnalare fin d'ora che nei prossimi capitoli verranno fornite le prove del fatto che il campo elettrico è un oggetto fisico *reale* alla stessa stregua di un qualsiasi oggetto materiale che si può vedere e toccare. Tra queste prove ci sarà tra l'altro la capacità del campo elettrico (o meglio del campo elettromagnetico) di trasportare energia da un punto a un altro dello spazio senza che venga trasportata materia.

Capitolo 3

Campo Elettrico nella Materia

3.1 Il Campo medio

Alla scala microscopica, la distribuzione di carica elettrica nella materia non può, in linea di principio, essere approssimata mediante una funzione densità che varia in maniera ‘dolce’ nello spazio. Ciò implica che anche il campo elettrico in un corpo materiale subisce variazioni enormi per spostamenti dell’ordine dell’Ångstrom e non ammette una descrizione semplice. Tuttavia è generalmente possibile sostituire al reale campo elettrico all’interno di un corpo un ‘campo medio’ o ‘campo macroscopico’ \vec{E}_m , definito come

$$\vec{E}_m(\vec{r}) \equiv \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \vec{E}(\vec{r}') dV,$$

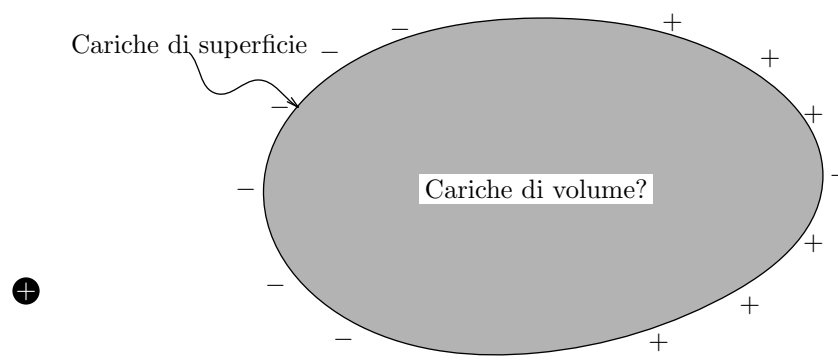
dove \vec{r}' varia su una regione ΔV , macroscopicamente piccola, centrata intorno a \vec{r} . Il motivo essenziale per cui questa grandezza è fisicamente rilevante è che, su scala microscopica, la quiete non esiste: una particella microscopica carica, che faccia o meno parte dei costituenti del corpo, non sta ferma in una posizione fissa ma esegue un moto complicato che spesso si estende su regioni di dimensioni macroscopiche. Si intuisce quindi che fluttuazioni, anche grandi ma casuali, del campo elettrico durante il percorso, si mediano a zero lasciando soltanto il contributo sistematico rappresentato dal campo medio. Allo stesso modo, se si introduce in un materiale un corpo di prova, piccolo ma macroscopico, la forza agente dipenderà dal campo elettrico medio nella regione occupata da questo corpo. Ora, si può dimostrare che il campo macroscopico è determinato dalla distribuzione continua (di volume o di superficie) di carica che approssima la reale distribuzione microscopica:

$$\vec{E}_m = \int \frac{\rho}{r^2} \hat{r} dv. \quad (3.1)$$

In altre parole, per il campo medio, è lecito applicare la (1.11) anche all’interno dei corpi materiali. La dimostrazione di questa affermazione

non verrà fornita perché non è elementare¹. Tuttavia anche in mancanza di una ‘prova’ formale, appare plausibile che il campo mediato su una regione macroscopica non dipenda dal dettaglio della distribuzione di carica ma solo dall’approssimazione ‘liscia’ ρ .

Nei limiti di validità dell’approssimazione del campo medio si può ignorare la distinzione tra campo nel vuoto e campo nella materia e perciò d’ora in avanti il campo elettrico verrà indicato sempre con \vec{E} , omettendo il suffisso m per non appesantire la notazione. Allora, cosa c’è di nuovo rispetto al campo nel vuoto? Il problema, in presenza di materia, è che non abbiamo più il controllo delle distribuzioni di carica a causa del fenomeno di induzione.



In figura è data una tipica illustrazione del fenomeno: una carica positiva, rappresentata dal cerchietto a sinistra, posta nelle vicinanze di un corpo materiale esercita forze coulombiane sui costituenti microscopici di questo e ne altera la configurazione di equilibrio; il risultato è che il corpo, macroscopicamente neutro in assenza della carica inducente, presenta ora distribuzioni di carica sulla superficie* indicate in figura dai segni + e -. Qualitativamente, è facile giustificare il fenomeno osservando che le cariche del corpo di segno opposto a quello della carica inducente vengono attratte mentre quelle dello stesso segno vengono respinte, ma quale è *esattamente* la densità di carica σ indotta in ciascun punto della superficie? In condizioni statiche ciascuna carica del corpo dovrà essere in equilibrio sotto l’azione delle forze coulombiane esercitate da tutte le altre cariche, inclusa quella inducente, e delle forze ‘interne’ che, per così dire, ‘tengono insieme’ il corpo. Queste ultime forze agiscono alla scala microscopica e dipendono dalla natura del corpo stesso; la loro origine è sempre l’interazione elettrica (e magnetica) tra particelle microscopiche ma è possibile darne una descrizione *fenomenologica* semplice per ampie categorie di sostanze. In questo capitolo ci occuperemo delle due categorie più semplici: conduttori e dielettrici. La determinazione delle distribuzioni di carica indotte, e quindi dei campi elettrici nella materia verrà ottenuta aggiungendo alle leggi dell’elettrostatica delle leggi ‘costitutive’ che caratterizzano, su scala macroscopica, le forze interne.

* In generale potrà esserci anche una distribuzione di volume all’interno del corpo; tuttavia per corpi omogenei a temperatura uniforme immersi in campi non troppo intensi e non troppo rapidamente variabili da punto a punto non si manifestano cariche indotte di volume.

¹Si può trovare in: J. D. Jackson, “CLASSICAL ELECTRODYNAMICS”, John Wiley & Sons, (1998) § 6.6

3.2 Elettrostatica dei conduttori

La distinzione tra conduttori e isolanti fu introdotta dai primi indagatori dei fenomeni elettrici sulla base dell'osservazione che alcuni materiali consentono alla carica elettrica di trasferirsi da un corpo all'altro mentre altri non sembrano consentire questo passaggio. In effetti, come vedremo nello studio delle correnti, *tutti* i materiali consentono il passaggio di cariche ma con scale di tempi diversissime che possono andare dai nanosecondi, per i metalli, ai secoli, per il vetro. Pertanto, su una scala di tempi intermedia, questa classificazione in due categorie ben distinte è giustificata.

La capacità di trasportare la carica è dovuta ai 'portatori di carica', particelle microscopiche presenti nel materiale che possono percorrere in esso distanze *macroscopiche*. Nei metalli, per esempio, vi è una frazione apprezzabile di elettroni che non sono stabilmente legati a nessun atomo e possono muoversi liberamente[†] nel reticolo cristallino. I liquidi e i gas sono normalmente isolanti, ma fenomeni di dissociazione o di ionizzazione possono renderli conduttori: l'acqua distillata, per esempio, è un isolante ma la comune acqua di rubinetto contiene una gran quantità di ioni disciolti ed è un conduttore; ancora, l'aria secca al livello del suolo è isolante, ma alla quota di 50 Km diventa conduttrice per l'effetto ionizzante della radiazione solare.

[†] In realtà il moto dei portatori di carica in un conduttore non è affatto libero; questo modello primitivo di conduzione dovrà essere migliorato ma è adeguato per l'analisi dell'equilibrio elettrostatico.

Le proprietà elettrostatiche dei conduttori possono essere interpretate adottando il seguente semplice modello: all'interno dei materiali conduttori sono presenti portatori di carica, liberi di muoversi e vincolati soltanto a non attraversarne la superficie; dal momento che un campo elettrico *esercita* una forza sulle cariche, per l'equilibrio, deve essere soddisfatta la semplice equazione costitutiva:

$$\vec{E}(\text{all'interno di un conduttore}) = 0 \quad (3.2)$$

Nella discussione di questo paragrafo non avremo bisogno quindi di specificare se il materiale è un pezzo di rame, una soluzione elettrolitica o un gas ionizzato: in tutti i casi le proprietà elettrostatiche vengono determinate completamente dalla (3.2). In effetti differenze tra le varie sostanze esistono per quel che riguarda la forza che impedisce ai portatori di carica di evadere dal materiale e ciò dà luogo a importanti fenomeni quando conduttori di natura diversa sono in contatto tra loro. Di ciò ci occuperemo in un paragrafo successivo, per il momento consideriamo soltanto sistemi di conduttori, anche di diversa natura ma *non in contatto tra loro*. Possiamo completare il nostro modello assumendo semplicemente che i portatori di carica siano soggetti, sulla superficie dei conduttori, a una forza di vincolo diretta normalmente alla superficie che ne impedisce la fuoriuscita.

Una conseguenza immediata della equazione costitutiva (3.2) è che non vi sono cariche di volume indotte nei conduttori; infatti, per la legge di Gauss in forma locale (1.27) si ha:

$$\rho(\text{all'interno di un conduttore}) = \frac{1}{4\pi} \text{div } \vec{E} = 0.$$

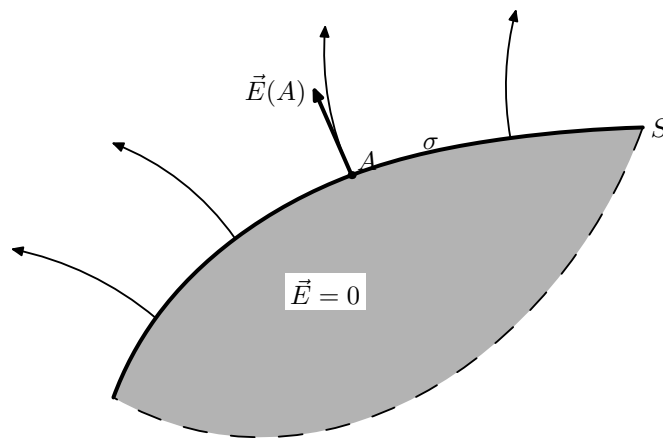
Sulla superficie del conduttore, invece, cariche indotte *devono* esistere; infatti, dal momento che il campo nel vuoto in generale non è nullo, nell'attraversamento della superficie di un conduttore la condizione (3.2) comporta una discontinuità del campo elettrico e, come sappiamo dalla legge di Gauss in forma locale (1.29), ciò implica l'esistenza di cariche di superficie. È appunto questa distribuzione di carica sulla superficie e il campo che essa produce all'esterno del conduttore l'oggetto del nostro studio.

Per esaminare più dettagliatamente la struttura del campo al confine tra il conduttore e il vuoto osserviamo preliminarmente che due punti qualsiasi sulla superficie di un corpo possono essere 'connessi' da curve tutte interne al corpo. Scegliendo una di queste curve per calcolare la differenza di potenziale tra tali punti si ha immediatamente dalla (3.2) che il risultato è zero:

Nota: Ovviamente, anche i punti interni sono allo stesso potenziale, per cui tutta la regione occupata dal corpo è equipotenziale; tuttavia, per lo studio delle proprietà elettrostatiche, quello che conta è il potenziale della superficie. Nelle figure di questo capitolo le superfici dei conduttori verranno evidenziate con linee di forte spessore.

Le superfici dei conduttori omogenei sono equipotenziali.

Pertanto le linee di flusso del campo nel vuoto terminano (o partono) perpendicolarmente sulla superficie dei conduttori (si veda la (2.18)). D'altra parte, ciò è in accordo con la continuità della componente tangenziale del campo elettrico (vedi la (2.7)).



Nella figura è mostrata in sezione una porzione della superficie S di un conduttore con qualche linea di flusso; il verso delle linee corrisponde a densità di carica σ positiva. Il limite di \vec{E} in un punto A della superficie, calcolato dalla parte del vuoto, viene chiamato campo elettrico sulla superficie del conduttore $\vec{E}(A)$ anche se, a rigore, il campo su S non è definito perché il limite dalla parte del conduttore è zero. Tenendo presente la forma locale (1.29) della legge di Gauss, in ciascun punto di S si ha

$$\vec{E}(A) = 4\pi\sigma(A)\hat{n}. \quad (3.3)$$

Questa legge viene chiamata, per tradizione, 'TEOREMA DI COULOMB' anche se Coulomb ne ha stabilita la validità in maniera empirica.

3.2.1 Il problema esterno per un solo conduttore

Nel caso in cui il potenziale di un conduttore è noto[†], la determinazione del campo elettrico all'esterno del conduttore stesso si riconduce al problema di Dirichlet discusso nel capitolo precedente. Infatti, osservando la figura a pagina 54, possiamo identificare la regione \mathcal{R} con quella circostante il conduttore, la superficie \mathcal{S}_i con la superficie del conduttore, la cavità \mathcal{C} con la regione occupata dal corpo. Dal momento che il nostro conduttore non è solo nell'universo avremo, in generale, anche altre cavità in \mathcal{R} ed eventualmente un conduttore che racchiude il tutto, per esempio le pareti di un laboratorio (la superficie \mathcal{S}_e). Tuttavia, se queste altre superfici conduttrici sono abbastanza lontane, la funzione potenziale nelle adiacenze del conduttore può essere calcolata risolvendo il problema di Dirichlet con un potenziale fissato V sulla superficie del conduttore e zero all'infinito. Una volta determinata la funzione potenziale φ , mediante il gradiente viene calcolato il campo elettrico e da questo, usando il teorema di Coulomb, la densità di carica sulla superficie del conduttore.

[†]Vedremo più avanti che questa è la condizione sperimentale più facile da realizzare.

Consideriamo, per esempio, un conduttore sferico di raggio a , a potenziale V in assenza di altri corpi nelle vicinanze. La funzione potenziale deve soddisfare, all'esterno del conduttore, l'equazione di Laplace; facciamo vedere che la soluzione del problema dell'elettrostatica può essere trovata nella famiglia di funzioni:

$$\varphi = \frac{k}{r} + c.$$

Ovviamente (§ 2.4) queste funzioni soddisfano l'equazione di Laplace per $r > a$; inoltre, le condizioni al contorno

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow a} \varphi = V,$$

vengono immediatamente soddisfatte ponendo $k = aV$ e $c = 0$; per il teorema di unicità abbiamo quindi che la soluzione del problema dell'elettrostatica per il conduttore sferico è

$$\varphi(r) = \frac{aV}{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{aV}{r^2} \hat{r}. \quad (3.4)$$

Da questa formula risulta evidente che σ è uniforme, e la carica totale sulla superficie del conduttore è

$$Q = aV. \quad (3.5)$$

Questa formula si può anche ricavare dal teorema di Coulomb; infatti la 3.3 fornisce in questo caso

$$\sigma = \frac{E_n(a)}{4\pi} = \frac{V}{4\pi a},$$

in accordo con la (3.5).

La proporzionalità tra il potenziale V e la carica Q di un conduttore, espressa dalla (3.5), non è una caratteristica peculiare della forma sferica ma una proprietà generale dei conduttori, dipendente dalla linearità delle leggi dell'elettrostatica. Consideriamo infatti il problema di Dirichlet per un conduttore di forma generica a potenziale V ; la corrispondente funzione potenziale φ non avrà la forma semplice (3.4) ma è comunque univocamente definita, e così saranno anche il campo e la carica che sono determinati da

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad \sigma = \frac{E_n}{4\pi}, \quad Q = \int_S \sigma ds, \quad (3.6)$$

dove S , nell'ultima formula rappresenta la superficie del conduttore. Cosa cambia se il potenziale del conduttore, invece che V , è V' ? La risposta molto semplice è che la funzione potenziale corrispondente a V' è

$$\varphi' = \frac{V'}{V} \varphi$$

Infatti questa funzione soddisfa ovviamente l'equazione di Laplace e le condizioni al contorno e, per il teorema di unicità, è la soluzione. Allora risulta immediatamente

$$\vec{E}' = \frac{V'}{V} \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \sigma' = \frac{V'}{V} \sigma \quad \Rightarrow \quad Q' = \frac{V'}{V} Q \quad \Rightarrow \quad \frac{Q'}{V'} = \frac{Q}{V}.$$

Con ciò resta dimostrato che il rapporto tra la carica e il potenziale di un conduttore 'solitario' è una costante che dipende esclusivamente dalla geometria del corpo. Questa proprietà viene espressa introducendo la costante proporzionalità C

$$Q = CV. \quad (3.7)$$

che prende il nome di **capacità**. Nel sistema di unità gaussiano, la capacità ha le dimensioni di una lunghezza e viene quindi misurata in centimetri. Il calcolo eseguito sopra per la sfera mostra che la capacità di un conduttore sferico è eguale al raggio[†]; per determinare la capacità di un conduttore di forma e dimensioni assegnati occorre risolvere il problema di Dirichlet per quella particolare superficie, il che non è in generale semplice. Per avere un esempio meno banale della sfera, vale la pena di riportare, omettendo la tediosa dimostrazione, i risultati per l'ellissoide di rotazione appiattito (oblato). Nella figura a pagina (71) è disegnata la sezione come un'ellisse di semiassi a e b con $a > b$; l'ellissoide è generato da una rotazione di 2π intorno all'asse \hat{z} . Una carica Q sul conduttore si distribuisce con la densità

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2 b} \left(\frac{r^2}{a^4} + \frac{z^2}{b^4} \right)^{-1/2},$$

dove r e z sono le coordinate di un punto della superficie

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

[†]Nel SI la formula è

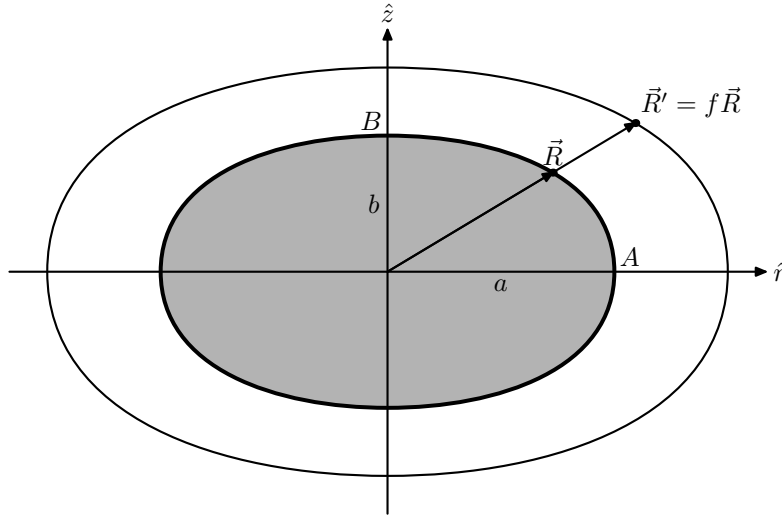
$$C = 4\pi\epsilon_0 a$$

La capacità ha dimensioni [Carica]/[Potenziale], l'unità di misura Coulomb/Volt, si chiama Farad, simbolo 'F'. Il fattore di conversione è

$$1 \text{ F} = 0.899 \times 10^{12} \text{ cm}.$$

Come si vede questa unità è troppo grande, per cui nella pratica si usano il micro Farad μF , o il pico Farad pF .

Da questa formula si verifica facilmente che la densità cresce dal valore minimo $Q/4\pi a^2$ nel punto B al valore massimo $Q/4\pi ab$ in A (vedi figura).



In generale, la densità di carica è minore nelle zone piatte e maggiore dove la superficie ha raggi di curvatura più piccoli; se sono presenti delle ‘punte’ la densità di carica raggiunge valori molto grandi.

La capacità dell’ellissoide oblatto è espressa da

$$C = a \frac{\sqrt{1 - (b/a)^2}}{\arccos(b/a)}.$$

Questa formula mostra una caratteristica di C che è facile dimostrare in generale: per una forma assegnata (nell’esempio il rapporto b/a) la capacità ‘scala’ con la dimensione del corpo (il semidiametro a). In altre parole, *se tutte le dimensioni del corpo vengono moltiplicate per un fattore f anche la capacità viene moltiplicata per lo stesso fattore.*

Dimostrazione: se $\varphi(\vec{r})$ è la soluzione del problema dell’elettrostatica per il conduttore originale corrispondente al potenziale V , la soluzione per il conduttore ‘dilatato’ corrispondente allo stesso potenziale sarà

$$\varphi'(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}/f).$$

Infatti, φ' soddisfa evidentemente l’equazione di Laplace; inoltre, se \vec{R} è un punto della superficie originale ($\varphi(\vec{R}) = V$), il punto corrispondente sulla superficie dilatata sarà $\vec{R}' = f\vec{R}$ (vedi figura) e quindi

$$\varphi'(\vec{R}') = \varphi(\vec{R}'/f) = \varphi(\vec{R}) = V.$$

Dalle formule elementari per le derivate si ha allora

$$\vec{E}' = -\text{grad } \varphi' = -\frac{1}{f} \text{grad } \varphi = \frac{1}{f} \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \sigma' = \frac{1}{f} \sigma.$$

Tenendo presente che quando le lunghezze vengono moltiplicate per f le aree si moltiplicano per f^2 abbiamo infine

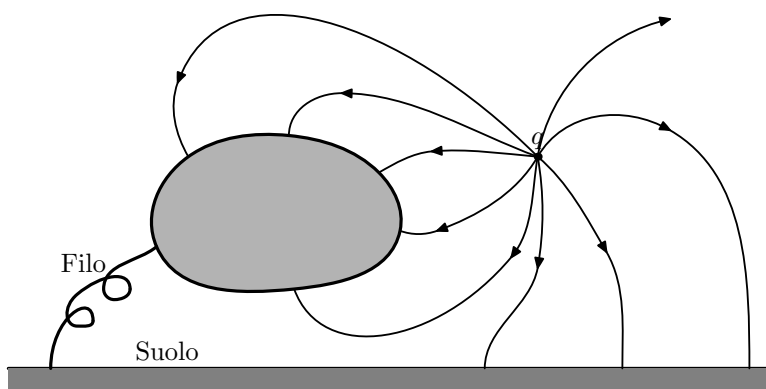
$$Q' = \int_{S'} \sigma' ds' = f \int_S \sigma ds = fQ \quad \Rightarrow \quad C' = fC. \quad \blacksquare$$

Esercizio: Dimostrare che la capacità dell’ellissoide è sempre minore di quella di una sfera di raggio a . Studiare i casi limite di un disco ($b/a \rightarrow 0$) e di una sfera $b \rightarrow a$.

Una conseguenza importante di questa proprietà è che la Terra ha una capacità tanto grande che nessuna attività umana può alterarne in maniera significativa il potenziale; pertanto, nelle applicazioni, il suolo terrestre viene preso come riferimento a potenziale zero. La locuzione ‘mettere a terra’ un conduttore significa collegare il conduttore con un filo metallico al suolo; ciò comporta che un conduttore messo a terra ha potenziale zero. Se, invece, si vuole tenere il conduttore a potenziale fissato si userà una batteria* con un polo collegato al conduttore e l’altro polo messo a terra.

*Il principio di funzionamento delle batterie verrà discusso più avanti; per il momento tutto ciò che è necessario sapere al riguardo è il fatto che la differenza di potenziale tra i poli ha un valore fissato.

Quando un conduttore viene messo a terra l’eventuale carica da esso posseduta fluisce al suolo; in effetti, sulla base della discussione precedente, la carica si ripartisce tra il conduttore e la Terra in parti proporzionali alle rispettive capacità ma, stante l’immensa sproporzione delle dimensioni, la frazione di carica che rimane sul conduttore è irrisoria e viene trascurata. Tuttavia, se nelle adiacenze sono presenti delle cariche, per induzione, il conduttore acquista una carica proprio per il fatto di essere collegato a terra. La cosa è illustrata nelle figura sotto:



Le linee di flusso che partono dalla carica inducente q terminano in parte sul suolo, in parte sul conduttore; non sono possibili linee di flusso dal conduttore al suolo perché questi fanno parte della stessa superficie equipotenziale. Di conseguenza il conduttore acquisisce una carica netta q_i di segno opposto a quello della carica inducente. In effetti, in questo processo la Terra acquista una carica $-q_i$ (che va a distribuirsi agli antipodi) ma, a causa della enorme capacità del pianeta, ciò non produce alcun effetto misurabile. Dal momento che solo una parte delle linee di flusso che escono da q termina sul conduttore è in ogni caso $|q_i| < |q|$. Il valore di q_i dipende dalla forma e dalle dimensioni del conduttore e dalla posizione rispetto alla carica inducente.

Per avere un’idea della carica che è possibile indurre consideriamo un esempio semplice in cui il problema di Dirichlet ha una soluzione esprimibile in termini di funzioni elementari: assumiamo un conduttore sferico di raggio a e una carica inducente posta a distanza $\ell > a$ dal centro della sfera. Nella figura 3.1 la carica è posta nel punto A ; con A'

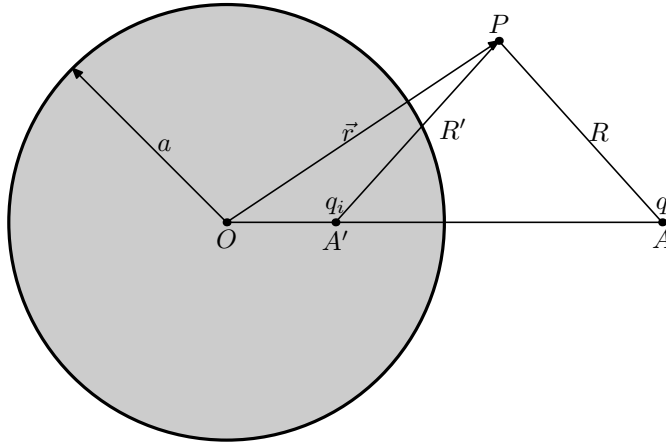


Figura 3.1: Induzione su una sfera a potenziale zero.

si indica il punto del segmento OA posto a distanza

$$\overline{OA'} = \frac{a^2}{\ell}$$

dal centro O della sfera. Dato un qualsiasi punto P , individuato dal raggio vettore \vec{r} , indichiamo con R e R' le distanze \overline{PA} e $\overline{PA'}$. La soluzione del problema di Dirichlet per questa configurazione è data da

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{R} - \frac{qa/\ell}{R'}. \quad (3.8)$$

Ovviamente questa funzione soddisfa l'equazione di Laplace in tutti i punti al di fuori della sfera fatta eccezione per il punto A dove è posta la carica puntiforme, che è punto di frontiera. La condizione al contorno in A

$$\lim_{R \rightarrow 0} R\varphi = q,$$

così come quella di annullamento all'infinito sono evidentemente soddisfatte. Se poi P appartiene alla sfera, si vede facilmente che i triangoli OPA' e OAP sono simili² e quindi $R'/R = a/\ell$; perciò φ si annulla sulla superficie della sfera. Tanto basta per concludere che la (3.8) è la funzione potenziale cercata. Si osservi che la soluzione trovata è la somma delle funzioni potenziale di due cariche q e $q_i = -qa/\ell$ poste rispettivamente in A e A' ; agli effetti del campo esterno, la distribuzione di carica sulla sfera equivale a una sola carica puntiforme q_i che viene detta 'carica immagine' di q . Da ciò risulta evidente che la carica totale indotta sulla sfera è proprio:

$$q_i = -q \frac{a}{\ell}.$$

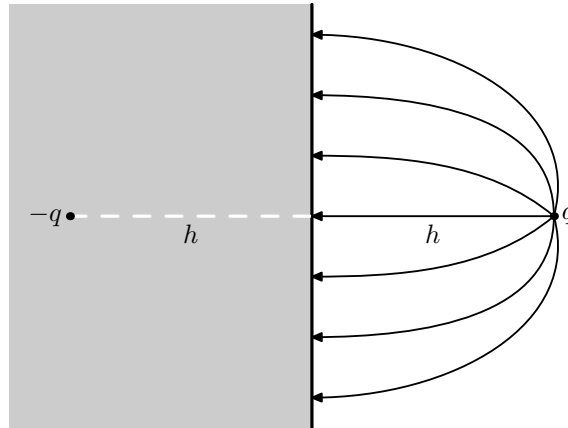
Nel caso in cui la carica inducente è molto vicina alla sfera, $a/\ell \approx 1$, quasi tutte le linee di flusso uscenti da q terminano sulla sfera; inoltre, A' è

²Si ricordi che due triangoli che hanno un angolo uguale e i lati adiacenti in proporzione, sono simili.

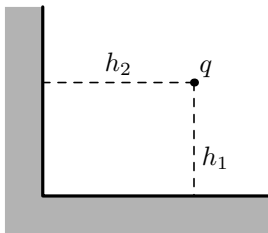
Esercizio: Trovare i valori minimo e massimo della densità di carica sul conduttore.

Esercizio: Si dimostri che all'interno della sfera la carica indotta produce un campo eguale a quello di una carica puntiforme $-q$ posta in A .

all'incirca in posizione simmetrica di A rispetto alla superficie. Abbiamo il caso limite di un conduttore piano illimitato:



Esercizio: Risolvere il problema dell'elettrostatica per la configurazione in figura



Questa approssimazione è valida, localmente, tutte le volte che la distanza h della carica inducente da una superficie conduttrice a potenziale zero, è piccola rispetto a tutte le altre dimensioni (incluso il raggio di curvatura) del conduttore.

Consideriamo, infine, l'induzione su un conduttore isolato, inizialmente scarico. In questo caso abbiamo una condizione sulla carica totale (che deve rimanere nulla) mentre del potenziale sulla superficie sappiamo solo che deve essere uniforme. Per trovare la soluzione di questo problema si cerca prima la soluzione in assenza di carica inducente, con il conduttore a potenziale arbitrario V - diciamo φ_V -, e si determina la carica $Q = CV$ corrispondente; successivamente si trova la funzione potenziale φ_q che risolve il problema del conduttore messo a terra in presenza della carica inducente q , determinando la carica indotta q_i . La soluzione cercata è allora

$$\varphi = \frac{-q_i}{Q} \varphi_V + \varphi_q.$$

Infatti, questa funzione potenziale, oltre a soddisfare tutte le condizioni al contorno, fornisce, ovviamente, una carica totale zero sulla superficie del conduttore. La funzione potenziale trovata si riduce sul conduttore alla costante

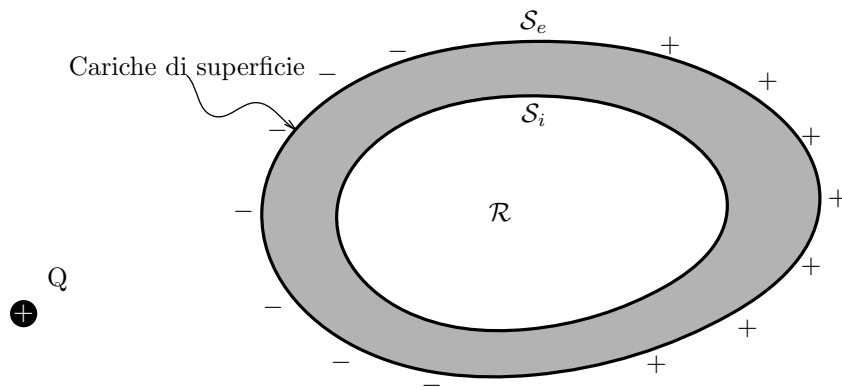
$$V_i = \frac{-q_i}{Q} V = -\frac{q_i}{C},$$

dove C è la capacità del corpo. Ricordando che q_i ha segno opposto a quello di q si vede che il potenziale ha lo stesso segno della carica inducente. Per il conduttore sferico si ha in particolare

$$V_i = \frac{q}{\ell}.$$

3.2.2 Schermo elettrostatico

L'interazione tra cariche elettriche agisce a tutte le distanze: nella legge di Coulomb non compare alcuna lunghezza caratteristica che consenta di stabilire una scala delle distanze; in linea di principio, il campo elettrico in un punto dello spazio è determinato da tutte le cariche esistenti nell'universo. In pratica, però, è sempre possibile studiare i fenomeni elettrici come processi che coinvolgono solo un numero limitato e ben individuato di corpi carichi. Uno dei motivi per cui ciò è possibile è la neutralità della materia su scala macroscopica cui si è già fatto cenno in precedenza, ma un ruolo essenziale lo svolge anche l'importante fenomeno dello 'schermo elettrostatico': consideriamo una cavità vuota all'interno di un conduttore come nella figura sotto

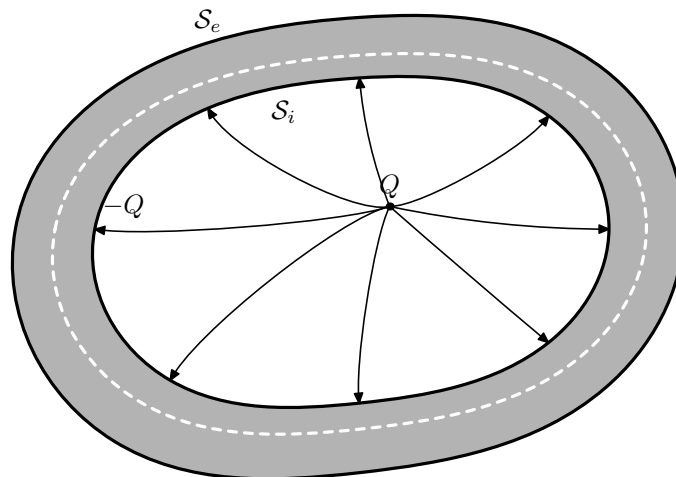


La figura è intenzionalmente ricalcata su quella di pagina 66, con la sola differenza che ora nel materiale conduttore vi è una cavità \mathcal{R} . Dal momento che la distribuzione di carica sulla superficie esterna, \mathcal{S}_e , per il teorema di unicità, è univocamente determinata dal campo elettrico all'esterno del corpo, il campo elettrico prodotto da Q e dalla carica indotta è nullo in tutta la regione interna a \mathcal{S}_e , inclusa la cavità vuota. Inoltre, in assenza di cariche nella cavità, il problema di Dirichlet *interno*, per la superficie a potenziale uniforme \mathcal{S}_i , ammette come unica soluzione una funzione potenziale uniforme in \mathcal{R} ; perciò non si ha carica indotta sulla superficie interna. Abbiamo quindi una porzione dello spazio sottratta all'azione elettrostatica di tutti i corpi esterni. Vale la pena di soffermarsi sul meccanismo di questa azione di schermaggio: il campo prodotto dalle cariche esterne, rappresentate in figura da Q , non viene assorbito o respinto, ma *annullato* dalla distribuzione di carica su \mathcal{S}_e ; ciò vuol dire che il campo nella cavità continua ad essere la somma del campo prodotto da Q e della distribuzione di superficie, ma che quest'ultima si 'adatta' alla carica esterna in modo tale da produrre all'interno un campo *opposto* a quello di Q . Vedremo in seguito che, entro certi limiti, questo meccanismo funziona anche per campi variabili nel tempo.

La proprietà di schermo elettrostatico dei conduttori consente di ottenere una verifica molto precisa delle leggi dell'interazione elettrostatica,

e in particolare dell'esponente 2 della legge di Coulomb. L'esperimento fu concepito e realizzato per primo da Henry Cavendish, contemporaneo di Coulomb. Senza entrare nei dettagli, l'esperimento di Cavendish si basa su un metodo molto accurato di verifica dell'annullamento del campo elettrico in una cavità interna a un conduttore, che consegue, in sostanza, dalla validità dell'equazione di Laplace, che a sua volta deriva dalla legge di Gauss che esprime, infine, l'andamento $1/r^2$ del campo di una carica puntiforme. La teoria dell'esperimento di Cavendish non è abbordabile in una discussione elementare; mi limito quindi a riportare il risultato dell'ultima ripetizione dell'esperimento, effettuata in tempi moderni, che ha fissato un limite superiore per l'errore nell'esponente all'incirca di 10^{-16} .

L'effetto di schermo elettrostatico si produce anche per il campo esterno rispetto alle cariche eventualmente presenti nella cavità: la carica indotta sulla superficie interna S_i cancella il campo all'esterno.



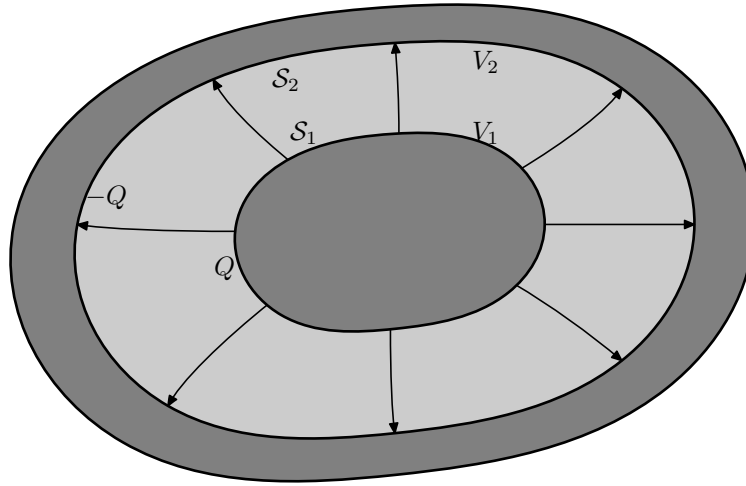
Esercizio: trovare il campo elettrico all'interno di una cavità sferica di raggio a , in cui è presente una carica q , posta a distanza $c < a$ dal centro. *Suggerimento:* usare una carica immagine come nell'esempio a pag. 73. Perché il campo non dipende dal valore (uniforme) del potenziale sulla superficie?

In questo caso la carica indotta, come mostrato in figura, è opposta alla carica inducente: si ha *'induzione completa'*. La cosa è evidente perché tutte le linee di flusso che escono da Q devono terminare sulla parete della cavità; d'altronde, applicando la legge di Gauss a una superficie come quella delineata a tratteggio bianco in figura, si ha che la somma della carica inducente e della carica indotta deve essere zero.

Si osservi che, se il conduttore è isolato e inizialmente scarico, introducendo una carica Q all'interno si avrà, oltre alla carica indotta $-Q$ su S_i anche una carica Q sulla superficie esterna S_e . Il modo in cui questa si distribuisce, per quanto detto sopra, è determinato solo dalla forma e dimensioni della superficie esterna e non da ciò che avviene nella cavità. Questo fatto fu osservato per primo da Michael Faraday in una famosa serie di esperimenti sui fenomeni elettrici.

3.2.3 Condensatori

La proprietà dello schermo elettrostatico ci introduce a una categoria di dispositivi di grande importanza nelle applicazioni pratiche. Consideriamo un conduttore all'interno della cavità di un altro conduttore, come mostrato in figura:



D'ora in avanti, la cavità in cui è presente il campo verrà ombreggiata leggermente, mentre l'interno dei conduttori è più scuro.

Figura 3.2: Un condensatore è costituito da due conduttori, uno dei quali annidato nell'altro.

Un sistema di conduttori così disposti viene detto **condensatore** e i due corpi **armature** del condensatore. Dalla discussione del paragrafo precedente segue che la struttura del campo, la distribuzione di cariche, la differenza di potenziale, tra le due superfici S_1 e S_2 , una volta fissata la carica Q , dipende esclusivamente dalla forma e dalle dimensioni delle superfici stesse. Le due superfici si dicono 'affacciate' in quanto tutte le linee di flusso che partono da una di esse terminano sull'altra. La figura (3.2) è stata disegnata assumendo una carica positiva sul conduttore interno (ma si ricordi che Q è una grandezza algebrica) che viene chiamata *carica del condensatore*. È facile convincersi che Q è proporzionale alla differenza di potenziale

$$V = V_1 - V_2,$$

V viene chiamata anche *tensione* applicata al condensatore.

tra le armature del condensatore. Infatti, per l'arbitrarietà della costante additiva del potenziale, si può sempre assumere $V_2 = 0$ e perciò $V_1 = V$; con un ragionamento identico a quello svolto per ricavare la (3.7) si dimostra che la funzione potenziale, e di conseguenza sia il campo che la carica, scalano con V

$$Q = CV. \quad (3.9)$$

La costante C , necessariamente positiva, che prende il nome di capacità del condensatore, dipende dalla geometria delle superfici affacciate e viene determinata risolvendo il problema di Dirichlet tra le armature. Questo parametro è analogo alla capacità di un conduttore isolato (che

in effetti può essere pensato come un condensatore in cui \mathcal{S}_2 si dilata all'infinito) con l'essenziale differenza che, mentre la capacità di un singolo conduttore viene alterata dalla presenza di altri corpi nelle adiacenze, la capacità di un condensatore è indipendente da tutto ciò che avviene all'esterno di \mathcal{S}_2 .

Calcoliamo, a titolo di esempio, la capacità di un condensatore sferico: le armature hanno forma di sfere concentriche di raggi a e b a potenziali V_1 e V_2 . Indicando con r la distanza dal centro comune delle sfere, la funzione potenziale ha la forma

$$\varphi = \frac{Q}{r} + p,$$

con Q e p parametri arbitrari che vengono determinati imponendo le condizioni al contorno

$$\varphi(a) = V_1, \quad \varphi(b) = V_2.$$

Risolvendo questo sistema si trova facilmente (p ovviamente non interessa)

$$Q = \frac{ab}{b-a}(V_1 - V_2).$$

Dal momento che Q rappresenta proprio la carica del condensatore concludiamo che

$$C = \frac{ab}{b-a} \quad (3.10)$$

In accordo con quanto osservato sopra, questa espressione si riduce alla capacità di una sfera di raggio a quando $b \rightarrow \infty$. Si noti la differenza dei raggi a denominatore: la capacità può assumere valori molto grandi se la 'distanza' tra le due sfere è piccola.

Da un punto di vista pratico, una struttura con un corpo dentro un altro non è molto conveniente sia per motivi costruttivi sia per l'impossibilità di raggiungere il conduttore interno; è possibile realizzare due superfici affacciate in altro modo? In linea di principio solo la geometria del conduttore annidato garantisce induzione completa, ma è facile realizzare una configurazione in cui 'quasi' tutte le linee di flusso che partono da una superficie terminano sull'altra; si osservi la parte sinistra della figura (3.3): le due superfici disegnate a tratto spesso sono a distanza molto piccola tra loro e perciò la stragrande maggioranza delle linee di flusso che partono da \mathcal{S}_1 terminano su \mathcal{S}_2 (si ricordi che le linee di flusso incidono perpendicolarmente sulle superfici). Abbiamo quindi che in questo tipo di configurazione, con ottima approssimazione, le cariche sulle due superfici affacciate sono opposte. Conviene puntualizzare che le due superfici \mathcal{S}'_1 e \mathcal{S}'_2 , che delimitano i corpi conduttori all'esterno, non fanno parte della struttura del condensatore: le cariche su di esse non sono in relazione tra loro ma possono essere indipendentemente alterate, per esempio dalla presenza di cariche inducenti esterne. Queste superfici hanno comunque un ruolo perché, costituendo insieme una superficie praticamente chiusa, danno luogo a uno schermaggio che rende la struttura

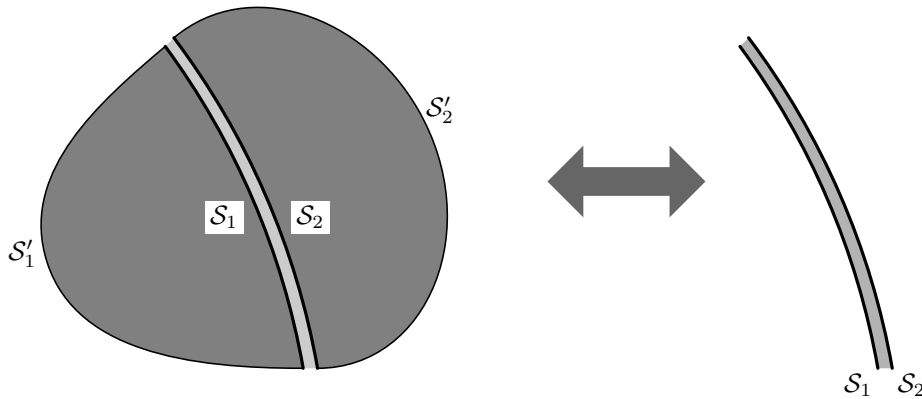


Figura 3.3: Questi due condensatori sono eguali.

del campo tra \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 insensibile alle azioni esterne. Allora la capacità del condensatore, definita come il fattore di proporzionalità tra la differenza di potenziale tra le armature e la carica sulle superfici affacciate, dipenderà soltanto dalla geometria delle superfici \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 . Nella pratica i condensatori vengono realizzati mediante lamine*, come indicato nella parte destra della figura (3.3). A questo proposito conviene notare che, eliminando una dimensione, nella figura non si distinguono più le due superfici interne da quelle esterne; si tenga ben presente, quindi, che quando si parla delle superfici affacciate e della densità di carica su di esse, ci si riferisce alle 'pagine' interne.

Per i condensatori costituiti da superfici affacciate molto vicine tra loro si può dare un'espressione semplice della capacità senza dover risolvere il problema di Dirichlet. Osserviamo in primo luogo che nell'approssimazione in cui la distanza d tra le armature è molto più piccola di tutte le altre dimensioni del condensatore le superfici \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 'corrono parallele', hanno cioè le normali praticamente coincidenti; questa proprietà vale esattamente per armature piane e perciò si parla di *condensatori piani*. Le linee di flusso, se si eccettuano le zone in prossimità dei bordi sono rette perpendicolari alle superfici (vedi figura), il campo elettrico è praticamente uniforme e la componente normale vale

$$E_n = \frac{V}{d}.$$

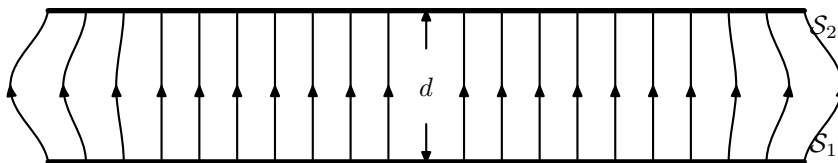


Figura 3.4: Condensatore piano; per chiarezza di figura, la distanza d è molto esagerata.

* I condensatori 'a carta' vengono costruiti interponendo un sottile foglio di carta paraffinata, che serve da isolante e da distanziatore (e anche ad accrescere la capacità, come si vedrà in seguito), ed arrotolando il tutto come uno strudel.

Per il teorema di Coulomb abbiamo allora

$$\sigma = \frac{V}{4\pi d} \quad \Rightarrow \quad Q = V \int_{S_1} \frac{dS}{4\pi d}.$$

In conclusione, la capacità di un condensatore ‘piano’ (nella accezione generale) viene espressa dalla formula

$$C = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{dS}{d}. \quad (3.11)$$

Nel caso, particolare ma frequente, in cui la distanza tra le superfici è uniforme (come avviene per esempio se S_1 e S_2 sono sfere oppure figure piane e parallele), indicando con S il valore (comune alle due superfici) dell'area si ha il semplice risultato

Nel SI

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad C = \frac{S}{4\pi d}. \quad (3.12)$$

Si può fare un utile esercizio verificando che questa formula è in accordo con la formula esatta del condensatore sferico (3.10) nel limite in cui $b - a \ll a, b$. Come già osservato in precedenza, un condensatore può avere capacità molto più grande di quella di un singolo conduttore di dimensioni paragonabili, per la presenza a denominatore della distanza tra le armature. Tuttavia, riducendo la distanza tra le armature, a parità di tensione V , aumenta il campo elettrico. Ora, in dipendenza dall'isolante interposto tra le armature, esiste un valore limite del campo al di là del quale si verifica una scarica distruttiva; per l'aria, ad esempio tale valore è dell'ordine di 20000 Volt/cm $\simeq 67$ ues. Pertanto un condensatore può ‘lavorare’ solo per tensioni al di sotto di un limite determinato dalla distanza tra le armature e dalla natura dell'isolante.

I condensatori vengono usati nei circuiti elettrici e perciò le due armature sono dotate di terminali ai quali possono essere saldati fili conduttori. Nella figura sono mostrati i simboli che vengono usati per rappresentare i condensatori e le batterie:



Il polo della batteria disegnato con un tratto più lungo è quello a potenziale maggiore. Per caricare un condensatore si collegano i terminali a una batteria secondo lo schema mostrato in figura 3.5. La tensione V è determinata dalla batteria; per esempio, una comune pila ‘stilo’ fornisce ≈ 1.5 Volt. Il processo attraverso cui la carica si accumula sulle armature fino al raggiungimento dell'equilibrio elettrostatico verrà discusso più

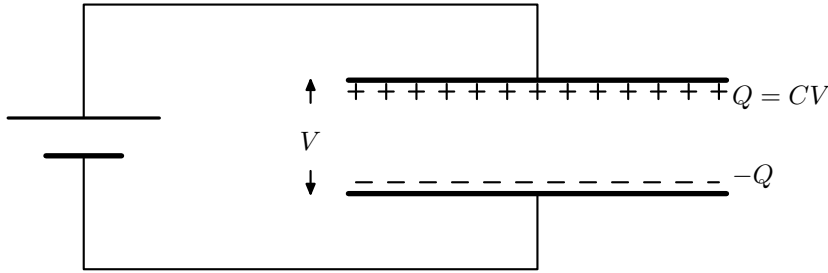
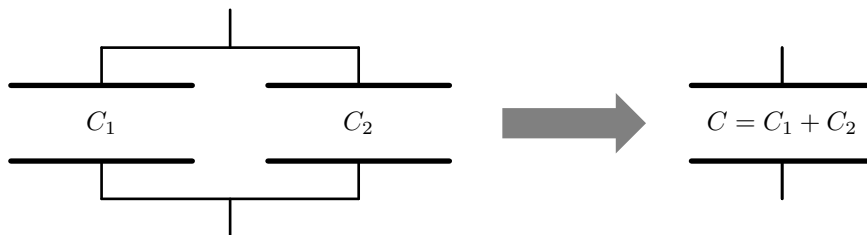


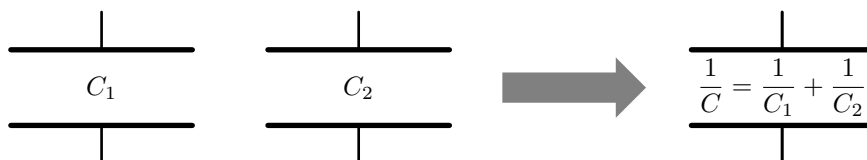
Figura 3.5: Un condensatore caricato mediante una batteria.

avanti. Una volta raggiunto l'equilibrio, il condensatore può essere staccato dalla pila, lasciando le armature isolate: la carica Q resta invariata in questa operazione.

Notiamo infine che, collegando con fili conduttori le armature di due condensatori, nella maniera indicata in figura



la tensione è la stessa: si dice che i due condensatori sono collegati 'in parallelo'. Effettuando invece il collegamento 'in serie' indicato sotto



si ha uguaglianza delle cariche sui due condensatori. Le formule per la capacità complessiva, scritte nelle figure, sono assai facili da ricavare come esercizio.

3.2.4 Considerazioni energetiche

Quando un condensatore viene caricato si crea campo elettrico nella regione tra le due armature. Questo campo possiede un'energia (vedi la (2.43))

$$U = \int_{\mathcal{V}} \frac{E^2}{8\pi} dv, \quad (3.13)$$

che viene detta comunemente *energia del condensatore*. Con riferimento alla figura 3.2, la regione di integrazione \mathcal{V} è quella delimitata dalle superfici \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 . Esprimendo il campo in termini del potenziale,

$$E^2 = \vec{E} \cdot \vec{E} = -\text{grad } \varphi \cdot \vec{E},$$

Il calcolo svolto qui è il rovesciamento di quello a pagina 63.

ricordando la (2.45) e tenendo presente che nella regione \mathcal{V} non ci sono cariche, si ottiene

$$E^2 = -\operatorname{div}(\varphi \vec{E}).$$

Sostituendo nell'integrale e ricordando il teorema di Gauss abbiamo

$$U = - \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \left(\frac{\varphi \vec{E}}{8\pi} \right) d\mathcal{V} = \int_{S_1} \frac{\varphi E_n}{8\pi} dS + \int_{S_2} \frac{\varphi E_n}{8\pi} dS$$

Il segno meno si cancella perché la normale esterna alla regione \mathcal{V} punta dal vuoto verso il conduttore mentre E_n è la componente del campo elettrico secondo la normale che va dal conduttore al vuoto. Tenendo presente il teorema di Coulomb e il fatto che le armature del condensatore sono equipotenziali si ha in definitiva

$$U = \frac{1}{2} V_1 \int_{S_1} \sigma dS + \frac{1}{2} V_2 \int_{S_2} \sigma dS = \frac{1}{2} V_1 Q - \frac{1}{2} V_2 Q = \frac{1}{2} QV, \quad (3.14)$$

dove Q e V sono la carica e la tensione del condensatore. In termini di capacità questa espressione si può anche riscrivere nelle due forme molto usate nelle applicazioni pratiche

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{Q^2}{2C}. \quad (3.15)$$

L'energia viene fornita al condensatore dalla batteria durante il processo di carica. Osservando la figura 3.5 e ricordando che nei conduttori i portatori di carica sono gli elettroni, si vede che la batteria ha prodotto una emigrazione di elettroni dall'armatura superiore e un accumulo di elettroni, in egual numero, sull'armatura inferiore; non si tratta degli stessi elettroni perché nella batteria i portatori di carica sono ioni sia positivi che negativi: vedremo nel quinto capitolo che gli elettroni provenienti dall'armatura superiore vengono 'neutralizzati' al polo positivo della pila mentre quelli che vanno all'armatura inferiore sono prodotti al polo negativo da reazioni chimiche che, in ultima analisi, forniscono l'energia necessaria. Tuttavia il bilancio netto del processo, all'interno della batteria, consiste in un trasferimento di carica negativa dal polo positivo al polo negativo e/o di carica positiva in senso inverso. In tutti e due i casi, nella pila il moto di cariche avviene in verso opposto a quello della forza esercitata dal campo elettrico (diciamo \vec{E}_p) all'interno della pila. Una descrizione fenomenologica della pila può allora essere data assumendo che al suo interno agisca sui portatori di carica una forza *ad hoc*, $\vec{\mathcal{F}}$, opposta a quella prodotta dal campo; per un portatore di carica q questa forza vale

$$\vec{\mathcal{F}} = -q\vec{E}_p. \quad (3.16)$$

Del campo \vec{E}_p (che non va confuso con il campo tra le armature del condensatore) non conosciamo la geometria ma, per certo deve essere

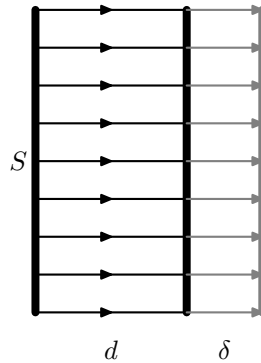
$$\int_p^n \vec{E}_p \cdot d\vec{\ell} = V,$$

dove gli estremi di integrazione 'p' e 'n' indicano il polo positivo e quello negativo rispettivamente. Pertanto, durante il processo di carica del condensatore, in cui una carica Q si sposta dal polo negativo a quello positivo, la batteria compie il lavoro

$$\mathcal{L} = \int_n^p \vec{\mathcal{F}} \cdot d\vec{\ell} = -Q \int_n^p \vec{E}_p \cdot d\vec{\ell} = QV. \quad (3.17)$$

Troppa grazia! Il lavoro compiuto dalla pila è il doppio dell'energia che si ritrova nel condensatore. Per spiegare dove sia finita l'energia in più dovremo considerare gli effetti che si verificano durante la fase transitoria che non è di equilibrio; ciò verrà fatto nell'ottavo capitolo.

Un altro modo di creare campo in una regione dello spazio è quello di allontanare le armature di un condensatore, come mostrato in figura



Supponendo che le armature siano isolate la densità di carica rimane invariata e invariato quindi il valore di \vec{E} ; pertanto la differenza tra la configurazione iniziale e quella finale consiste nella regione di volume $S\delta$ che è stata occupata dal campo. L'energia aumenta di conseguenza di

$$\Delta U = \frac{E^2}{8\pi} S\delta$$

In questo caso il lavoro viene fatto dalla forza che è necessario applicare per spostare l'armatura. Ricordiamo infatti che, sulle cariche di superficie, agisce una forza determinata dalla semisomma dei campi elettrici dalle due parti opposte della superficie stessa (vedi pagina 62); nel caso dei conduttori abbiamo quindi per un elemento dS di superficie

$$d\vec{F} = \frac{1}{2} \vec{E} \sigma dS,$$

che, utilizzando il teorema di Coulomb si può scrivere

$$d\vec{F} = \frac{E^2}{8\pi} \hat{n} dS, \quad (3.18)$$

dove \hat{n} è la normale alla superficie del conduttore ed anche la direzione del campo. Questa formula si può interpretare in termini di una tensione

(nel senso di pressione³ negativa) pari a $E^2/8\pi$ che si trasmette lungo le linee di flusso e che si scarica sui ‘punti di ormeggio’ dove le linee terminano, vale a dire dove sono le cariche.

Tornando al condensatore la (3.18) implica che le armature si attraggono con una forza che in modulo vale

$$F = \frac{E^2}{8\pi} S = \frac{16\pi^2 \sigma^2}{8\pi} S = \frac{2\pi Q^2}{S}$$

Pertanto, per incrementare di δ la distanza tra le armature, la forza esterna deve compiere un lavoro

$$\mathcal{L} = F\delta = \frac{E^2}{8\pi} S\delta = \Delta U.$$

È interessante notare che la forza tra le armature, nell'approssimazione del condensatore, risulta indipendente dalla distanza d : abbiamo un esempio di come sia essenziale, nell'enunciato della legge di Coulomb, la clausola che i corpi siano ‘puntiformi’.

Nota: se il condensatore è collegato a una pila, resta invariata la differenza di potenziale tra le armature ma cambia il campo e di conseguenza la carica. La condizione di costanza di V porta che il campo si riduce a

$$E' = \frac{d}{d+\delta} E,$$

e quindi la variazione di energia del condensatore è

$$\Delta U = \frac{E'^2}{8\pi} \mathcal{V}' - \frac{E^2}{8\pi} \mathcal{V} = \frac{E^2}{8\pi} \mathcal{V} \left[\frac{d}{d+\delta} - 1 \right] = -U \frac{\delta}{d+\delta}.$$

L'energia diminuisce nonostante che la forza che produce l'allontanamento tra le armature esegua ancora un lavoro positivo. La spiegazione anche qui è data dal lavoro, in questo caso, assorbito dalla pila nel riacquistare carica dal condensatore. ■

3.2.5 Stabilità dell'equilibrio elettrostatico dei conduttori

Concludiamo questo paragrafo citando un uso avanzato della espressione (3.13) per l'energia del campo che, per comodità, riscriviamo in termini della funzione potenziale

$$U = \int_{\mathcal{V}} |\text{grad } \varphi|^2 dv. \quad (3.19)$$

La discussione non è ristretta ai condensatori ma si applica a qualsiasi sistema di conduttori, a potenziali assegnati e mantenuti da vincoli meccanici in posizioni fissate. Sappiamo che la soluzione φ del problema dell'elettrostatica è definita in tutta la regione \mathcal{V} all'esterno dei conduttori e che sulle superfici di frontiera assume i valori assegnati per il potenziale. Supponiamo di sostituire al posto di φ nella (3.19) una generica funzione ψ di nostra scelta, che però soddisfi le stesse condizioni al contorno di φ e che sia, come φ , sufficientemente regolare perché siano ben

³Si noti che la densità di energia e la pressione sono grandezze omogenee.

definite le operazioni analitiche indicate nella (3.19). Esistono infinite funzioni ψ che soddisfano queste condizioni ma non soddisfano l'equazione di Laplace e non sono soluzione del problema dell'elettrostatica. Per ciascuna di tali funzioni l'energia U assume un valore in generale diverso da quello che compete a φ : abbiamo un esempio di quello che in matematica viene chiamato un *funzionale* e cioè una corrispondenza tra le funzioni di un certo 'dominio' (nell'insieme di tutte le funzioni di tre variabili) e i numeri reali. In parole povere un funzionale è una funzione definita, non su un dominio di numeri reali ma su un dominio di funzioni. Orbene, si dimostra (teorema di Thomson) che la soluzione del problema di Dirichlet φ , è un 'punto' di minimo relativo per il funzionale dell'energia: piccole variazioni rispetto a questa funzione portano a un accrescimento dell'energia. Un trattamento matematico preciso richiede naturalmente una definizione di intorno nello spazio delle funzioni, in analogia con la nozione di intorno di un numero reale, per dare un senso alla locuzione 'piccole variazioni', ma, nello spirito di questa esposizione, ci si può accontentare dell'idea intuitiva; quello che interessa, dal punto di vista fisico, è che questo risultato garantisce la stabilità, e quindi la concreta realizzabilità, dell'equilibrio elettrostatico per le distribuzioni di carica sui conduttori. Ciò è in contrasto con i sistemi di cariche libere che non hanno configurazioni di equilibrio stabile (vedi osservazione a pagina 59). Tuttavia, si deve rilevare che la stabilità nel caso presente dipende in maniera essenziale dalla condizione che i conduttori siano vincolati meccanicamente e che quindi la regione \mathcal{V} sia fissata. Un sistema di conduttori liberi, sotto l'azione delle sole forze elettrostatiche, è altrettanto instabile di un sistema di cariche puntiformi.

Il teorema citato sopra si può anche invertire: se si cerca la condizione per il minimo del funzionale (3.19) si trova che φ deve soddisfare l'equazione di Laplace. Ciò significa che un modo di enunciare le leggi per il campo elettrostatico è quello di affermare che esiste una funzione potenziale e che questa rende minima l'energia espressa dalla (3.19). La formulazione delle leggi fisiche come condizioni di minimo di funzionali rappresenta uno strumento potentissimo nell'indagine scientifica ma non è praticabile a un livello elementare. Comunque, un esempio semplice potremo discuterlo nello studio della propagazione dei raggi luminosi.

Un altro esempio di funzionale è il lavoro nel teorema delle forze vive che è un funzionale della legge oraria del moto.

3.3 Dielettrici

La differenza di comportamento tra conduttori e isolanti è stata attribuita all'assenza in questi ultimi di portatori di carica. A riprova del fatto che, negli isolanti, le cariche non subiscono spostamenti macroscopici si può citare un semplice esperimento. Consideriamo ancora una volta il fenomeno di induzione illustrato a pagina 66, che si verifica sia per i conduttori che per gli isolanti; sulla superficie compaiono cariche dei due segni che si può pensare di separare tagliando il corpo in due parti lungo la frontiera tra le zone con cariche di segno opposto. Se questa operazione viene eseguita per un conduttore si trova che le due parti, una

volta separate, posseggono effettivamente una carica totale non nulla, indipendentemente dal fatto che la carica inducente venga allontanata o meno. Viceversa, se l'operazione viene eseguita per un isolante si trova che la carica totale di ciascuna parte continua a essere nulla; se la carica inducente è ancora presente dopo aver effettuato il taglio, sulla superficie di ciascuna delle parti si trova una distribuzione di carica dei due segni che si somma a zero; se la carica inducente viene allontanata si torna allo stato di completa neutralità. Più in generale, se si estrae da un corpo isolante una qualsiasi porzione di dimensioni macroscopiche risulta che essa ha una carica totale nulla. Da tale risultato sperimentale si trae la conclusione che, nel processo di induzione elettrostatica, le singole molecole di un materiale isolante restano neutre; ciò non vuol dire, tuttavia, che queste molecole siano insensibili all'azione del campo inducente: la distribuzione di equilibrio delle cariche elettriche alla scala microscopica risulta alterata rispetto a quella in assenza di campo. Per illustrare come ciò avvenga e avere un'idea dell'entità della deformazione, analizziamo il modello molto semplice di molecola sferica[†] presentato in figura 3.6.

[†]Per esempio, una molecola monoatomica come quelle dei gas nobili.

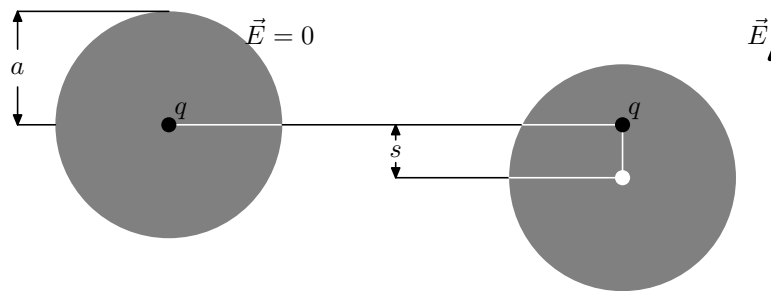


Figura 3.6: Azione del campo elettrico su una molecola.

La carica elettronica, negativa, è distribuita con densità di volume uniforme in una sfera di raggio a , mentre la carica del nucleo, positiva, viene ancora assunta puntiforme. Questa rappresentazione statica della struttura atomica è molto diversa dal familiare modello planetario di Bohr ma si deve tenere presente che ambedue le descrizioni sono soltanto delle metafore della corretta descrizione quantistica. Per lo studio delle caratteristiche elettrostatiche degli atomi e delle molecole, il modello adottato è evidentemente preferibile; in effetti, il suo principale difetto è l'ipotesi di una distribuzione uniforme della carica elettronica ma ciò comporta soltanto che non possiamo aspettarci risultati esatti dai nostri calcoli, il che non è importante ai fini di una valutazione degli ordini di grandezza. L'unico dato che deve essere ricavato dalla teoria quantistica è la stima del raggio $a \sim 10^{-8}$ cm.

In assenza di campo inducente (parte a sinistra in figura 3.6) la configurazione di equilibrio è quella con la carica positiva al centro della sfera di carica negativa. L'equilibrio è stabile perché uno spostamento \vec{s} dal

centro dà luogo a una forza di richiamo (vedi la (1.21))

$$\vec{F} = q \frac{Q(s)}{s^2} \hat{s} = q \frac{-qs^3/a^3}{s^2} \hat{s} = -\frac{q^2}{a^3} \vec{s}. \quad (3.20)$$

Notiamo, en passant, che la forza di richiamo è elastica; questa osservazione ci sarà utile in seguito. In presenza del campo inducente \vec{E} il nucleo è soggetto a una forza addizionale $q\vec{E}$ per cui la nuova configurazione di equilibrio si ha per uno spostamento dal centro della sfera tale che

$$\vec{F} + q\vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{s} = \frac{a^3}{q} \vec{E}. \quad (3.21)$$

Lo spostamento risulta proporzionale al campo inducente. Per avere un'idea dell'ordine di grandezza della deformazione calcoliamo il rapporto s/a assumendo un campo macroscopico elevatissimo dell'ordine di $3 \times 10^6 \text{ V/m} \simeq 10^2 \text{ statvolt/cm}$ e una carica q pari alla carica elementare $e \approx 5 \times 10^{-10} \text{ statcoulomb}$; dalla (3.21) si ha

In realtà quella che si sposta è la nuvola di carica negativa, come mostrato nella parte destra in figura, ma per la determinazione dello spostamento relativo ciò è irrilevante.

$$\frac{s}{a} \simeq \frac{10^{-16}}{5 \times 10^{-10}} 10^2 = 2 \times 10^{-5}.$$

Come si vede la deformazione è minuscola; tuttavia vi è un'importante differenza tra le due configurazioni: mentre nella configurazione originale la molecola non produce alcun campo all'esterno della sfera di raggio a , nella configurazione deformata essa genera campo elettrico in tutto lo spazio, che si somma al campo inducente. Sebbene il campo prodotto da una singola molecola sia modestissimo la cooperazione tra un numero dell'ordine di 10^{23} di esse produce effetti macroscopici. Infatti, lo spostamento del centro delle cariche negative rispetto a quelle positive, avviene per tutte le molecole nella direzione e nel verso del campo inducente e quindi i campi secondari prodotti dalle singole molecole sono tutti concordi.

Oltre all'effetto di deformazione il campo inducente può dare luogo anche ad un effetto di orientamento della struttura di carica molecolare. Infatti, per molte sostanze con molecole poliatomiche, la distribuzione di cariche positive e negative non ha la simmetria sferica della figura 3.6; un

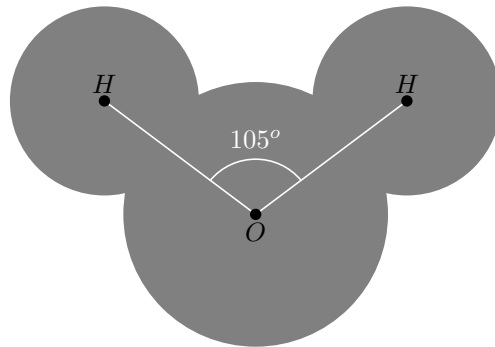


Figura 3.7: Distribuzione di carica nella molecola di acqua.

esempio comune e importante è quello dell'acqua mostrato in figura 3.7. Molecole di questo tipo producono un campo elettrico anche in assenza di deformazione; il motivo per cui, su scala macroscopica, tale campo non viene osservato è che le molecole sono orientate con eguale probabilità in tutte le direzioni e ciò da, evidentemente, luogo a cancellazione dei campi. Se però è presente un campo inducente, il sistema delle forze esercitate su queste distribuzioni di carica non simmetriche ha, in generale, un momento meccanico non nullo che produce una rotazione della molecola. In queste circostanze le molecole tendono ad orientarsi secondo la direzione del campo agente, non vi è più cancellazione e i campi molecolari contribuiscono al campo macroscopico. Per la maggior parte degli isolanti anche questo effetto è proporzionale all'intensità del campo agente sulle molecole. In questo caso si parla più specificamente di *dielettrici*; nel seguito ci occuperemo soltanto di questi tipi di sostanza.

3.3.1 Approssimazione di dipolo

La distribuzione delle cariche in una molecola può essere molto complessa e complesso, di conseguenza, il campo elettrico generato. Tuttavia, questo campo, sulla scala macroscopica, è suscettibile di una approssimazione semplice in termini di un singolo parametro globale, il *momento di dipolo*. Consideriamo una distribuzione di carica che occupa una regione limitata \mathcal{V} dello spazio. Per comodità di scrittura ragioniamo su una carica di volume descritta da una densità di volume ρ ma nulla vieta che siano presenti anche cariche concentrate su superfici, linee o punti; le formule che andiamo a scrivere si generalizzano in maniera ovvia a qualsiasi tipo di distribuzione di carica. Indichiamo con \vec{r}' il vettore posizione di un generico punto sorgente e con \vec{r} quello di un punto campo rispetto a un'origine O . Vogliamo trovare un'espressione approssimata per il campo a grande distanza dalla distribuzione di carica; ciò significa che possiamo (vedi figura 3.8) scegliere l'origine O in maniera tale che risulti

$$r' \ll r \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{r'}{r} \ll 1. \quad (3.22)$$

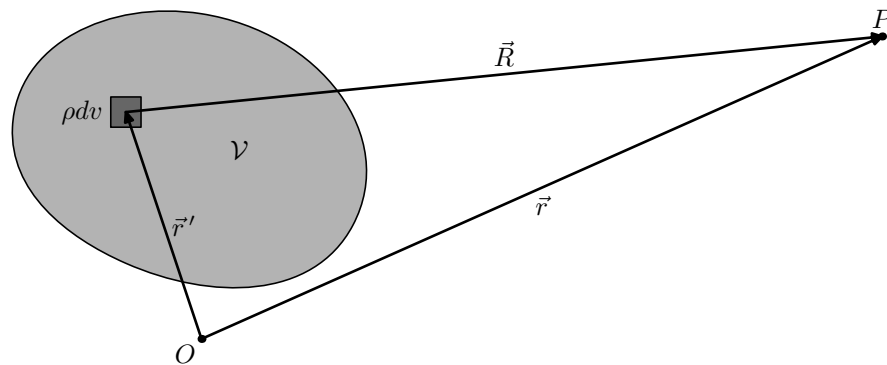


Figura 3.8: Campo a grande distanza da una distribuzione di carica.

Dalla (2.17), l'espressione esatta per la funzione potenziale in \vec{r} è

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dv, \quad (3.23)$$

dove

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} = r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\hat{r} \cdot \frac{\vec{r}'}{r}}.$$

Osserviamo che, per la (3.22), il secondo e terzo termine sotto radice sono, rispettivamente, del second'ordine e del primo ordine nel rapporto r'/r . Allora, un'approssimazione al primo ordine per R si ottiene trascurando il secondo termine e usando la formula di Taylor

$$x \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad R \approx r \left(1 - \hat{r} \cdot \frac{\vec{r}'}{r}\right).$$

Ricordando inoltre che, al primo ordine

$$x \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+x} \approx 1 - x,$$

otteniamo infine

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \hat{r} \cdot \frac{\vec{r}'}{r}\right) = \frac{1}{r} + \frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{r^2}.$$

Sostituendo nella (3.23) si ricava l'approssimazione a grande distanza per la funzione potenziale

$$\varphi(\vec{r}) \approx \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}')}{r} dv + \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}') \frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} dv. \quad (3.24)$$

Notiamo che l'integrale nel secondo termine contiene il fattore $r'/r \ll 1$ che non compare nel primo; ciò comporta che, generalmente, questo termine è trascurabile rispetto al primo e perciò la funzione potenziale sia ben approssimata da

$$\varphi(\vec{r}) \approx \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}')}{r} dv = \frac{1}{r} \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}') dv = \frac{Q}{r},$$

dove Q rappresenta la carica totale della distribuzione. Abbiamo ritrovato ciò che, intuitivamente, si poteva dare per scontato: il potenziale a grande distanza da una distribuzione di carica è semplicemente il potenziale di un campo coulombiano. Ma la (3.24) mostra che questa idea è corretta solo quando $Q \neq 0$; se la carica totale è nulla il secondo termine non è trascurabile e la funzione potenziale è data da

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}') \vec{r}' dv.$$

L'integrazione corre sui punti sorgente \vec{r}' e quindi $1/r$ può essere messo in evidenza

Con la definizione di *momento di dipolo*

$$\vec{p} \equiv \int_V \rho(\vec{r}') \vec{r}' dv \quad (3.25)$$

il potenziale si esprime come

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}. \quad (3.26)$$

Questo risultato si applica in particolare alle molecole di un dielettrico che hanno carica totale nulla.

Si notino le dimensioni di \vec{p} che sono [carica] \times [lunghezza]

Osserviamo subito che il momento di dipolo, nel caso di una distribuzione di cariche puntiformi, si esprime, con ovvio significato dei simboli

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i.$$

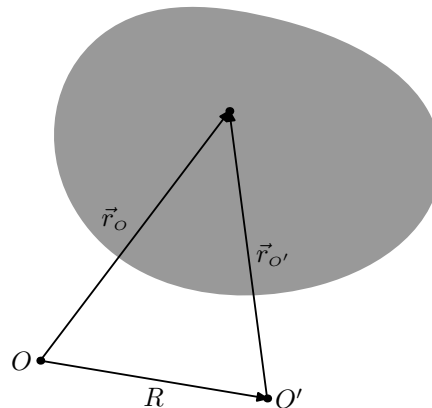
Nota: nella formula a fianco l'apice su \vec{r}_i è stato soppresso; tutte le volte che non c'è necessità di distinguere variabili diverse, come punto campo e punto sorgente, è preferibile evitare fronzoli inutili nei simboli. Qui ovviamente abbiamo a che fare solo con i punti sorgente.

Ovviamente, se sono presenti sia cariche distribuite che concentrate, il momento di dipolo si calcola sommando le due espressioni scritte sopra; il momento di dipolo (come la carica) è un parametro additivo: se una distribuzione ρ_1 ha momento \vec{p}_1 e una distribuzione ρ_2 ha momento \vec{p}_2 , la distribuzione complessiva $\rho_1 + \rho_2$ ha momento

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2.$$

Nella definizione di momento di dipolo compare il vettore posizione \vec{r} degli elementi di carica rispetto a un'origine arbitraria O ; in generale, rispetto a un'origine differente O' il momento di dipolo avrà un valore diverso. Tra i vettori posizione \vec{r}_O e $\vec{r}_{O'}$ di uno stesso elemento di carica, misurati rispetto a O e O' , sussiste la relazione

$$\vec{r}_O = \vec{R} + \vec{r}_{O'},$$



dove $\vec{R} = \overrightarrow{OO'}$. Allora dalla definizione (3.25), sopprimendo l'indicazione esplicita dell'argomento di ρ , risulta

$$\vec{p}_O = \int_V \rho \vec{r}_O dv = \int_V \rho \vec{R} dv + \int_V \rho \vec{r}_{O'} dv = Q \vec{R} + \vec{p}_{O'}. \quad (3.27)$$

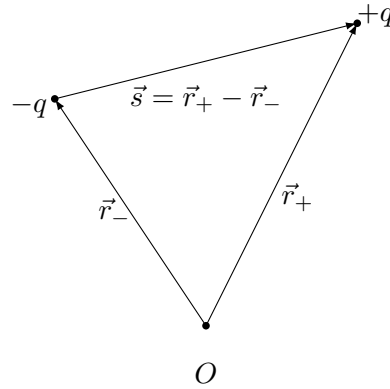
Per le distribuzioni aventi carica totale nulla ($Q = 0$) il momento di dipolo è una grandezza intrinseca, indipendente dalla scelta dell'origine

$$\vec{p}_O = \vec{p}_{O'}.$$

Dal momento che d'ora in avanti ci occuperemo soltanto di distribuzioni a carica totale nulla, non sarà necessario il suffisso che specifica l'origine delle coordinate e indicheremo il momento di dipolo semplicemente con \vec{p} .

Il termine *dipolo* ha origine dal fatto che la più semplice distribuzione di carica che ha $Q = 0$ è quella costituita da due cariche (poli) di segno opposto:

La carica totale Q viene detta momento di monopolo.



Il momento di dipolo si calcola subito dalla definizione

$$\vec{p} = -q\vec{r}_- + q\vec{r}_+ = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = q\vec{s}. \quad (3.28)$$

A conferma di quanto appena dimostrato, il momento di dipolo dipende solo dalla posizione relativa \vec{s} delle due cariche e non dall'origine O . Qualsiasi distribuzione di carica con lo stesso momento \vec{p} , a grande distanza genera un campo elettrico eguale, al primo ordine, a quello della coppia di cariche; per questo motivo un sistema che ha carica totale nulla e momento di dipolo non nullo viene talvolta rappresentato come una coppia di cariche di segno opposto anche se la distribuzione reale è molto più complessa.

Il momento di dipolo della molecola monoatomica deformata da un campo esterno (vedi parte destra della figura 3.6), può essere calcolato facilmente utilizzando l'indipendenza di \vec{p} dalla scelta dell'origine. Infatti, scegliendo O coincidente con il centro della sfera di carica negativa, il contributo dell'integrale (3.25) risulta ovviamente nullo per simmetria; pertanto nel calcolo di \vec{p} occorre solo conteggiare la carica puntiforme q del nucleo. Si ha subito

$$\vec{p} = q\vec{s},$$

dove \vec{s} è il parametro di deformazione, spostamento del nucleo dalla posizione centrale. Dalla (3.21) vediamo allora che il momento indotto in una molecola è proporzionale al campo applicato

$$\vec{p} = a^3 \vec{E}.$$

La relazione di proporzionalità, tra campo inducente e momento di dipolo indotto, resta valida, anche per modelli più realistici, in vista della piccolezza della deformazione, stimata nel calcolo a pag. 87; definiamo il coefficiente di polarizzabilità α di una molecola come il fattore di proporzionalità tra campo e momento

$$\vec{p} \equiv \alpha \vec{E}. \quad (3.29)$$

Sulla base del modello di molecola sferica la polarizzabilità viene stimata dell'ordine di

$$\alpha \approx a^3 \approx 10^{-24} \text{cm}^3.$$

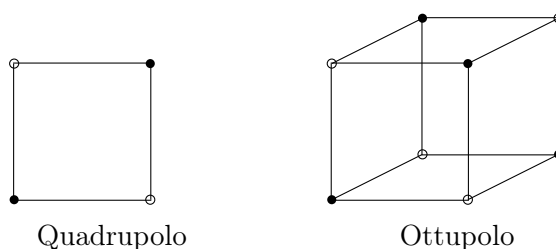
Questa stima viene confermata, come ordine di grandezza, sia dai calcoli quantomeccanici che dalle determinazioni sperimentali. Assumendo ancora un intenso campo macroscopico di 10^2statvolt/cm possiamo valutare il modulo del momento di dipolo indotto

$$p \simeq 10^{-22} \text{statcoulomb} \cdot \text{cm}.$$

Le molecole non simmetriche, come quella dell'acqua, che generano un campo elettrico anche in assenza di campo inducente, vengono descritte anch'esse come dipoli elettrici e vengono chiamate *polari*. Non possiamo calcolare il momento di dipolo di tali molecole con un semplice modello classico, come abbiamo fatto per i momenti indotti; tuttavia conviene menzionare che i momenti intrinseci delle molecole polari sono di vari ordini di grandezza maggiori: per l'acqua, ad esempio

$$p \approx 1.8 \times 10^{-18} \text{statcoulomb} \cdot \text{cm}.$$

Tornando alla discussione di carattere generale, osserviamo che, se, oltre la carica totale, anche il momento di dipolo si annulla, lo sviluppo di $1/R$ al primo ordine in r'/r non è sufficiente a fornire un'approssimazione del potenziale a grande distanza. In questo caso occorre considerare i termini di ordine superiore che sono stati trascurati nella (3.24). Questi termini vengono determinati proseguendo lo sviluppo di $1/R$ fino al second'ordine. Ciò non presenta alcuna difficoltà concettuale ma qualche complicazione algebrica e, dal momento che non ne avremo bisogno per il nostro studio dei dielettrici, tralasciamo i dettagli. Tuttavia è interessante notare che la più semplice distribuzione di carica che ha carica totale nulla e momento di dipolo nullo è costituita da quattro cariche disposte come nella parte sinistra della figura che segue.



I cerchietti pieni e quelli vuoti rappresentano cariche opposte. Seguendo il criterio adottato sopra, questa configurazione viene chiamata *quadrupolo* e il corrispondente campo a grande distanza *campo di quadrupolo*. Se anche il momento di quadrupolo è nullo si procede al terzo ordine e si ha in questo caso l'ottupolo mostrato a destra nella figura. Ovviamente il processo non ha limite: si può dimostrare che il campo a grande distanza di qualsiasi distribuzione di carica può essere approssimato mediante un conveniente multipolo.

3.3.2 Campo di dipolo

Dall'espressione (3.26) del potenziale di dipolo il campo elettrico viene ottenuto calcolando il gradiente. La figura rappresenta le linee di flusso

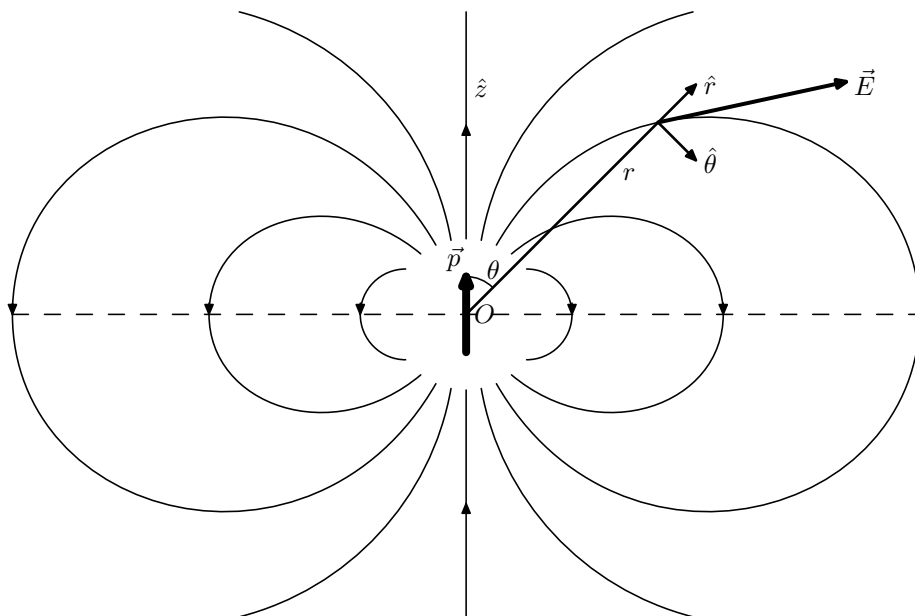


Figura 3.9: Campo di dipolo.

in un piano passante per l'asse \hat{z} su cui giace il vettore \vec{p} ; per simmetria la stessa configurazione di campo si replica identica in tutti gli altri piani passanti per \hat{z} . Si badi bene che il dipolo è *puntiforme*; la rappresentazione mediante una freccia serve a evidenziare la direzione e il verso ma la lunghezza della freccia è arbitraria e non è in alcun modo legata al modulo. Le linee di flusso sono state tracciate escludendo la regione nelle vicinanze del dipolo dove l'approssimazione (3.26) non è valida.

Adottiamo un sistema di coordinate polari con origine O nel dipolo e asse polare coincidente con \hat{z} . Un punto del piano (più precisamente del semipiano avente come bordo l'asse polare) viene individuato dalle coordinate (r, θ) . In termini di queste coordinate il potenziale di dipolo si scrive

$$\varphi(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{r^2}. \quad (3.30)$$

Utilizzando l'espressione (2.23) del gradiente si determinano immediatamente le componenti radiale (lungo \hat{r}) e trasversale (lungo $\hat{\theta}$) di \vec{E} :

$$E_r = 2\frac{p \cos \theta}{r^3} \quad E_\theta = \frac{p \sin \theta}{r^3}. \quad (3.31)$$

Rileviamo alcune significative differenze tra il campo di dipolo e quello di monopolo (coulombiano):

- Il campo di dipolo decresce con $1/r^3$ invece che $1/r^2$.
- Il flusso del campo di dipolo uscente da una superficie chiusa è zero anche se la superficie contiene al suo interno il dipolo.
- Il campo di dipolo non è radiale (e tanto meno centrale) per l'esistenza di una componente trasversale E_θ .

Sull'asse del dipolo ($\theta = 0$) esiste solo la componente radiale $E_r = 2p/r^3$; al crescere di θ da zero a $\pi/2$, a parità di distanza r , la componente radiale decresce e quella trasversale cresce fino al valore massimo $E_\theta = p/r^3$ nel piano equatoriale (rappresentato in figura 3.9 dalla linea tratteggiata). Notiamo infine che sull'asse polare il verso del campo coincide con quello del dipolo mentre nel piano equatoriale il verso è opposto al verso del dipolo.

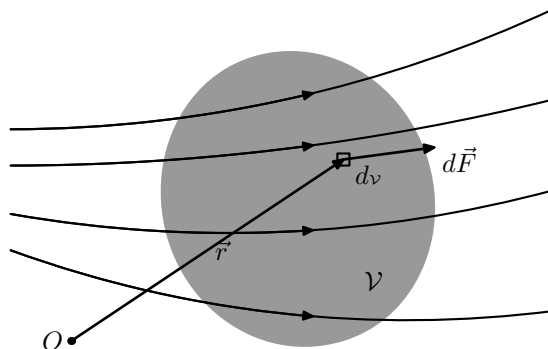
3.3.3 Azioni meccaniche sulle distribuzioni di carica

Il momento di dipolo è un parametro essenziale, non solo per esprimere il campo prodotto *dalle* molecole, ma anche per descrivere le azioni meccaniche esercitate *sulle* molecole da un campo esterno. In questo paragrafo studieremo l'effetto globale del campo sulla molecola come un tutto, senza tener conto della deformazione discussa a pagina 86. Assumeremo quindi una distribuzione di carica rigida e calcoleremo il momento meccanico e la risultante del sistema di forze applicate ai singoli elementi della distribuzione. Per comodità di calcolo, consideriamo una distribuzione di carica di volume, ma i risultati che troveremo si applicano ovviamente anche per cariche concentrate.

La forza agente su un elemento di carica contenuto in una cella infinitesima di volume $d\nu$ centrata intorno a un punto P , è data da

$$d\vec{F} = \vec{E}(\vec{r})\rho(\vec{r})d\nu,$$

dove \vec{r} è il vettore che individua P rispetto a un'origine fissata O .



Nella figura sopra, la regione \mathcal{V} ombreggiata rappresenta la carica, e le linee sottili sono le linee di flusso del campo. La forza risultante e il momento risultante rispetto al polo O , sono espressi da

$$\vec{F} = \int_{\mathcal{V}} \vec{E}(\vec{r}) \rho(\vec{r}) d\mathcal{V},$$

e

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \int_{\mathcal{V}} \vec{r} \times \vec{E}(\vec{r}) \rho(\vec{r}) d\mathcal{V}.$$

Questi integrali non sono in generale semplici da calcolare, ma, se nella regione \mathcal{V} il campo elettrico non varia apprezzabilmente da punto a punto, come accade appunto per una molecola in campo macroscopico, se ne può dare un'espressione in termini del momento di dipolo della distribuzione. Consideriamo dapprima l'approssimazione di ordine zero sul campo, vale a dire che, se \vec{r}_0 è un punto qualsiasi *fissato* nella regione \mathcal{V} , assumiamo

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \vec{E}(\vec{r}_0) \quad (\vec{r}, \vec{r}_0 \in \mathcal{V}).$$

Per la forza risultante si ha allora

$$\vec{F} \approx \vec{E}(\vec{r}_0) \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) d\mathcal{V} = \vec{E} Q,$$

dove Q è la carica totale della distribuzione; per una molecola neutra $Q = 0$, e perciò la forza risultante è nulla.

Se il momento di dipolo non è nullo, esiste un momento risultante anche nell'approssimazione di campo uniforme

$$\vec{\mathcal{M}}_O \approx \left(\int_{\mathcal{V}} \vec{r} \rho d\mathcal{V} \right) \times \vec{E}(\vec{r}_0) = \vec{p}_O \times \vec{E}.$$

Si osservi che l'ordine dei fattori in un prodotto vettore non può essere invertito; perciò il campo elettrico deve restare a destra.

Nel caso di carica totale nulla, né il momento risultante, né il momento di dipolo, dipendono dalla scelta del polo O e si può scrivere semplicemente

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (3.32)$$

Questo momento si annulla se \vec{p} ed \vec{E} sono paralleli o anti-paralleli, e quindi esistono due orientazioni per cui una molecola in un campo esterno è in equilibrio, ma solo la configurazione con i vettori paralleli è stabile. Per vederlo calcoliamo l'energia potenziale. Se φ è la funzione potenziale del campo esterno abbiamo

$$\mathcal{U} = \int_{\mathcal{V}} \varphi(\vec{r}) \rho d\mathcal{V}.$$

Nell'approssimazione di campo uniforme in \mathcal{V} la funzione potenziale, per la (2.12), è

$$\varphi(\vec{r}) = -\vec{r} \cdot \vec{E},$$

Nota Bene: l'espressione a lato *non* è l'energia di aggregazione della distribuzione di carica ρ , ma l'energia per trasportare rigidamente la distribuzione già formata dall'infinito nel campo; \mathcal{U} , non va confusa con la U data dalla 2.38.

e quindi

$$\mathcal{U} = - \int_{\mathcal{V}} \vec{r} \cdot \vec{E} \rho d\nu = - \left(\int_{\mathcal{V}} \vec{r} \rho d\nu \right) \cdot \vec{E} = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos \theta, \quad (3.33)$$

dove θ è l'angolo tra \vec{E} e \vec{p} . L'energia potenziale assume il minimo relativo $-pE$ per $\theta = 0$ (vettori paralleli), mentre è massima per $\theta = \pi$ (vettori anti-paralleli).

In un campo esterno non esattamente uniforme, il momento di dipolo contribuisce anche alla forza totale agente sulla distribuzione. Per vederlo occorre sviluppare $\vec{E}(\vec{r})$ al prim'ordine intorno a \vec{r}_0 . Per semplificare l'algebra, calcoliamo la componente della forza lungo una direzione arbitraria \hat{z}

$$F_z = \int_{\mathcal{V}} E_z(\vec{r}) \rho(\vec{r}) d\nu,$$

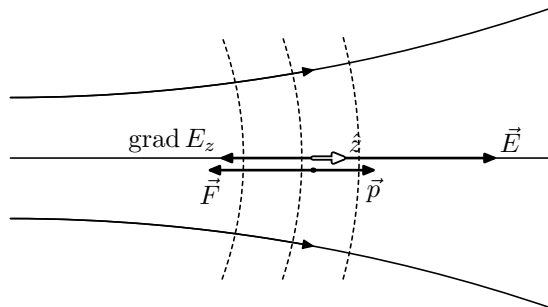
e scegliamo un sistema di assi cartesiani con l'origine O nel punto \vec{r}_0 . Allora le componenti di \vec{r} sono (x, y, z) , e $E_z(\vec{r}) = E_z(x, y, z)$. Lo sviluppo in serie di potenze di x, y, z , arrestato al primo ordine fornisce

$$E_z(x, y, z) \approx E_z(0, 0, 0) + x \frac{\partial E_z}{\partial x} + y \frac{\partial E_z}{\partial y} + z \frac{\partial E_z}{\partial z} = E_z(O) + \vec{r} \cdot \text{grad } E_z,$$

dove $\text{grad } E_z$ è calcolato in O . Sostituendo nell'integrale si ottiene allora

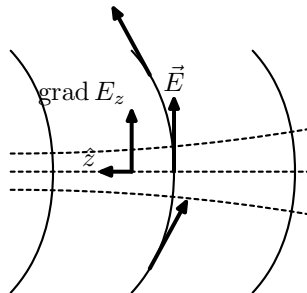
$$F_z = E_z(O) \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) d\nu + \left(\int_{\mathcal{V}} \rho \vec{r} d\nu \right) \cdot \text{grad } E_z = QE_z + \vec{p} \cdot \text{grad } E_z. \quad (3.34)$$

Anche se $Q = 0$ si ha una forza proporzionale al momento di dipolo \vec{p} dovuta alla non uniformità del campo. Dal momento che \hat{z} è arbitrario, questa formula ha la stessa generalità di una formula esplicitamente vettoriale. Tuttavia, la geometria implicita nella formula (3.34) è piuttosto complicata e non è facile, in generale, senza eseguire esplicitamente il calcolo delle componenti lungo tre direzioni ortogonali, rendersi conto della direzione e del verso di \vec{F} . Per farsi un'idea di come funziona la formula studiamo due geometrie di campo particolari. Consideriamo dapprima il caso in cui le linee di flusso convergono (o divergono) simmetricamente nelle adiacenze della linea di flusso che passa per il dipolo come mostrato in figura



Questa geometria si presenta per il campo coulombiano in tutti i punti dello spazio (con linee di flusso rettilinee) oppure per il campo di dipolo sull'asse del dipolo (osservare figura 3.9 ruotando di 90° in senso orario). Applichiamo la (3.34) per determinare la componente della forza lungo la direzione orientata indicata con \hat{z} in figura. Il versore è stato scelto parallelo e concorde con \vec{E} e quindi il campo varia solo lungo \hat{z} e ha componente E_z positiva. Le superfici di livello di E_z hanno l'andamento rappresentato dalle linee tratteggiate in figura; pertanto il gradiente ha la stessa direzione di \vec{E} . Per quanto riguarda il verso, si ricordi (§ 1.5.3) che il campo è più intenso dove le linee di flusso sono più vicine e perciò il vettore $\text{grad } E_z$ ha verso opposto a \vec{E} . Dalla (3.34) si ricava allora che la forza agente su un dipolo parallelo al campo ha componente lungo \hat{z} negativa, mentre su un dipolo anti-parallelo ha componente positiva. Questo risultato può essere formulato in maniera efficace osservando che il dipolo viene attratto nella regione di campo più intenso se \vec{p} è parallelo a \vec{E} (caso mostrato in figura), mentre viene respinto dalla parte dove il campo è meno intenso nel caso opposto. Per esempio due dipoli giacenti sullo stesso asse si attraggono se sono paralleli, si respingono se sono anti-paralleli.

La seconda geometria interessante è quella in cui le linee di flusso sono curve che corrono parallele tra loro:



Un esempio di questa geometria è dato dal campo di dipolo[†] nella zona equatoriale (vedi figura 3.9). In questo caso la componente di \vec{E} che varia è quella trasversale rispetto a \vec{E} , e cioè quella lungo la direzione \hat{z} mostrata in figura. Le superfici di livello sono rappresentate in figura dalle linee tratteggiate; E_z è negativa sulla superficie inferiore, nulla su quella centrale e positiva su quella superiore. Allora, dalla definizione di gradiente, risulta immediatamente che $\text{grad } E_z$ ha la direzione e il verso di \vec{E} . In questa geometria, la forza agente su un dipolo disposto parallelamente al campo è quindi perpendicolare a \vec{E} : \vec{F} ha infatti la direzione di \hat{z} e verso concorde o discorde con quello di \hat{z} secondo che \vec{p} è concorde o discorde con \vec{E} . Ricordando che l'intensità del campo cresce dalla parte dove curvano le linee di flusso (§ 2.1.2), abbiamo che anche in questo caso, se \vec{p} è parallelo e concorde a \vec{E} la forza punta dalla parte dove il campo è più intenso. Per esempio, due dipoli con il piano equatoriale in comune, si attraggono se sono anti-paralleli e si respingono se sono paralleli (vedi la figura 3.9).

[†]È opportuno puntualizzare che l'eventuale dipolo che genera un campo come quello mostrato in figura, non ha niente a che fare con il dipolo su cui il campo agisce.

Esercizio: Determinare l'espressione della forza di attrazione tra due dipoli paralleli, nelle due geometrie 'assiale' e 'equatoriale', in funzione di r .

La conclusione di carattere generale che si può trarre da questi due esempi è che un dipolo orientato concordemente a \vec{E} viene sempre attratto verso le regioni dove il campo è più intenso mentre viene respinto se è anti-parallelo. Vale la pena di puntualizzare che il verso della forza non dipende dal verso del campo ma solo dall'angolo tra \vec{E} e \vec{p} ; infatti, se si cambiano i versi di questi due vettori, dalla (3.34) il segno di $\vec{p} \cdot \text{grad } E_z$ resta immutato. Abbiamo qui la spiegazione dell'esperimento elementare in cui una bacchetta elettrizzata attrae dei pezzetti di carta indipendentemente dal fatto di possedere carica vetrosa o resinosa.

3.3.4 Polarizzazione per orientamento

Se le molecole di un dielettrico polare fossero soggette solo al campo elettrico inducente, il loro moto sarebbe un'oscillazione intorno alla direzione di \vec{E} dovuta al momento meccanico (3.32). Tuttavia una molecola di un corpo macroscopico interagisce con le altre molecole partecipando ai moti caotici microscopici. Questi sono troppo complessi per essere descritti in maniera dettagliata ma ammettono una descrizione statistica: l'orientazione di una molecola nello spazio, e di conseguenza il suo momento di dipolo, è una funzione del tempo $\vec{p}(t)$ di complessità sovrumana, ma la Meccanica Statistica consente di calcolare il valore medio

$$\langle \vec{p} \rangle \equiv \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \vec{p}(t) dt \quad (3.35)$$

su un intervallo di tempo τ , lungo sulla scala dei tempi microscopici. Il contributo al campo macroscopico è determinato proprio da $\langle \vec{p} \rangle$ e non dal valore istantaneo $\vec{p}(t)$. In base alla teoria di Boltzmann la media (3.35) può essere calcolata come media statistica su una distribuzione di probabilità proporzionale a

$$e^{-\mathcal{U}/kT} = e^{\vec{p} \cdot \vec{E}/kT} = e^{pE \cos \theta / kT}$$

dove $k \approx 1.38 \times 10^{-16}$ erg/K è la costante di Boltzmann, T la temperatura assoluta e θ l'angolo tra \vec{p} e \vec{E} . Indicando con \hat{z} il versore di \vec{E} si ha

$$\langle p_z \rangle = \langle p_m \cos \theta \rangle = p_m \langle \cos \theta \rangle,$$

dove p_m è il modulo del momento di dipolo proprio della molecola (una costante) e $\langle \cos \theta \rangle$ il valore medio del coseno dell'angolo tra \vec{p} e \vec{E} mediato su tutte le possibili direzioni con il fattore di Boltzmann

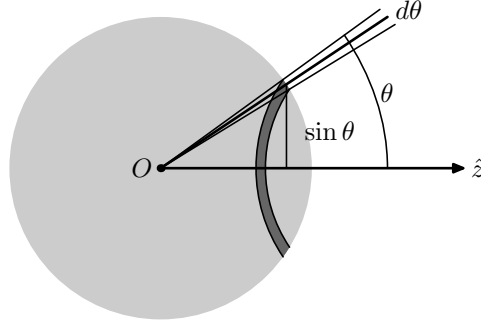
$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\int_{\Omega} \cos \theta e^{p_m E \cos \theta / kT} d\omega}{\int_{\Omega} e^{p_m E \cos \theta / kT} d\omega}.$$



LUDWIG BOLTZMANN
1844 – 1906

Nella formula, $d\omega$ è l'elemento di angolo solido centrato intorno a θ e Ω l'angolo solido 'sferico' (tutte le direzioni).

Nella figura a lato la sfera ombreggiata rappresenta Ω e la striscia più scura (tra due paralleli) $d\omega$. Non occorre prendere $d\omega$ infinitesimo nella direzione della longitudine perché la funzione integranda dipende solo dalla (co)latitudine θ . Si vede subito che



$$d\omega = 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Introducendo il parametro adimensionale

$$\xi \equiv p_m E / kT$$

possiamo scrivere

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\int_0^\pi \cos \theta e^{\xi \cos \theta} \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi e^{\xi \cos \theta} \sin \theta d\theta}.$$

Il denominatore di questa formula si calcola facilmente mediante il cambiamento di variabile $\cos \theta = x$

$$\mathcal{Z} \equiv \int_0^\pi e^{\xi \cos \theta} \sin \theta d\theta = \frac{1}{\xi} (e^\xi - e^{-\xi}),$$

e prende il nome di *funzione di partizione*. Osservando poi che il numeratore è la derivata del denominatore rispetto a ξ abbiamo

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \xi},$$

da cui si ottiene subito

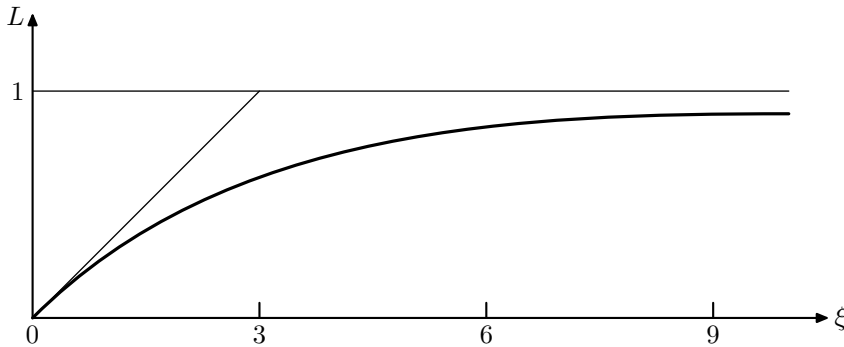


Figura 3.10: Grafico della funzione di Langevin $L(\xi) = \coth \xi - 1/\xi$.

$$\langle \cos \theta \rangle = \coth \xi - \frac{1}{\xi} \equiv L(\xi). \quad (3.36)$$

La funzione $L(\xi)$ il cui grafico è disegnato in figura 3.10, viene detta funzione di Langevin.⁴ L'andamento del grafico è facilmente interpretabile. Per piccoli valori di ξ , che significa energia di interazione campo-dipolo pE piccola rispetto all'energia di agitazione termica kT , il grado di allineamento dei dipoli con il campo applicato è proporzionale a E . Viceversa, per grandi valori di ξ la curva tende asintoticamente a 1 (allineamento completo dei dipoli con il campo). In questo regime, il momento di dipolo indotto diventa praticamente indipendente da E : si ha il fenomeno della saturazione.

A temperatura ambiente, $T \sim 3 \times 10^2 \text{K}$, usando i valori tipici di p e E introdotti a pagina 92, si ha

$$\xi \simeq \frac{1.8 \times 10^{-18} \cdot 10^2}{1.38 \times 10^{-16} \cdot 3 \times 10^2} \simeq 10^{-2}.$$

Si può affermare con sicurezza che, tranne i casi di temperature bassissime, la polarizzazione per orientamento è descritta dall'andamento nell'origine della funzione $L(\xi)$ che, sviluppando la (3.36) al primo ordine è

$$L(\xi) \approx \frac{1}{3}\xi,$$

come mostrato dalla tangente nell'origine in figura 3.10. Quindi il valore medio del momento di dipolo indotto in una molecola polare è

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{p_m^2 \vec{E}}{3kT}.$$

Sopprimendo le parentesi angolari possiamo esprimere questo risultato con la stessa formula valida nel caso di polarizzazione per deformazione (3.29)

$$\vec{p} = \alpha \vec{E},$$

dove la polarizzabilità α è ora

$$\alpha = \frac{p_m^2}{3kT}$$

Rispetto al caso della polarizzazione per deformazione vi è ora una dipendenza dalla temperatura: la polarizzabilità decresce al crescere di T . Inoltre il valore di α è molto più alto di quello che compete alle molecole non polari come si può facilmente verificare sostituendo i valori numerici di riferimento nella formula scritta sopra. Volendo dei valori precisi della polarizzabilità occorre comunque tener presente che anche le molecole polari si deformano e che i due effetti si sommano. Nel contesto di questa esposizione generale tuttavia ciò che interessa è che le molecole acquistano un momento di dipolo proporzionale al campo applicato e di verso concorde con esso.

⁴Questa funzione fu introdotta da Paul Langevin nello studio dei campi magnetici nella materia dove si ha un processo di orientamento di dipoli del tutto analogo a quello che stiamo qui analizzando.

3.3.5 Il vettore densità di polarizzazione

Siamo ora in grado di dare una interpretazione del processo di induzione elettrostatica su un dielettrico: immergendo un corpo in un campo esterno le molecole del materiale acquistano, secondo la (3.29), un momento di dipolo elettrico che ha un valore medio non nullo e contribuiscono al campo elettrico macroscopico. Come già discusso nel paragrafo 1.4, ai fini del calcolo del campo macroscopico, è inutile (e peraltro è impossibile) considerare individualmente i campi delle singole molecole: occorre e basta considerare la densità in numero n delle molecole. In una cella del materiale di volume $d\nu$, macroscopicamente piccola ma abbastanza grande da contenere molte particelle, il numero totale di molecole è

$$dN = n d\nu.$$

Se \vec{p} è il momento di dipolo medio di ciascuna molecola, il momento di dipolo della cella sarà

$$d\vec{p} = \vec{p} dN = n\vec{p} d\nu.$$

Il fattore di proporzionalità tra il volume $d\nu$ della cella e il suo momento di dipolo $d\vec{p}$ viene chiamato *vettore densità di polarizzazione* \vec{P} . Si ha immediatamente

$$\vec{P} = n\vec{p} \quad \Longrightarrow \quad d\vec{p} \equiv \vec{P} d\nu. \quad (3.37)$$

Il vettore \vec{P} caratterizza completamente lo stato elettrico del materiale. Infatti la funzione potenziale del campo prodotto dal dielettrico è la somma dei potenziali prodotti dalle singole celle e per la (3.26) sarà espressa come

$$\varphi = \int_{\mathcal{V}} \frac{d\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{r^2} d\nu, \quad (3.38)$$

dove \mathcal{V} è la regione occupata dal materiale. Fin qui le formule si applicano a qualsiasi materiale isolante perché nessuna ipotesi è stata ancora fatta sulla relazione tra \vec{P} e il campo macroscopico. La caratterizzazione dei diversi isolanti viene data da una legge costitutiva che permette di determinare il vettore densità di polarizzazione. Per i dielettrici abbiamo che il momento di dipolo di una molecola, per la (3.29), è $\vec{p} = \alpha \vec{E}$ e quindi l'equazione costitutiva è la semplice relazione di proporzionalità

$$\vec{P} = n\alpha \vec{E} = \chi_e \vec{E}. \quad (3.39)$$

Il fattore di proporzionalità χ_e , parametro caratteristico di ciascun materiale, viene chiamato *suscettività elettrica* del dielettrico. Si osservi che le dimensioni di \vec{P} sono le stesse di quelle di \vec{E} ; la suscettività è quindi un parametro adimensionale. Conviene notare che nel SI invece, \vec{P} e \vec{E} non sono grandezze omogenee e l'equazione costitutiva viene scritta $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$; tuttavia, con questa definizione la suscettività nel SI è identica a quella del sistema gaussiano. Osservando la (3.37) si vede subito che la suscettività è legata alla polarizzabilità

$$\chi_e = n\alpha. \quad (3.40)$$

Per i solidi che hanno una struttura cristallina macroscopica χ_e dipende, in generale, dalla direzione di \vec{E} . In questo caso \vec{P} e \vec{E} , pur continuando ad essere proporzionali tra loro, non hanno la stessa direzione. Per semplicità escluderemo dalla trattazione questi materiali anisotropi.

Questa relazione è stata ricavata nell'ipotesi che il campo agente su una molecola coincida con il campo macroscopico. In realtà, qui abbiamo un esempio della perturbazione prodotta sul campo dal corpo di prova, cui si è fatto cenno nella nota a margine a pagina 9; il campo agente su una molecola è influenzato dalla presenza della molecola stessa. Inoltre, la nozione di campo macroscopico è applicabile solo a corpi di prova che mediano il campo su regioni macroscopiche, e questo non è il caso di una molecola in un dielettrico solido. Di questi effetti si può tenere conto attraverso un'analisi dettagliata, che però non mi pare il caso di includere in questa esposizione elementare. Mi limito perciò a fornire un importante risultato, espresso dalla seguente *formula di Clausius-Mossotti*

$$\chi_e = \frac{n\alpha}{1 - (4\pi/3)n\alpha}.$$

Questa formula costituisce un'approssimazione molto migliore della (3.40) ma è comunque applicabile solo per valori di $n\alpha$ ben al di sotto dell'unità. Se il prodotto $n\alpha$ è abbastanza piccolo, come avviene per esempio nei gas, anche la semplice (3.40) è un'approssimazione accettabile. In ogni caso, la relazione di proporzionalità tra \vec{P} ed \vec{E} resta valida, e la suscettività χ_e , che è una grandezza macroscopica, viene determinata sperimentalmente con procedimenti che verranno discussi nel prossimo paragrafo. Le relazioni del tipo della (3.40) o della Clausius-Mossotti sono importanti per calcolare, dal valore noto della suscettività, il parametro microscopico α che dà informazioni sulla struttura delle molecole.

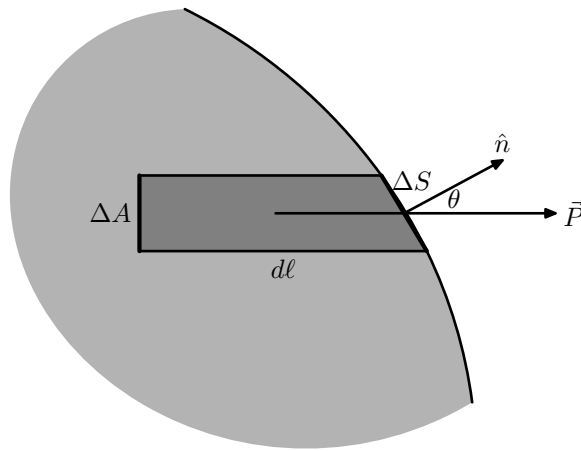
La polarizzazione del dielettrico dà origine alle cariche indotte sulla superficie e, in generale, anche a cariche indotte di volume. Qualitativamente, è facile capire come ciò avvenga. In assenza di campo inducente, la neutralità macroscopica di un dielettrico può essere descritta come perfetta compensazione tra una densità (macroscopica) ρ_+ di cariche positive e una densità ρ_- mediata sulle cariche negative. L'azione del campo inducente porta a uno spostamento relativo delle due distribuzioni che lascia certamente cariche non compensate nella regione del dielettrico vicina alla superficie come mostrato nella figura 3.11. Dal momento che lo spostamento relativo è microscopico le due distribuzioni di segno opposto non compensate hanno spessore trascurabile e vengono quindi descritte come cariche di superficie. L'eventuale apparizione di cariche



Figura 3.11: La polarizzazione di un dielettrico comporta uno spostamento relativo delle distribuzioni di carica ρ_+ e ρ_- .

di volume è determinata dal fatto che gli spostamenti delle due distribuzioni non sono delle semplici traslazioni rigide ma comportano anche deformazioni che alterano le densità ρ_+ e ρ_- che non si sommano a zero neanche all'interno del dielettrico.

Per determinare le relazioni tra il vettore \vec{P} e le cariche di polarizzazione consideriamo una suddivisione del dielettrico effettuata mediante celle cilindriche disposte parallelamente a \vec{P} . Nella figura sotto è rappresentata una cella che ha una delle basi coincidente con un elemento di superficie del dielettrico; la cella è indicata da un'ombreggiatura più scura rispetto al resto del dielettrico.



La base ΔA è perpendicolare a \vec{P} mentre la base ΔS coincide con un elemento della superficie. Il momento di dipolo della cella è

$$\Delta p = P \Delta v = P \Delta A dl = \Delta q dl.$$

L'ultimo passaggio evidenzia il fatto che il momento di dipolo della cella è uguale a quello di una coppia di cariche $-\Delta q$ e Δq poste rispettivamente sulle basi ΔA e ΔS . Osservando che $\Delta A = \Delta S \cos \theta$ abbiamo

$$\Delta q = P \Delta A = P \Delta S \cos \theta = \vec{P} \cdot \hat{n} \Delta S.$$

Pertanto la *densità di carica di polarizzazione* sulla superficie è

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}. \quad (3.41)$$

Nella figura, la freccia che rappresenta il vettore \vec{P} è applicata al centro della cella ma, in vista del fatto che dl è infinitesimo, si può asserire che la formula vale per il limite di \vec{P} sulla superficie. La (3.41) costituisce quindi una sorta di teorema di Coulomb per i dielettrici; si tenga però ben presente che, a differenza del campo elettrico sulla superficie di un conduttore, \vec{P} non è necessariamente perpendicolare alla superficie del dielettrico.

La carica interna al dielettrico, $-\Delta q$, viene neutralizzata da una carica di segno opposto perché l'elemento ΔA è base anche di una cella contigua (non disegnata nella figura). Se però la polarizzazione non è

uniforme si può avere una carica residua che si manifesta come carica di volume. Consideriamo una porzione qualsiasi di dielettrico \mathcal{R} , delimitata da una superficie \mathcal{A} . Per la (3.41) la carica totale sulla superficie è il flusso di \vec{P} uscente da \mathcal{A} . Se questa carica non è nulla, dal momento che la carica totale di una porzione qualsiasi di dielettrico è zero, all'interno di \mathcal{R} è contenuta una carica di volume ρ_p tale che

$$\oint_{\mathcal{A}} \vec{P} \cdot \hat{n} dA + \int_{\mathcal{R}} \rho_p dv = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathcal{R}} (\text{div } \vec{P} + \rho_p) dv = 0.$$

Poiché \mathcal{R} è arbitrario, deve risultare in ogni punto

$$\rho_p \equiv -\text{div } \vec{P}. \quad (3.42)$$

Prova formale delle (3.41), (3.42). A questo stesso risultato si può anche giungere determinando le sorgenti della funzione potenziale (3.38). Occorre riscrivere la formula distinguendo il punto campo \vec{r} dal punto sorgente \vec{r}' :

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{P} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{R^3} dv,$$

dove $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$. Ora si verifica facilmente che

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{R^3} = \text{grad } \frac{1}{R},$$

dove il gradiente è calcolato rispetto al *punto sorgente* (in quanto segue resta inteso che la variabile è \vec{r}' mentre il punto campo è fissato). Inoltre, se f è una funzione scalare e \vec{A} un campo vettoriale, è un facile esercizio dimostrare l'identità

$$\text{div}(f\vec{A}) \equiv f \text{div } \vec{A} + \vec{A} \cdot \text{grad } f.$$

Allora, ponendo $f = 1/R$ e $\vec{A} = \vec{P}$, abbiamo

$$\frac{\vec{P} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{R^3} = \vec{P} \cdot \text{grad } \frac{1}{R} = \text{div } \frac{\vec{P}}{R} - \frac{1}{R} \text{div } \vec{P}.$$

Sostituendo nella (3.38), il potenziale del campo prodotto dal dielettrico si esprime come

$$\varphi = \int_{\mathcal{V}} \text{div } \frac{\vec{P}}{R} dv - \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{R} \text{div } \vec{P} dv.$$

Indicando con S la superficie del dielettrico e applicando il teorema della divergenza al primo integrale a secondo membro otteniamo infine

$$\varphi = \int_S \frac{\vec{P} \cdot \hat{n}}{R} ds + \int_{\mathcal{V}} \frac{-\text{div } \vec{P}}{R} dv. \quad (3.43)$$

Confrontando con l'espressione (2.17) del potenziale di una distribuzione di carica, si vede immediatamente che questa funzione potenziale è generata dalle distribuzioni di superficie e di volume date dalle (3.41) e (3.42). ■

Riassumendo, il meccanismo dell'induzione elettrostatica per i dielettrici viene descritto nel modo seguente: la presenza di un campo esterno produce una polarizzazione delle molecole che altera la neutralità macroscopica del materiale per lo spostamento relativo delle cariche positive rispetto a quelle negative; le distribuzioni di carica di polarizzazione generate in questo processo sono espresse mediante le (3.42) e (3.41) in termini del vettore densità di polarizzazione \vec{P} che rappresenta il momento di dipolo per unità di volume indotto nel dielettrico.

3.4 Elettrostatica dei dielettrici

Le cariche di polarizzazione contribuiscono, come tutte le altre cariche, a generare il campo elettrico; pertanto nell'equazione costitutiva (3.39) il vettore \vec{E} non è noto a priori ma deve essere determinato risolvendo un sistema di equazioni differenziali con condizioni al contorno, del tutto analogo al problema di Dirichlet incontrato per i conduttori. In generale si ha a che fare con sistemi costituiti sia da isolanti, sia da conduttori; per lo più le cariche si trovano sulla superficie dei corpi materiali, ma non si introduce nessuna complicazione nel considerare in generale anche la presenza di cariche di volume. Per tradizione consolidata, si distinguono le cariche di polarizzazione indotte nei dielettrici, che vengono chiamate anche 'cariche legate', da tutte le altre cariche, indicate con ρ_l , σ_l , che vengono dette 'libere'. L'intento sarebbe quello di distinguere le distribuzioni di carica incognite ρ_p , σ_p , dalle cariche che possono essere controllate dallo sperimentatore; in realtà, per i conduttori, si può disporre della carica totale ma non del modo in cui essa si distribuisce sulla superficie. La distinzione risulta comunque utile e scriveremo quindi la legge di Gauss per cariche di volume nella forma

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi(\rho_l + \rho_p).$$

Tenendo presente la (3.42) si ha

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho_l - 4\pi\operatorname{div} \vec{P} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{div} (\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = 4\pi\rho_l.$$

Sulle superfici di separazione tra materiali differenti avremo cariche di superficie che producono una discontinuità della componente normale del campo; per esempio alla superficie di separazione tra un isolante e un conduttore avremo sia cariche libere che cariche di polarizzazione che soddisfano rispettivamente il teorema di Coulomb (3.3) e la (3.41). Qui occorre notare che le equazioni sono state scritte assumendo un verso della normale che punta all'esterno del materiale; di conseguenza quando i due materiali confinano le normali sono opposte. Per rendere le convenzioni coerenti si sceglie[†] il verso della normale uscente per i conduttori e entrante per i dielettrici. Pertanto alla superficie conduttore-isolante la legge di Gauss in forma locale si scrive

$$\vec{E} \cdot \hat{n} = 4\pi(\sigma_l + \sigma_p) = 4\pi\sigma_l - 4\pi\vec{P} \cdot \hat{n} \quad \Longrightarrow \quad (\vec{E} + 4\pi\vec{P}) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma_l.$$

Si è fortemente tentati di definire il vettore *induzione elettrica*[‡]

$$\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad (3.44)$$

che soddisfa la legge di Gauss in forma locale

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho_l, \quad (3.45)$$

e che alla superficie dei conduttori ha una componente normale

$$D_n = 4\pi\sigma_l. \quad (3.46)$$

[†]Ovviamente, qualunque convenzione si scelga, le relazioni tra vettori restano inalterate.

[‡]Il vettore \vec{D} è stato introdotto da Maxwell con il nome di 'spostamento elettrico' caduto ora in disuso.

Queste relazioni valgono per qualsiasi isolante; per i dielettrici abbiamo l'equazione costitutiva (3.39) e quindi

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\chi_e\vec{E} = \varepsilon\vec{E}, \quad (3.47)$$

dove

$$\varepsilon \equiv 1 + 4\pi\chi_e, \quad (3.48)$$

[†]La qualifica di 'costante' per ε si riferisce all'indipendenza da \vec{E} ; la costante dielettrica può dipendere dalla posizione.

viene chiamata la *costante dielettrica*. La costante[†] dielettrica è un parametro caratteristico del materiale che può essere utilizzato in alternativa alla suscettività

$$\chi_e = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}. \quad (3.49)$$

Le leggi di Gauss in forma locale per \vec{D} (3.45) e (3.46) sembrano indicare che il vettore \vec{D} sia indipendente dalle cariche di polarizzazione (e quindi dalla presenza del dielettrico) ma, in generale, non è così. Il punto è che un campo vettoriale risulta univocamente determinato quando, oltre a una legge di flusso, è data anche una legge di circuitazione. Questo lo abbiamo constatato nel caso del campo elettrico \vec{E} , per il quale la legge di circuitazione nulla ha giocato un ruolo essenziale nell'ottenere una determinazione univoca. Per il vettore \vec{D} mostreremo più avanti che, tranne casi particolari, non è possibile dare una legge di circuitazione e perciò non è possibile determinare questo vettore senza aver *prima* calcolato \vec{E} e \vec{P} . Una classe importante di problemi in cui il vettore \vec{D} è conservativo è quella in cui un dielettrico omogeneo (e isotropo) riempie tutta la regione in cui il campo elettrico è non nullo; esempi sono i fenomeni elettrici in aria (invece che nel vuoto) oppure i condensatori completamente riempiti di dielettrico. Dalla (3.47) si ha

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{\ell} = \oint \varepsilon \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \varepsilon \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0.$$

In questo caso il teorema di unicità garantisce che il vettore induzione elettrica è lo stesso sia in assenza che in presenza del dielettrico. In assenza del dielettrico

$$\chi_e = 0 \quad \implies \quad \varepsilon = 1 \quad \implies \quad \vec{D} = \vec{E}.$$

Risolvendo il problema dell'elettrostatica nel vuoto si determina il campo elettrico e quindi \vec{D} . Se \vec{D} è indipendente dalle cariche di polarizzazione, resterà invariato quando sono presenti materiali dielettrici e quindi il campo elettrico nella materia può essere ottenuto dalla (3.47)

$$\vec{E} = \vec{D}/\varepsilon.$$

Questo risultato può essere espresso semplicemente asserendo che il campo elettrico in un dielettrico omogeneo rispetto al campo nel vuoto si riduce[‡] di un fattore $1/\varepsilon$. A questa conclusione si può giungere anche senza introdurre il vettore \vec{D} , con un ragionamento che ha il merito di mettere in luce il motivo per cui il campo si riduce. Osserviamo in primo

[‡]Si noti che, essendo la suscettività χ_e positiva è sempre $\varepsilon > 1$.

luogo che, nell'ipotesi di dielettrico omogeneo sia le cariche di polarizzazione di volume che quelle di superficie sono proporzionali alle cariche libere secondo il fattore $-4\pi\chi_e/\varepsilon$; infatti

$$\rho_p = -\operatorname{div} \vec{P} = -\chi_e \operatorname{div} \vec{E} = -4\pi\chi_e(\rho_l + \rho_p) \Rightarrow \rho_p = -\frac{4\pi\chi_e}{\varepsilon}\rho_l,$$

e, ricordando che le eventuali superfici di confine del dielettrico coincidono con superfici di conduttori,

$$\sigma_p = -\vec{P} \cdot \hat{n} = -\chi_e \vec{E} \cdot \hat{n} = -4\pi\chi_e(\sigma_l + \sigma_p) \Rightarrow \sigma_p = -\frac{4\pi\chi_e}{\varepsilon}\sigma_l.$$

Alla distribuzione di carica nel vuoto, quando viene inserito il dielettrico, si sovrappone una distribuzione di carica di polarizzazione che punto per punto è di segno opposto; da ciò segue che la carica totale, somma della carica libera e di quella di polarizzazione si riduce appunto di un fattore

$$1 - \frac{4\pi\chi_e}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Su questo risultato si basa un metodo semplice e preciso per la determinazione della costante dielettrica, consistente nel misurare la differenza di potenziale tra le armature di un condensatore carico e isolato, prima nel vuoto e poi con tutto lo spazio tra le armature riempito di dielettrico. La riduzione di un fattore $1/\varepsilon$ del campo elettrico comporta ovviamente la riduzione, per lo stesso fattore, del potenziale

$$\frac{V_{\text{vuoto}}}{V_{\text{dielettrico}}} = \varepsilon. \quad (3.50)$$

I risultati delle determinazioni sperimentali di ε consentono di conoscere la suscettività e da questa, per mezzo della formula di Clausius-Mossotti, la polarizzabilità. Per i gas si trova un valore della costante dielettrica di poco superiore all'unità, corrispondente a una suscettività dell'ordine di 10^{-4} ; assumendo una densità di molecole n dell'ordine di 10^{19}cm^{-3} si ottiene una polarizzabilità α dell'ordine di 10^{-24}cm^3 come stimato sulla base del modello di molecola discusso in precedenza. Per i liquidi e i solidi il valore molto più grande di n comporta costanti dielettriche significativamente maggiori dell'unità ma, di solito, minori di 10; un'eccezione notevole è l'acqua con una costante $\varepsilon \approx 80$.

Un'importante applicazione della (3.50) è che un condensatore riempito di dielettrico ha una capacità maggiore che nel vuoto

$$C_{\text{dielettrico}} = \varepsilon C_{\text{vuoto}}.$$

La riduzione del campo elettrico di un fattore $1/\varepsilon$ nel caso di una sola carica puntiforme q_1 implica che la forza agente su un'altra carica q_2 si riduce anch'essa in proporzione; pertanto in un dielettrico la legge di Coulomb si scrive

$$F = \frac{1}{\varepsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

L'attenuazione della forza coulombiana rende conto delle ottime proprietà dell'acqua come solvente.

In tutti i casi in cui il dielettrico non è omogeneo il problema dell'elettrostatica deve essere impostato come ricerca della soluzione dell'equazione di Poisson per il potenziale elettrostatico

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi(\rho_l + \rho_p), \quad (3.51)$$

dove la densità di carica ρ_p non è nota a priori ma è espressa in termini del vettore \vec{P}

$$\rho_p = -\text{div } \vec{P}, \quad (3.52)$$

che a sua volta è legato al potenziale dall'equazione costitutiva

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E} = -\chi_e \text{grad } \varphi. \quad (3.53)$$

Questo sistema di equazioni deve essere risolto con l'usuale condizione al contorno per φ sulle superfici dei conduttori e con in più le condizioni sulla discontinuità delle componenti normali di \vec{E} e \vec{P}

In queste relazioni la normale è *entrante* nel dielettrico.

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \hat{n} = 4\pi(\sigma_l + \sigma_p) \quad \vec{P} \cdot \hat{n} = -\sigma_p. \quad (3.54)$$

Si tratta evidentemente di un problema molto più complesso di quello nel vuoto, per il quale ben di rado è possibile dare una soluzione analitica in forma chiusa; nelle applicazioni si ricorre per lo più a metodi numerici. Tuttavia, anche in questo caso vale un teorema di unicità, il che significa essenzialmente che l'insieme delle leggi scritte sopra descrive in maniera esauriente il sistema fisico. Ciò non può dirsi delle leggi per il vettore \vec{D} . Per illustrare questa affermazione consideriamo un problema assai semplice per il quale si ottiene agevolmente una soluzione. Il condensa-

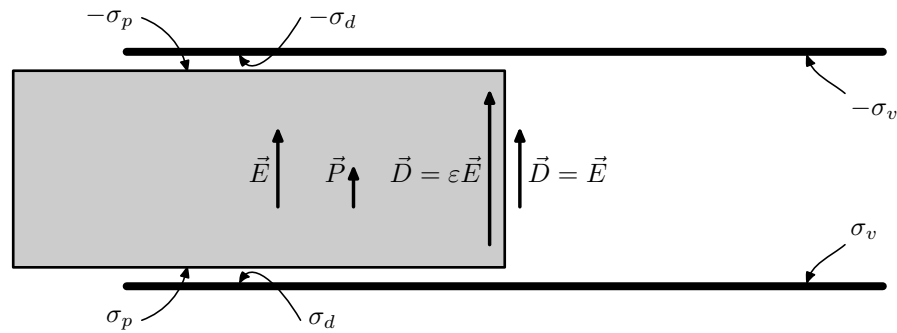


Figura 3.12: Campo elettrico in un condensatore parzialmente riempito di dielettrico

tore in figura 3.12 è isolato e porta una carica Q sull'armatura inferiore (e una carica $-Q$ sull'armatura superiore). Un dielettrico di costante dielettrica ϵ riempie per metà lo spazio tra le armature. Lontano dai bordi il campo elettrico è uniforme e ha lo stesso valore sia nel dielettrico che nel vuoto perchè la differenza di potenziale tra le armature è la stessa, sia che venga calcolata lungo un percorso nel dielettrico, che

nel vuoto. Con ciò le equazioni (3.51,3.52) sono soddisfatte con densità di carica di volume nulle. Occorre, quindi, solo imporre le condizioni al contorno (3.54) e tenere conto dell'equazione costitutiva. Indicando con σ_d la densità di carica *libera* sulla parte dell'armatura inferiore in contatto con il dielettrico (in figura le due superfici sono disegnate separate per evidenziare che le cariche libere sono sul conduttore mentre quelle di polarizzazione si trovano sul dielettrico), e con σ_v la densità sulla parte di armatura confinante col vuoto si ha

$$\sigma_d + \sigma_p = \sigma_v.$$

La carica di polarizzazione può essere eliminata per mezzo dell'equazione costitutiva

$$-\sigma_p = \chi_e 4\pi(\sigma_d + \sigma_p) \implies \sigma_p = -\frac{4\pi\chi_e}{\varepsilon}\sigma_d,$$

ottenendo con passaggi algebrici banali

$$\sigma_d = \varepsilon\sigma_v.$$

L'ultima condizione da imporre è che la carica totale (libera) sull'armatura inferiore è Q ; indicando con A l'area si ha

$$\frac{1}{2}A\sigma_d + \frac{1}{2}A\sigma_v = Q = A\sigma,$$

indicando σ la densità uniforme sull'armatura in assenza di dielettrico. Le ultime due equazioni consentono di ricavare le due densità incognite in termini della densità nota σ

$$\sigma_d = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\sigma, \quad \sigma_v = \frac{2}{1+\varepsilon}\sigma.$$

Con questo la soluzione del problema è completa. Si osservi che alla superficie di separazione dielettrico-vuoto, mentre la componente tangenziale di \vec{E} è continua (come si conviene a un campo conservativo), la componente tangenziale di \vec{D} ha una discontinuità pari a

$$(\varepsilon - 1)\vec{E} = 4\pi\vec{P}.$$

Dalla definizione (3.44) questa discontinuità si presenta tutte le volte che il vettore \vec{P} non è perpendicolare alla superficie del dielettrico. Pertanto il vettore induzione elettrica in generale non è conservativo e non è derivabile da una funzione potenziale. Osserviamo inoltre che, rispetto al caso di un dielettrico omogeneo che riempie tutta la regione in cui $\vec{E} \neq 0$, la distribuzione delle cariche libere viene alterata dalla introduzione del dielettrico. Lo sperimentatore può fissare la carica totale delle armature di un condensatore ma non la maniera in cui questa si distribuisce. Quindi non è neanche possibile conoscere a priori, senza risolvere il problema dell'elettrostatica, il flusso di \vec{D} uscente da una superficie chiusa. La conclusione è che il vettore induzione elettrica è essenzialmente una grandezza fisica inutile e nel seguito di questo libro non se ne parlerà più. Tuttavia, dal momento che nella letteratura scientifica esso è ancora largamente usato era necessario darne la definizione.

Esercizio: Discutere il problema del condensatore riempito per metà nel caso in cui è fissato il potenziale V invece che la carica. Calcolare la capacità di un condensatore riempito per una frazione $f < 1$ del volume totale.

Capitolo 4

Il Principio di Relatività

Le leggi della meccanica classica sono identiche in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Si può dire lo stesso delle leggi dell'elettromagnetismo? Questa domanda costituì il punto focale del dibattito che impegnò i più importanti studiosi tra la fine dell'ottocento e i primi anni del novecento. Nel 1905 Einstein diede una risposta affermativa, che oggi è universalmente accettata dalla comunità scientifica, introducendo in fisica delle idee che vanno sotto il nome di *Relatività Ristretta**. Una reale comprensione delle leggi dell'elettromagnetismo non si può ottenere senza una discussione di queste idee che, ritenute da molti assurde e paradossali agli esordi, sono oggi facilmente accettabili per la nostra consuetudine con una tecnologia molto più evoluta di quella di un secolo fa. In questo capitolo verranno discussi gli elementi basilari della relatività ristretta e le applicazioni ai campi elettrici prodotti da cariche in moto. Per il momento ci occuperemo solo delle situazioni in cui tutte le cariche hanno la stessa velocità uniforme; in sostanza studieremo i fenomeni elettrostatici in un sistema inerziale diverso da quello in cui tutte le cariche sono in quiete. Dal momento che le idee di Einstein partono da un'analisi critica delle nozioni di spazio e tempo della meccanica classica occorre fare un passo indietro, tornare a Galilei e ridiscutere rapidamente i principi della meccanica classica.

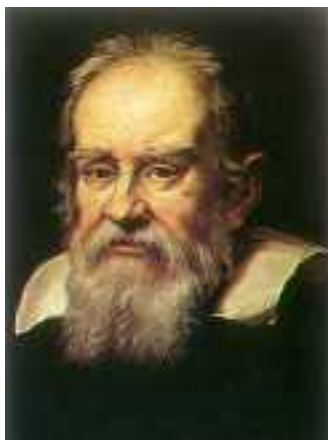
*La qualifica di 'ristretta' è usata per distinguere questa teoria dalla Relatività Generale, anch'essa formulata da Einstein, che riguarda l'interazione gravitazionale di cui non ci occuperemo. Invero, la scelta dell'aggettivo non è felice perché, allo stato attuale delle conoscenze, *qualsiasi* teoria fisica (inclusa la Relatività Generale) deve conformarsi ai principi della Relatività Ristretta.

4.1 Relatività di Galilei

Et haec perinde se habere, ac si diceret
Virgilianus Aeneas, dum ait
“Provehimur portu, terraeque urbesque recedunt”.

NICOLAUS COPERNICUS
De Revolutionibus Orbium Caelestium

Nel febbraio del 1632 venne pubblicato il trattato sulla cosmologia di Galileo Galilei “DIALOGO SOPRA I DUE MASSIMI SISTEMI DEL MONDO”. In quest'opera, che venne sequestrata dopo pochi mesi e costò a Galilei il ben noto processo davanti al Sant'Uffizio, viene sostenuta la validità della proposta di Copernico di un sistema planetario orbitante intorno al



GALILEO GALILEI
1564 – 1642

Sole, contro l'antica concezione Tolemaica di una Terra ferma al centro dell'universo. Uno degli argomenti dei tolemaici era che il moto della Terra dovrebbe dare luogo a un moto in senso contrario di tutto ciò che alla Terra non è fissato: né gli uccelli, né le nuvole né i proiettili potrebbero mai andare verso est perché il nostro pianeta li sopravanza muovendosi verso est con una velocità assai più grande. L'obiezione si basa sulla assunzione, risalente ad Aristotele, che un corpo non soggetto a forze rimane in quiete in una posizione fissata dello spazio e se anche è inizialmente in moto perderà via via la propria velocità tornando alla quiete. Anche oggi questa concezione erronea è radicata, più o meno consapevolmente, nella mente di molte persone, perché corrisponde, in apparenza, alla nostra esperienza quotidiana. Vediamo come risponde Galilei nel *DIALOGO*:

... Rinserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animalletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; suspendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animalletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice a piè giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder così, fate muovere la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma: voi saltando passerete nel tavolato i medesimi spazii che prima, né, perché la nave si muova velocissimamente, farete maggiori salti verso la poppa che verso la prua, benché, nel tempo che voi state in aria, il tavolato sottopostovi scorra verso la parte contraria al vostro salto; e gettando alcuna cosa al compagno, non con più forza bisognerà tirarla, per arrivarlo, se egli sarà verso la prua e voi verso la poppa, che se voi fuste situati per l'opposito; le goccioline cadranno come prima nel vaso inferiore, senza caderne pur una verso poppa, benché, mentre la gocciola è per l'aria, la nave scorra molti palmi; i pesci nella lor acqua non con più fatica noteranno verso la precedente che verso la susseguente parte del vaso, ma con pari agevolezza verranno al cibo posto su qualsivoglia luogo dell'orlo del vaso; e finalmente le farfalle e le mosche continueranno i lor voli indifferentemente verso tutte le parti, né mai accaderà che si riduchino verso la parete che riguarda la poppa, quasi che fussero stracche in tener dietro al veloce corso della nave, dalla quale per lungo tempo, trattenendosi per aria, saranno state separate; ...

L'esempio della nave mostra che l'obiezione dei tolemaici non ha validità perché l'effetto del moto della Terra che essi si aspettano non esiste. Anche se l'italiano di Galilei suona desueto alle nostre orecchie credo sia

difficile esprimersi in maniera più efficace. La forza del suo argomento, tra l'altro, sta nel fatto che nessuno sente il bisogno di eseguire realmente l'esperimento descritto perché egli non fa altro che mettere in evidenza fatti che chiunque ha osservato senza riconoscerne l'importanza. Usando il linguaggio della fisica moderna possiamo inferire dall'osservazione di Galilei il seguente enunciato generale

Principio di Relatività di Galilei: in due diversi sistemi di riferimento in moto relativo traslatorio uniforme (per es. la Terra e la nave), i processi meccanici si svolgono nello stesso modo e perciò le leggi della meccanica sono identiche.

Prima di procedere oltre conviene puntualizzare la distinzione tra *'sistema di riferimento'* e *'sistema di coordinate'*; un sistema di riferimento è un corpo rigido o un insieme di corpi le cui posizioni relative sono invariabili, che viene assunto per definizione in quiete. Un sistema di coordinate è invece una scelta di parametri (distanze e/o angoli), che individuano un punto dello spazio rispetto al sistema di riferimento. Per esempio, la Terra è un sistema di riferimento, mentre la latitudine e la longitudine sono un sistema di coordinate. La distinzione è importante perché la scelta del riferimento ha rilevanza fisica, mentre la scelta delle coordinate non ne ha alcuna.

Una conseguenza immediata del Principio di Relatività è che la concezione aristotelica della quiete come stato di moto "naturale" di un corpo non soggetto ad azioni esterne, non è valida; infatti, un corpo che appare fermo in un sistema di riferimento non lo sarà in un diverso riferimento in moto rispetto al precedente. Lo stato di quiete non è *relativisticamente invariante* e perciò non può intervenire nella formulazione dei principi della meccanica. In accordo con Galilei, la meccanica deve essere basata invece sul

Principio di Inerzia: Un punto materiale 'libero', non soggetto ad alcuna azione esterna, si muove con velocità costante (eventualmente nulla). In altre parole lo stato di moto naturale non è la quiete ma il moto rettilineo uniforme.

Questo enunciato soddisfa il Principio di Relatività perché un moto che si svolge con velocità costante rispetto a un riferimento, appare uniforme in tutti i riferimenti in moto traslatorio uniforme rispetto al primo[†]. Si definiscono *'inerziali'* i sistemi di riferimento in cui vale il principio di inerzia. Ovviamente, non tutti i riferimenti sono inerziali: in un sistema accelerato o rotante rispetto ai sistemi inerziali, il moto di un corpo libero non appare rettilineo uniforme. La scelta di un sistema accelerato ha effetti osservabili sui processi meccanici come può testimoniare chiunque di noi in base all'esperienza fatta con automobili, giostre etc. Per procedere con l'indagine sulle leggi della meccanica occorre quindi, preliminarmente, individuare la famiglia dei riferimenti inerziali. Isaac Newton nella sua opera *PHILOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA* pubblicata nel luglio del 1686 fornì a questa domanda una risposta che è stata

[†]L'invarianza relativistica della nozione di moto uniforme deriva dalle leggi di trasformazione delle grandezze cinematiche che verranno discusse nel paragrafo successivo.



ISAAC NEWTON
1642 – 1727

ritenuta valida dalla comunità scientifica per più di due secoli. Newton partiva dal principio metafisico della esistenza di uno Spazio Assoluto che *“per sua natura e indipendentemente da qualsiasi influenza esterna rimane sempre immutato e immobile”*. I sistemi di riferimento inerziali saranno quelli in moto traslatorio uniforme (o in quiete) rispetto allo spazio assoluto.

Newton suggerisce diversi esperimenti per individuare un moto accelerato rispetto allo Spazio Assoluto. Certamente il più famoso di questi è l'esperimento del secchio, che egli asserisce di aver effettuato personalmente. Si tratta di sospendere un secchio pieno d'acqua ad una corda ritorta molte volte su se stessa. Il secchio comincia a ruotare sul proprio asse via via che la corda si srotola ma l'acqua che esso contiene, in una prima fase, resta in quiete e la sua superficie resta piana. In un secondo momento, per attrito, l'acqua viene trascinata nel moto di rotazione e la superficie diventa concava sollevandosi ai bordi e scendendo al centro. Se poi il secchio viene bruscamente arrestato l'acqua continua a ruotare e la superficie resta concava. Infine anche l'acqua si ferma e la superficie torna a essere piana. Anche questo è un esperimento che nessuno sente il bisogno di effettuare ma che consente di fare un'osservazione di portata molto generale: il moto dell'acqua relativamente al secchio non ha alcuna influenza sulla forma della superficie; ciò che determina la configurazione dell'acqua è il moto rispetto alle stelle fisse: quando essa ruota rispetto alle stelle fisse ha una superficie concava, quando non ruota la superficie è piana. Da ciò Newton inferì che i sistemi di riferimento inerziali sono quelli in moto traslatorio uniforme rispetto alle stelle fisse e, supponendo che il centro del Sole sia animato da un tale moto, adottò il sistema di riferimento proposto da Copernico. In verità l'esperimento del secchio è troppo grossolano per mettere in evidenza la lenta rotazione della Terra, ma una dimostrazione sperimentale venne data nel 1851 da Foucault[†] con il suo bellissimo esperimento sul pendolo.

Nonostante il successo enorme della teoria di Newton la nozione di spazio assoluto fu sottoposta a severa critica da Leibnitz, Berkeley, Huygens (e difesa da Eulero e Kant). Per un'ampia esposizione di questo dibattito rimando il lettore interessato alla consultazione di: Max Jammer, *Concepts of Space*, Harvard University Press (1954). Qui sarà sufficiente sintetizzare (all'estremo) le due concezioni che si fronteggiano, al modo seguente: (a) lo spazio è una sorta di “contenitore” in cui gli oggetti materiali sono immersi; (b) lo spazio è una qualità posizionale del mondo degli oggetti sensibili. Dal punto di vista (a) lo spazio è una sorta di entità superiore che esiste indipendentemente dai corpi presenti in essa, e ha senso parlare di “spazio vuoto”. Dal punto di vista (b) non esiste lo spazio senza gli oggetti materiali e non ha senso parlare di spazio vuoto. Chiaramente la scelta di Newton è quella della concezione (a) e nell'ambito della Fisica questa concezione ha dominato lo sviluppo della meccanica fino alla fine del secolo scorso, quando l'idea di spazio assoluto è entrata in conflitto con le osservazioni sperimentali. Considerazioni del tutto analoghe valgono per la nozione di tempo. Newton dice: *“Il tempo*

[†]Per una discussione dettagliata si può consultare l'articolo disponibile sulla mia pagina web.

assoluto, vero, matematico, in sé e per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, scorre uniformemente ...” . Si tratta evidentemente ancora di una concezione del tipo (a): i processi naturali sono, per così dire, “immersi” in una realtà superiore che ne determina l’ordine e la durata senza essere in alcun modo influenzata da essi. Il tempo fluisce anche se nulla accade. Viceversa, dal punto di vista della concezione (b), solo l’evolvere dei sistemi fisici consente di dare un significato alla nozione di tempo. In effetti una concezione del tipo (a) è ancora compatibile con la relatività ristretta se alle nozioni di spazio assoluto e di tempo assoluto si sostituisce quella di spazio-tempo assoluto (vedi il paragrafo seguente). Tuttavia, se ci sforza di tener sempre presente che il concetto di spazio è una nostra costruzione mentale (in cui non si può piantare un chiodo!), la comprensione di quanto segue verrà assai agevolata.

4.2 La meccanica di Newton

Il principio di relatività impone restrizioni molto forti sulle leggi della meccanica; esse infatti dovranno essere espresse esclusivamente in termini di grandezze fisiche *invarianti*, che assumono cioè lo stesso valore per tutti gli osservatori inerziali. Prima di Einstein si riteneva che fossero invarianti la distanza tra due punti dello spazio e l’intervallo di tempo tra due eventi. Queste ipotesi sembravano così ovvie che non venivano neanche dichiarate esplicitamente; semplicemente, nessuno era mai stato sfiorato dall’idea che la misura della lunghezza di un corpo in moto potesse dare un risultato diverso da quello ottenuto quando il corpo è in quiete o che la durata di un processo fisico potesse apparire diversa ad osservatori diversi: tutta l’esperienza del mondo sensibile che ognuno di noi ha maturato fin dalla primissima infanzia contribuisce alla formazione dell’idea, più o meno consapevole, che lo spazio e il tempo siano delle entità assolute e immutabili (per dirla con Newton) e sembra quindi inconcepibile che lo stato di moto di un osservatore possa alterarle. Lo scopo di questo paragrafo è di richiamare le leggi fondamentali della meccanica classica evidenziando la loro dipendenza, oltre che dal principio di relatività, dalla ipotesi di invarianza delle lunghezze e dei tempi.

Nella figura 4.1 sono schematicamente disegnati due corpi rigidi rispetto ai quali le posizioni degli oggetti dello spazio vengono individuate a partire dalle origini O e O' .

Ciascuno dei sistemi di riferimento è dotato di un orologio. Nella figura i due orologi segnano la stessa ora in virtù della ipotizzata invarianza dei tempi. I due osservatori potrebbero anche scegliere istanti diversi come tempo zero, come fanno tutti i paesi del mondo che regolano gli orologi in corrispondenza del meridiano in cui si trovano. Ma questo non è importante ai fini della presente discussione perché solo gli intervalli di tempo hanno rilevanza in fisica e non il valore di t . Usando un apice per distinguere le grandezze misurate da O' da quelle misurate da O si scrive

$$t' = t. \quad (4.1)$$

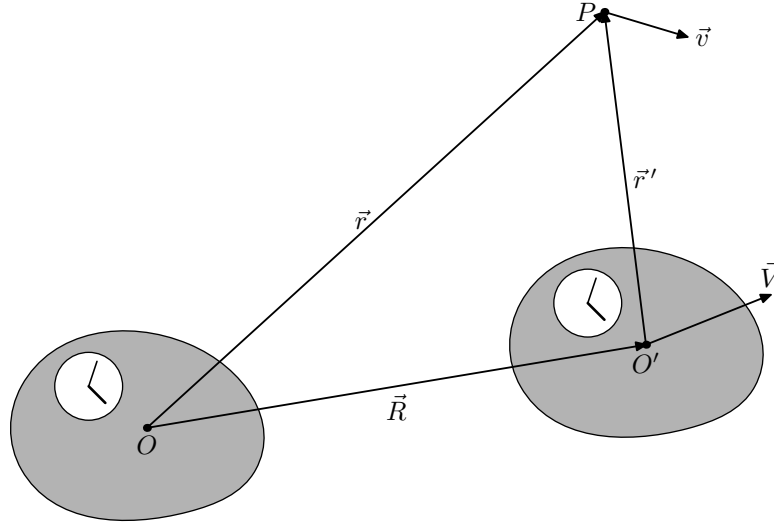


Figura 4.1: Due sistemi inerziali in moto relativo con velocità \vec{V} .

* I termini *osservatore* e *sistema di riferimento* verranno usati come sinonimi.

Un punto materiale P viene individuato dai due osservatori* mediante i vettori \vec{r} e \vec{r}' . Questi due vettori rappresentano le misure dei segmenti \overline{OP} e $\overline{O'P}$ effettuate da O e O' rispettivamente. La misura del segmento $\overline{O'P}$ può essere effettuata anche da O . Indicando con \vec{R} la posizione di O' misurata da O , per la legge di somma dei vettori questa misura si può esprimere come $\vec{r} - \vec{R}$. Per l'ipotesi di invarianza delle lunghezze si ha

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}. \quad (4.2)$$

Queste leggi di trasformazione di Galilei consentono di mettere in relazione le misure di una qualsiasi grandezza cinematica effettuate dai due osservatori. Per esempio, derivando rispetto al tempo, si ha la legge di trasformazione delle velocità

$$\vec{v}' \equiv \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v} - \vec{V}, \quad (4.3)$$

dove \vec{v}' e \vec{v} sono le misure della velocità del punto P , e \vec{V} la velocità di O' (misurata da O). Questa è la ben nota legge galileiana di composizione delle velocità. Vale la pena di notare che questa legge implica che se è costante \vec{v} , anche \vec{v}' lo è, e quindi il principio di inerzia è valido per tutti gli osservatori inerziali. Poiché \vec{V} è costante si ha, derivando ancora rispetto al tempo,

$$\vec{a}' = \vec{a} \quad \text{L'accelerazione è invariante.}$$

L'invarianza della accelerazione implica che la massa di un corpo è la stessa per tutti gli osservatori inerziali. Infatti il rapporto tra le masse di due corpi è *definito* come l'inverso del rapporto delle accelerazioni quando i corpi interagiscono soltanto tra loro

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}. \quad (4.4)$$

Infine, per il secondo principio della dinamica, la forza agente su di un punto materiale, definita come

$$\vec{F} \equiv m\vec{a}, \quad (4.5)$$

è anch'essa invariante: le leggi della dinamica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali come richiesto dal principio di relatività.

Occorre infine fare una osservazione importante riguardo alla nozione di azione a distanza come la forza di Coulomb o la forza di gravitazione universale. Quest'ultima è espressa dalla formula

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}, \quad (4.6)$$

dove m_1 e m_2 sono le masse gravitazionali di due corpi 'puntiformi' separati da una distanza r . Le notazioni sono le stesse usate per la forza di Coulomb (1.2); si noti in particolare il segno negativo che, essendo le masse sempre positive, determina una forza attrattiva. Se - in accordo con Newton - le masse gravitazionali vengono identificate con le masse inerziali, la costante di gravitazione G non può essere scelta ad arbitrio ma deve essere determinata empiricamente (Esperimento di Cavendish). Il meraviglioso successo della teoria gravitazionale di Newton nell'interpretare la struttura del sistema solare è ben noto; probabilmente, meno nota è una seria riserva di carattere filosofico nei confronti di una legge del tipo della (4.6) avanzata dallo stesso Newton; in una lettera a Richard Bentley* egli scrive: "*Che la gravità debba essere innata, intrinseca, e essenziale alla materia cosicché un corpo possa agire su un altro a distanza... è per me un'assurdità tanto grossa, che io non credo che nessuno che sia dotato di una competente facoltà di pensare in materia di filosofia potrà mai caderci*". In questo il pensiero di Newton concorda pienamente con la concezione della fisica moderna che assume esclusivamente interazioni 'locali'; ammettere leggi di forza come la (4.6) equivale sostanzialmente ad ammettere che un effetto fisico possa propagarsi *istantaneamente* tra punti lontani nello spazio[†], ma ciò - come si vedrà nel prossimo paragrafo - è in contrasto con l'evidenza empirica di cui disponiamo attualmente. Tuttavia, la Meccanica Classica e la teoria gravitazionale di Newton sono tra loro coerenti perché l'idea di una propagazione istantanea degli effetti fisici è insita già nella nozione di tempo assoluto.

* Lettera citata da Karl R. Popper in *Scienza e Filosofia*, Editore Einaudi

† Questo punto viene discusso con riferimento alla legge di Coulomb nel §4.

4.3 Relatività di Einstein

Intorno al 1860 James C. Maxwell giunse alla formulazione di una teoria completa dei fenomeni dell'elettromagnetismo che venne pubblicata nel 1873. Una delle conseguenze più importanti della teoria di Maxwell è l'esistenza di "onde elettromagnetiche", perturbazioni del campo elettrico e del campo magnetico che si propagano in maniera simile alle onde sonore o, in generale, alle onde in un mezzo elastico. A differenza delle onde



ALBERT EINSTEIN
1879 – 1955

elastiche le onde elettromagnetiche si propagano anche nel vuoto senza necessità del “sostegno” di un mezzo materiale. Inoltre tutte le proprietà previste per le onde e.m. coincidono con quelle delle onde luminose e ciò porta ad identificare questi fenomeni. La conferma sperimentale di tutte queste previsioni venne rapidamente negli anni successivi e costituì uno dei più importanti successi della fisica del diciannovesimo secolo. Questo, però, fece sorgere un nuovo problema perché le equazioni di Maxwell non restano invariate applicando le trasformazioni di Galilei (4.1), (4.2), e quindi sembrano non soddisfare il principio di relatività. Per esempio, secondo la teoria di Maxwell, la velocità di propagazione delle onde e.m. (la velocità della luce) nel vuoto, a differenza di quanto avviene per le onde elastiche, non dipende dallo stato di moto dell'osservatore e dovrebbe quindi essere la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali, in contraddizione con la legge galileiana di composizione delle velocità (4.3). Si può pensare di risolvere questa contraddizione assumendo che, per i fenomeni elettromagnetici, *non* sia valido il principio di relatività e che le leggi di Maxwell siano corrette soltanto rispetto a un particolare sistema di riferimento inerziale. Ciò può essere spiegato ipotizzando che i campi elettromagnetici rappresentino le deformazioni di un ipotetico e impalpabile mezzo elastico detto ‘*etere*’ e che pertanto solo nel sistema di riferimento in quiete rispetto all’etere siano valide le leggi dell’elettromagnetismo. Negli altri sistemi di riferimento queste leggi andrebbero modificate in modo tale da determinare una velocità della luce differente in accordo con la legge galileiana di composizione delle velocità.

Per mettere alla prova l’ipotesi dell’etere, occorre eseguire una misura della velocità della luce, abbastanza accurata da metterne in evidenza la variazione al cambiare del sistema di riferimento. Indicando con c la velocità della luce rispetto all’etere, in un sistema animato da una velocità v rispetto all’etere si dovrebbe trovare un valore compreso tra $c - v$ e $c + v$ (a seconda della direzione di propagazione) e si richiede quindi una precisione relativa di v/c . Il sistema di riferimento scelto per la misura è ovviamente la Terra che percorre la propria orbita a una velocità di circa 3×10^4 m/s. Anche se non è possibile sapere quale sia la velocità della Terra rispetto all’etere in un determinato istante, dato che l’orbita è chiusa vi sarà certamente nel corso di un anno un periodo in cui questa velocità ha un valore non inferiore a quello indicato; perciò il test sulla velocità di propagazione della luce deve essere effettuato più volte nell’arco di un anno. Tenendo conto che $c \simeq 3 \times 10^8$ m/s la precisione richiesta è di 10^{-4} . La tecnologia dell’ottocento non consentiva una misura di c con questa precisione ma con una serie di esperimenti, eseguiti negli anni ottanta, Michelson e Morley riuscirono ugualmente a compiere questo test cruciale. L’idea di Michelson si basava sul fatto che, per evidenziare il moto del sistema di riferimento rispetto all’etere, basta misurare la *differenza* tra le velocità di propagazione della luce in due direzioni tra loro perpendicolari. Ciò si può fare con un metodo interferometrico che misura la differenza tra gli spazi percorsi in tempi uguali dai due segnali luminosi. L’interferenza verrà discussa nel capitolo dedicato all’ottica;



ALBERT ABRAHAM
MICHELSON
1852 – 1931

qui basta dire che l'effetto cercato era dell'ordine di v^2/c^2 e richiedeva quindi una precisione di una parte su 10^8 , ma comporta solo misure di lunghezza e non di tempo. Michelson e Morley riuscirono a mettere a punto un apparato in grado di rivelare anche una velocità rispetto all'etere alquanto più piccola di quella della Terra ma *nessun effetto fu osservato*. Nessuna dipendenza della velocità della luce dal sistema di riferimento è stata mai osservata in tutti gli esperimenti analoghi eseguiti successivamente.

Tra la fine dell'ottocento e i primi del novecento numerosi furono i tentativi di interpretare questo risultato negativo senza sconvolgere le concezioni newtoniane di spazio e tempo, ma nessuno di essi fu coronato da successo¹. A trarre la giusta conclusione dall'esperimento, giunse Einstein nel 1905: occorre ammettere che l'etere non esiste e che anche per i fenomeni elettromagnetici vige un principio di relatività. Anzi, la teoria di Einstein richiede che questo valga per *tutti* i processi fisici e per *qualsiasi* tipo di interazione (inclusa quella gravitazionale):

Principio di Relatività di Einstein: Le leggi di natura sono le stesse per due osservatori in moto relativo traslatorio uniforme; in particolare, sia le leggi della meccanica sia le leggi dell'elettromagnetismo sono le stesse in tutti i riferimenti inerziali.

L'invarianza della velocità della luce nel vuoto è ovviamente una conseguenza immediata di questo assunto; ma Einstein formulò[†] un'ipotesi di portata molto più generale di quanto implicato dal solo esperimento di Michelson–Morley:

Principio di invarianza di c : le interazioni tra i sistemi fisici, di qualsiasi natura, si trasmettono con una velocità non superiore a una velocità limite che è una costante universale indipendente dallo stato di moto dell'osservatore. Questa costante è uguale alla velocità c di propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto.

Forse, per designare la grandezza c sarebbe più appropriata una locuzione del tipo 'velocità limite universale', piuttosto che quella di velocità della luce; ma ormai più di cento anni di relatività hanno creato una tradizione. Occorre anche dire che tutta l'evidenza sperimentale attualmente disponibile è basata sulla propagazione di segnali elettromagnetici. Comunque il Principio di relatività e il Principio di invarianza di c vengono unanimamente considerati dalla comunità scientifica come il fondamento su cui basare i nostri tentativi di interpretare il mondo sensibile. Nel seguito li invocheremo ripetutamente per sviluppare la teoria dei fenomeni elettromagnetici.

[†]In verità Einstein non assume esplicitamente un'ipotesi così forte come quella enunciata accanto, che del resto non è neanche strettamente necessaria: la Relatività Ristretta non è incompatibile con l'esistenza di effetti che si trasmettono a velocità maggiore di c (*Tachioni*). L'essenziale è che esista una velocità *finita invariante*. Per un'esposizione elementare risulta comunque conveniente adottare la forma forte del principio.

¹Non è questa la sede per fare una rassegna, sia pure sommaria, di queste teorie; al lettore interessato consiglio: W. Panofsky e M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, (1962).

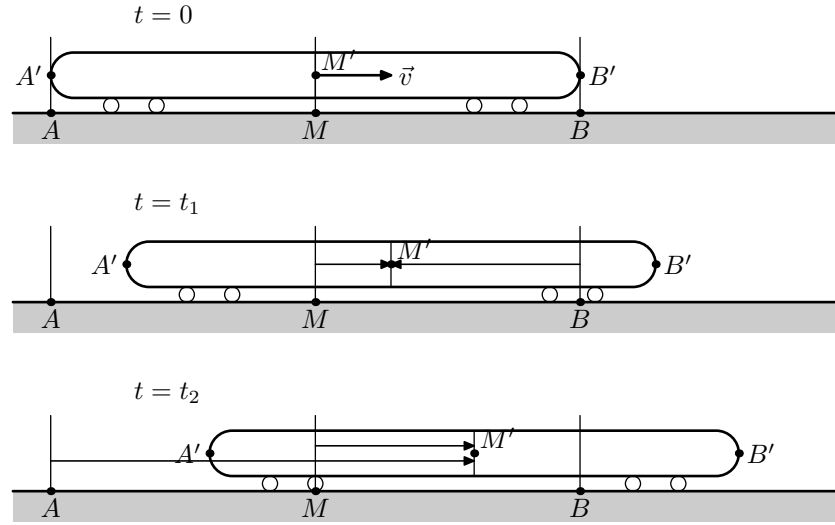


Figura 4.2: Due eventi che si verificano in punti distinti non sono simultanei per tutti gli osservatori.

Una conseguenza immediata dell'invarianza di c è che la legge galileiana di composizione delle velocità non è valida; di più, l'invarianza di c è incompatibile con la concezione di tempo assoluto e con l'invarianza delle lunghezze. Per vederlo, basta considerare un semplice esempio; supponiamo che un treno si muova con velocità uniforme v lungo un binario rettilineo e che un osservatore O (solidale al binario) disponga lungo la massicciata una serie di traguardi dotati di cellula fotoelettrica e di un dispositivo elettronico che attiva un flash ogni volta che il traguardo viene attraversato dalla testa del treno o abbandonato dalla coda. Nella figura 4.2, A e B sono due traguardi che segnalano rispettivamente il passaggio della coda e della testa del treno. Ovviamente, l'osservatore O giudicherà simultanei i passaggi in A e B se i segnali luminosi giungono simultaneamente nel punto medio M del segmento AB . L'osservatore O può anche determinare gli istanti in cui i segnali giungono nel punto medio M' del treno. All'istante di emissione dei segnali - che per comodità prenderemo come origine dei tempi -, i punti A e B coincidono con gli estremi A' e B' del treno, e perciò M' coincide con M . Successivamente, mentre i segnali luminosi emessi da A e B viaggiano rispettivamente verso destra e verso sinistra, M' si sposta verso destra e perciò *prima* (istante t_1) incontra il segnale proveniente da B che percorre una distanza minore, e *poi* (istante t_2) viene raggiunto da quello partito da A che deve coprire una distanza maggiore. Indicando con L la distanza di M da A e B , dalla semplice osservazione della figura si ricava

$$ct_1 + vt_1 = L \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{L}{c+v}, \quad ct_2 - vt_2 = L \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{L}{c-v}.$$

Vediamo ora come si svolge la vicenda nel sistema di riferimento O' solidale al treno; per questo osservatore il punto M' è immobile e i percorsi

dei segnali luminosi $A'M'$, $B'M'$ sono uguali. Per l'invarianza di c , l'arrivo dei segnali in due istanti diversi implica che gli attraversamenti dei traguardi *non sono simultanei*[†]. In termini generali, possiamo concludere che l'idea di simultaneità di due eventi *spazialmente separati* non si conforma al principio di relatività e pertanto non ha un contenuto fisico obiettivo. Con ciò l'idea di tempo assoluto newtoniano deve essere abbandonata: le misure di tempo effettuate da osservatori differenti sono differenti.

A questo punto diventa necessario specificare come ciascun osservatore misura il tempo nel proprio riferimento; per esempio, come si determina l'istante in cui una particella in moto passa per un punto P lontano dall'origine (vedere la figura 4.1). Immaginando di disporre un orologio nel punto P , occorre sincronizzarlo con quello nell'origine O . Il criterio di sincronizzazione, ideato da Einstein, si basa sull'invarianza di c .[†] All'istante t_O indicato dall'orologio posto nell'origine si invia un segnale di luce (o una qualsiasi onda elettromagnetica) verso P ; questo segnale raggiunge l'orologio in P all'istante t_P segnato dall'orologio in P , e viene riflesso verso O ; la luce riflessa raggiunge l'origine all'istante t_O^* misurato sempre dall'orologio ivi situato. Per la costanza di c i tempi di andata e ritorno devono essere eguali

$$t_P - t_O = t_O^* - t_P,$$

e quindi gli orologi sono sincronizzati se

$$t_P = \frac{t_O + t_O^*}{2}. \quad (4.7)$$

In effetti, non è nemmeno necessario porre un orologio in P : la formula (4.7) *definisce* il tempo in cui è avvenuta la riflessione in termini dei tempi misurati dall'orologio nell'origine. La cosa è importante perché non sempre si dispone del secondo orologio; si immagini, per esempio, di voler misurare il tempo di eventi che si verificano sulla superficie del Sole. Il procedimento di Einstein è molto pratico e può servire anche a misurare la distanza \overline{OP} : dal momento che la velocità della luce è nota, basta dividere c per il tempo di percorrenza. Questa idea ha trovato concreta applicazione nel radar, che attualmente viene usato sia per osservazioni terrestri che nell'ambito del sistema solare.

Lo stesso procedimento di misura viene adoperato da O' ; per semplicità, supponiamo che l'osservatore O' della figura 4.1 si trovi con il proprio orologio vicino a quello di O al momento in cui il raggio di luce parte, e che decida di regolare il proprio orologio in modo che esso indichi lo stesso tempo $t_{O'} = t_O$. Poiché O' è in moto rispetto a O , al momento in cui riceve il segnale di ritorno non sarà più nelle vicinanze dell'orologio di O . Il percorso del raggio luminoso nel sistema di O' è quindi completamente diverso da quello compiuto rispetto a O , ma viene effettuato esattamente con la stessa velocità. Ne consegue che il tempo di ritorno in O' sarà in generale diverso dal tempo di ritorno in O : $t_{O'}^* \neq t_O^* \Rightarrow t_P' \neq t_P$. I due osservatori inerziali, pur avendo scelto al

[†]Vale la pena di notare che, se fosse valida la legge galileiana di addizione delle velocità, l'arrivo in due istanti diversi sarebbe giustificato dal fatto che i segnali hanno viaggiato con le velocità diverse $c + v$ e $c - v$.

[†]Con riferimento alla nota a margine a pagina 119, anche ammettendo la possibilità di segnali 'superluminali' che viaggiano a velocità maggiore di c , la sincronizzazione degli orologi *deve* essere eseguita con il metodo di Einstein. Si può dimostrare che il Principio di Relatività impone una procedura basata sulla velocità *invariante*.

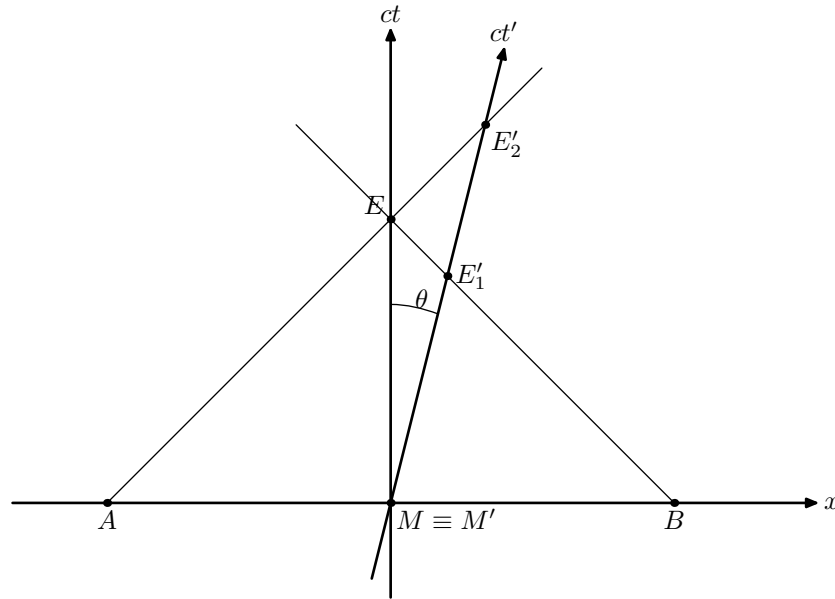


Figura 4.3: Diagramma di Minkowski.

stessa origine dei tempi attribuiscono tempi diversi allo stesso evento; la relazione tra le misure verrà trovata nel paragrafo 4.5.

Insieme all'idea di tempo assoluto, anche quella di spazio assoluto deve essere abbandonata. Tornando all'esempio del treno, l'osservatore O ne determina la lunghezza misurando la distanza AB tra i due traguardi con i quali A' e B' coincidono simultaneamente. Per l'osservatore O' , la coincidenza non avviene simultaneamente e perciò i due segmenti non sono uguali. Anche la relazione precisa tra le misure di lunghezza verrà data nel paragrafo 4.5.

Domanda: Per l'osservatore O' , quale dei due segmenti - AB , $A'B'$ - è più lungo?

Uno strumento molto utile nello studio della cinematica relativistica è il diagramma spazio-tempo, introdotto da Minkowski. Si tratta di un diagramma orario in cui l'asse x orizzontale è l'asse spaziale (assumiamo per il momento moto in una dimensione), mentre sull'asse verticale si riporta ct (vedi figura 4.3). Nel diagramma di Minkowski un punto rappresenta un evento (per esempio il passaggio della testa del treno per il traguardo B), e le sue coordinate (x, ct) individuano la posizione e il tempo (rispetto a un dato osservatore) in cui l'evento si verifica. Il moto di un punto materiale viene rappresentato da una linea che prende il nome di '*linea universo*'. Per esempio, nel diagramma di Minkowski (figura 4.3), il moto di M' - la cui legge oraria è $x = vt$ - viene rappresentato da una retta che forma con l'asse ct un angolo θ dato da $\tan \theta = v/c$; ancora, la linea universo dell'orologio in quiete nell'origine è l'asse ct . La propagazione di un segnale luminoso è rappresentata da una retta inclinata di 45° rispetto all'asse verticale a destra o a sinistra secondo che il segnale viaggi nel senso positivo o negativo dell'asse x . Si osservi che, dal momento che $v \leq c$, nessuna linea universo può avere un'inclinazio-

ne maggiore di 45° rispetto all'asse dei tempi. Nella figura 4.3, A e B rappresentano gli *eventi* emissione del segnale luminoso dai *punti* A e B della Figura 4.2 all'istante $t = 0$, le linee AE e BE la propagazione di questi segnali, ed E la ricezione, contemporanea per l'osservatore O , in M . Dalla figura risulta evidente che M' riceve prima il segnale da B (evento E'_1) che da A (evento E'_2).

Naturalmente, ogni osservatore disegna un proprio diagramma di Minkowski; quello della figura 4.3 è tracciato da O . Il diagramma di Minkowski dal punto di vista di O' , indicando con x' e ct' gli assi coordinati, avrà la linea universo dell'orologio in M' perpendicolare a x' , mentre la linea universo dell'orologio in M - che appare in moto verso sinistra - sarà inclinata di un angolo θ verso sinistra. Ciò che appare uguale per entrambi gli osservatori è l'inclinazione delle linee universo dei segnali luminosi.

Per mettere alla prova la propria assimilazione delle idee esposte in questo paragrafo, il lettore è caldamente invitato a riflettere sull'esercizio proposto qui di seguito; non è facile ma molto istruttivo.

Esercizio: Disegnare il diagramma di Minkowski dell'esempio del treno dal punto di vista di M' .

4.4 Invarianza della Carica

Nel primo capitolo, la misura della carica elettrica di un corpo in quiete rispetto a un osservatore è stata ricavata dalla forza coulombiana esercitata su altri corpi carichi, anch'essi in quiete. Per il principio di relatività, le misure che differenti osservatori inerziali eseguono, ognuno su cariche in quiete nel *proprio* sistema di riferimento, devono dare gli stessi risultati e ciascun osservatore troverà valida la legge di Coulomb. Detto alla Galilei: un fisico che esegue esperimenti di elettrostatica chiuso nella stiva di una nave, non osserva differenze se la nave è ferma in porto o se naviga a velocità costante su mare calmo. Ma cosa accade se si va a sperimentare sulle forze che un corpo carico, *in moto* in un sistema inerziale, esercita su corpi carichi *in quiete* in quel sistema? Tenendo presente la definizione di campo elettrico, la domanda equivale a chiedersi se il campo elettrico di una carica in moto è uguale a quello prodotto dalla stessa

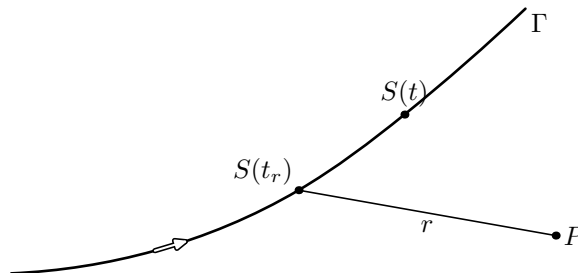


Figura 4.4: La legge di Coulomb può essere valida per cariche in moto?

carica in quiete. Se il principio dell'invarianza di c è valido, la risposta è certamente negativa. Si osservi la figura 4.4; la curva Γ rappresenta la traiettoria di una carica puntiforme che si muove nel senso indicato dalla freccia, e i punti $S(t_r)$ e $S(t)$ le posizioni della carica agli istanti t_r e t ($t_r < t$). La misura del campo elettrico in un punto P effettuata all'istante t non può fornire informazioni sulla posizione raggiunta dalla carica in quello stesso istante; più precisamente, indicando con

$$t_r = t - \frac{r}{c}, \quad (4.8)$$

l'istante in cui verifica la condizione

$$\overline{S(t_r)P} = r, \quad (4.9)$$

nessuna grandezza fisica misurata in P all'istante t può dipendere dall'evoluzione della carica dopo l'istante t_r . Questo perché il segnale dal punto sorgente S al punto campo P non si trasmette istantaneamente ma con un ritardo r/c . Ora, la soluzione del sistema di equazioni (4.8), (4.9) nelle incognite r e t_r , dipende dalla specifica legge oraria del moto. Come esempio, il lettore è invitato a studiare il caso di moto rettilineo uniforme che non presenta particolari difficoltà. La conclusione è che *il campo elettrico dipende dallo stato di moto della carica*. Nel caso di moto uniforme la legge che esprime il campo è semplice e verrà presentata più avanti in questo capitolo; nel caso di moto lento (velocità in ogni istante piccola rispetto a c) si può dare un'espressione approssimata, molto utile in ottica, che verrà discussa nell'ultimo capitolo. L'espressione generale del campo elettrico prodotto da una carica puntiforme in moto arbitrario, dipende sia dalla velocità che dall'accelerazione all'istante t_r , è assai complicata e non verrà presentata perché non appare conveniente basare la definizione di carica elettrica su un fenomeno così complesso².

Le cose stanno in maniera ben più semplice per quel che riguarda la legge di Gauss:

Il flusso del campo elettrico uscente da una superficie chiusa è indipendente dallo stato di moto delle cariche in essa contenute.

Ovviamente, cariche in moto possono entrare o uscire dalla regione delimitata da una superficie chiusa, ma finché il moto di un corpo si svolge tutto all'interno della superficie, il flusso rimane costante nel tempo. Ad illustrazione della legge si osservi la figura 4.5; il corpo carico è rappresentato dal circoletto pieno e la traiettoria dalla linea spessa; inoltre sono rappresentate due possibili superfici gaussiane S_1 e S_2 . Il campo in un generico punto della superficie S_1 (S_2) è indicato con $\vec{E}_1(t)$ ($\vec{E}_2(t)$)[†] per rendere esplicito il fatto che, in tutti i punti della superficie, il campo viene misurato *allo stesso istante*. Il flusso attraverso le due superfici,

[†]Beninteso, questi campi vengono misurati mediante cariche di prova *in quiete* rispetto all'osservatore.

²Chi ha la curiosità di vedere la formula può trovarla ad esempio a pagina 217 di: Landau, Lifchitz "Théorie des Champs" Edizioni MIR - Mosca (1970), reperibile in qualsiasi biblioteca di fisica.

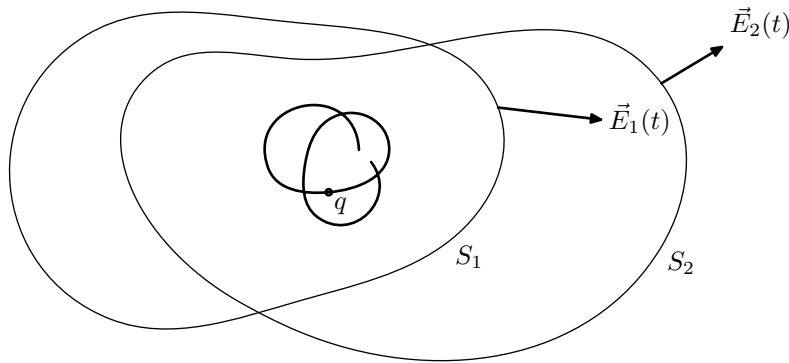


Figura 4.5: Flusso di \vec{E} prodotto da una carica in moto.

sulla base dei dati sperimentali, risulta lo stesso e indipendente dal tempo per qualsiasi legge del moto della carica. Possiamo allora assumere la legge di Gauss come *definizione* di carica elettrica

$$q \equiv \frac{1}{4\pi} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad (4.10)$$

valida in tutta generalità per qualsiasi osservatore inerziale.

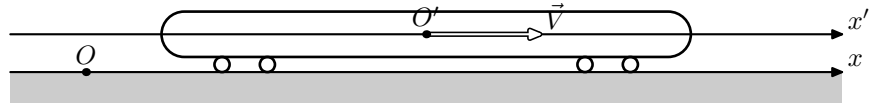
Questa definizione richiede alcuni commenti; in primo luogo, può sembrare strano che ora la legge di Gauss sia valida per definizione, ma si rifletta sul fatto che l'enunciato contiene implicitamente il dato empirico della *indipendenza* del flusso dalla superficie, senza il quale la (4.10) non avrebbe senso. Ancora, misurare il flusso uscente da una superficie chiusa sembra un compito titanico: determinare il campo simultaneamente in un insieme di punti abbastanza fitto da poter calcolare con ragionevole approssimazione l'integrale di superficie: occorrerà un esercito di operatori addestrati! In realtà, niente di tutto questo: basta disporre di un conduttore cavo, al cui interno si muove la carica, e la cui superficie esterna coincide con la superficie attraverso cui si vuole il flusso. Se il conduttore è isolato, la carica indotta sulla superficie esterna è proporzionale al flusso, anzi uguale alla carica del corpo in moto all'interno, ma statica e facilmente misurabile dalla differenza di potenziale rispetto a terra.

In vista del fatto che la carica di un corpo è la somma delle cariche dei costituenti elementari – essenzialmente quelle di protoni e elettroni – una conferma empirica della invarianza della carica si ha dalla neutralità della materia a scala macroscopica, in cui le cariche elementari non sono in quiete ma si muovono con velocità anche elevate. Esperimenti ad hoc sono stati eseguiti per verificare l'invarianza di queste cariche con estrema precisione. Un bell'esperimento, effettivamente eseguito, ha controllato la neutralità sia della molecola di idrogeno che della molecola di elio. La molecola di elio è monoatomica e contiene, come quella di idrogeno, due protoni e due elettroni (oltre due neutroni che non hanno carica). In entrambi questi aggregati gli elettroni hanno velocità molto piccole rispetto a c e confrontabili tra loro; nella molecola di idrogeno

i protoni hanno velocità ancora inferiori a quelle degli elettroni, mentre nell'elio si muovono a velocità confrontabili con c . Pertanto la verifica della neutralità dimostra che la carica dei protoni è invariante anche a velocità elevate. Questi esperimenti sono estremamente precisi perché vengono eseguiti su campioni macroscopici: una deviazione, anche molto piccola, dalla neutralità per la singola molecola comporterebbe una carica facilmente osservabile alla scala macroscopica.

4.5 La trasformazione di Lorentz

Vogliamo ora trovare le leggi di trasformazione delle misure di tempo e lunghezza tra due osservatori inerziali O e O' ; ci mettiamo dal punto di vista di O e indichiamo con \vec{V} la velocità traslatoria uniforme che egli attribuisce a O' . Consideriamo dapprima il caso unidimensionale, come nell'esempio del treno; vale a dire che ci occupiamo soltanto di eventi che avvengono lungo la strada ferrata. Ciascuno dei due osservatori, per individuare il punto P in cui si verifica un evento sceglie un asse orientato e ne misura l'ascissa x (x') rispetto alla propria origine. Assumiamo inoltre che gli assi siano orientati concordemente, come mostrato nella figura sotto.



Seguendo Minkowski, sceglieremo come coordinata temporale ct invece che t ; le coordinate di un evento saranno quindi (ct, x) per l'osservatore O , e (ct', x') per l'osservatore O' . Vogliamo trovare la relazione che lega queste coppie di variabili. Poiché il principio di inerzia deve valere in tutti i sistemi inerziali, un moto uniforme in un sistema deve apparire uniforme a tutti gli altri osservatori inerziali. Ciò è possibile soltanto se le leggi di trasformazione da (ct, x) a (ct', x') sono lineari

$$\begin{cases} ct' = \lambda ct - \mu x \\ x' = \gamma x - \delta ct \end{cases}, \quad (4.11)$$

Più in generale, si possono aggiungere due costanti arbitrarie (con dimensioni di lunghezza) a secondo membro di queste equazioni; di questa generalità non avremo bisogno al livello di questa trattazione. Le equazioni scritte a lato implicano che entrambi gli osservatori scelgono come istante zero

$$t = 0, \quad t' = 0,$$

quello in cui le origini si incontrano

$$x = 0, \quad x' = 0.$$

dove $\gamma, \delta, \lambda, \mu$, sono coefficienti adimensionali, indipendenti da x e ct , ma funzioni della velocità relativa dei due sistemi inerziali. La condizione essenziale cui deve soddisfare la legge di trasformazione è l'invarianza di c ; allora osserviamo in primo luogo che la propagazione di un segnale luminoso che parte dall'origine all'istante zero, viaggiando nel senso positivo dell'asse x , viene descritta dall'equazione

$$x - ct = 0 \quad \text{nel riferimento di } O$$

e dall'equazione

$$x' - ct' = 0 \quad \text{nel riferimento di } O'.$$

Sottraendo membro a membro le (4.11) si ricava subito la condizione

$$\gamma + \mu = \lambda + \delta. \quad (A)$$

Per un segnale luminoso che viaggia nel senso negativo dell'asse x si ha analogamente

$$x' + ct' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x + ct = 0,$$

che, sommando membro a membro le (4.11), implica

$$\gamma - \mu = \lambda - \delta. \quad (B)$$

Dalle condizioni (A) e (B) si ricava subito che deve essere $\lambda = \gamma$ e $\mu = \delta$, per cui le (4.11) si scrivono

$$\begin{cases} ct' &= \gamma ct - \delta x \\ x' &= \gamma x - \delta ct \end{cases}$$

Ora, tenendo presente che l'origine di O' si muove con velocità V rispetto a O deve anche risultare che $x' = 0 \rightarrow x = Vt$ e questa condizione è soddisfatta se

$$\frac{\delta}{\gamma} = \frac{V}{c}.$$

Le leggi di trasformazione si possono quindi scrivere

$$\begin{cases} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \end{cases} \quad (4.12)$$

dove si è posto

$$\beta = \frac{V}{c}. \quad (4.13)$$

Resta ora da determinare soltanto il fattore γ . Per questo basta riflettere sul fatto che la trasformazione inversa, che esprime le coordinate misurate da O in termini di quelle misurate da O' , deve essere identica alla (4.12) a parte la sostituzione di V con $-V$, e cioè di β con $-\beta$:

$$\begin{cases} ct &= \gamma(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma(x' + \beta ct') \end{cases}$$

Queste due equazioni, sostituite nelle (4.12) devono dare luogo a un'identità; con passaggi algebrici elementari si trova che questa condizione è soddisfatta se

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (4.14)$$

Le (4.12) con le definizioni (4.13) e (4.14) di β e γ sono le leggi di trasformazione che legano le misure di spazio e tempo di due osservatori inerziali. Esse vengono chiamate trasformazioni di Lorentz perché furono proposte nel 1904 da Hendrik A. Lorentz come trasformazioni che lasciano invarianti le leggi dell'elettromagnetismo di Maxwell. Tuttavia, Lorentz non ne diede una interpretazione fisica soddisfacente perché non mise in discussione le concezioni classiche di spazio e tempo.



HENDRIK ANTOON
LORENTZ
1853 – 1928

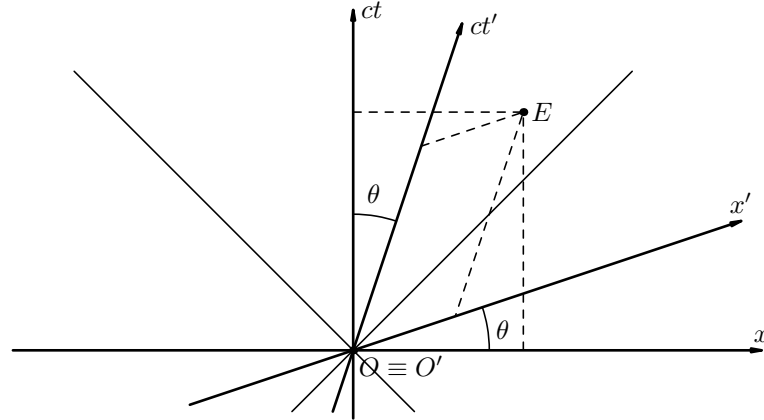


Figura 4.6: Nello spazio di Minkowski, la trasformazione di Lorentz è rappresentata da un cambiamento di assi.

È istruttivo dare una interpretazione geometrica della trasformazione di Lorentz nel diagramma spazio-tempo di Minkowski. Nella figura 4.6 l'asse indicato con ct' rappresenta, dal punto di vista di O , il moto dell'origine del sistema O' . Come già osservato a proposito della figura 4.3 $\tan \theta = V/c$. Gli assi indicati con x e x' rappresentano rispettivamente gli insiemi degli eventi che O e O' giudicano simultanei all'incontro tra le origini (che è scelto come istante zero da entrambi gli osservatori). La trasformazione di Lorentz appare quindi come un cambiamento di assi coordinati che fa passare dalla coppia di assi ct, x alla coppia ct', x' . Nella figura, le linee tratteggiate indicano il modo in cui ciascuno dei due osservatori individua le coordinate di un generico evento E .

Dalla prima equazione del sistema (4.12) imponendo $t' = 0$ si ottiene che l'equazione dell'asse x' è:

$$ct = \beta x = \frac{V}{c}x.$$

Pertanto l'asse x' forma con l'asse x lo stesso angolo θ che ct' forma con ct . Ciò implica che le bisettrici della coppia di assi ct, x (segnate in figura 4.6 con linee sottili) sono anche bisettrici della coppia di assi ct', x' . Questo è imposto dalla invarianza di c dato che le bisettrici rappresentano la propagazione di segnali luminosi.

Esercizio: Riconsiderare l'esercizio di pagina 123 (che adesso dovrebbe risultare facile); forti della trasformazione di Lorentz, calcolare l'intervallo di tempo tra E_1 ed E_2 misurato da O' .

Nella nostra esperienza quotidiana e nella maggior parte delle attività umane (incluso il lancio di veicoli spaziali) si ha a che fare sempre con velocità molto più piccole di c . In questi casi risulta $\beta \simeq 0^\dagger$ e $\gamma \simeq 1$, e la trasformazione di Lorentz si riduce alle trasformazioni di Galilei (4.1), (4.2). Per questo motivo i concetti classici di spazio e tempo, e le leggi di Newton hanno un vasto campo di applicabilità. Vi sono però

[†] Però $\beta c = V$ non è trascurabile.

effetti relativistici che si manifestano anche a velocità modestissime; un esempio è il campo magnetico generato da un filo percorso da corrente elettrica. In generale i fenomeni elettromagnetici sono ‘intrinsecamente’ relativistici e possono essere interpretati in maniera logicamente coerente soltanto alla luce delle concezioni di spazio e tempo di Einstein.

Mediante la trasformazione di Lorentz si possono determinare le relazioni tra le misure di lunghezze e tempi effettuate in qualsiasi esperimento da due osservatori inerziali. Per esempio, consideriamo la misura della lunghezza della dimensione longitudinale (parallela cioè alla velocità relativa) di un corpo. Se il corpo è in quiete nel sistema O la misura viene effettuata per confronto con un regolo graduato stazionario; diciamo ℓ il valore di questa lunghezza. Quale sarà la lunghezza misurata da O' ? Questo osservatore vede il corpo in moto con velocità V nel senso negativo dell'asse delle x e per effettuare la misura deve ricorrere al procedimento, indicato nel paragrafo 4.3, di misurare la distanza tra due punti, in quiete nel proprio sistema di riferimento, in cui si verifica il passaggio simultaneo delle estremità del corpo. Indichiamo con x'_1 e x'_2 le coordinate di questi due eventi e con t' l'istante in cui essi si verificano per O' . Le coordinate di questi stessi eventi, nel sistema O sono date da

$$\begin{aligned}x_1 &= \gamma(x'_1 + \beta ct') \\x_2 &= \gamma(x'_2 + \beta ct'),\end{aligned}$$

e sottraendo membro a membro

$$x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1).$$

Poiché $x_2 - x_1 = \ell$ e $x'_2 - x'_1 = \ell'$ si ottiene

$$\ell' = \frac{\ell}{\gamma}.$$

La lunghezza misurata da O' risulta ‘contratta’ di un fattore γ (si noti dalla (4.14) che $\gamma > 1$). È opportuno insistere sul fatto che questa contrazione è un artefatto del sistema di riferimento e non un reale accorciamento del corpo. Per il principio di relatività, se il corpo è in quiete in O' , questi misura una lunghezza ℓ identica a quella misurata da O nell'esempio ora discusso. In questo caso sarà O ad osservare una contrazione di un fattore γ . La lunghezza di un corpo nel sistema di riferimento solidale al corpo stesso ha chiaramente un valore privilegiato rispetto a quella misurata in qualsiasi altro sistema. Essa viene chiamata *lunghezza propria* ed è un invariante in tutti i sistemi inerziali.

Questa contrazione riguarda solo le lunghezze parallele alla velocità relativa: le dimensioni trasversali di un corpo sono eguali per i due osservatori. Per vederlo, consideriamo un esperimento analogo a quello del treno, effettuato ora con due regoli disposti perpendicolarmente alla velocità relativa (Figura 4.5). Nella figura, tracciata dal punto di vista di O , il regolo AB è in quiete, mentre $A'B'$ - di cui vengono mostrate le posizioni in tre istanti successivi - è in moto con velocità \vec{V} da sinistra

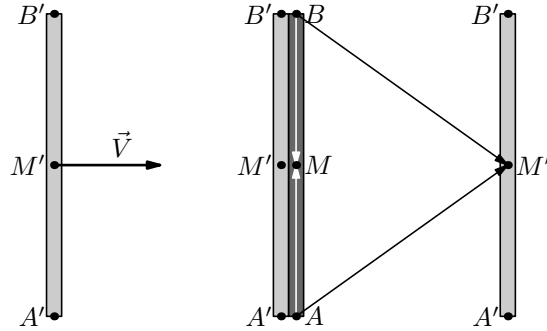


Figura 4.7: Invarianza delle dimensioni trasversali

verso destra. Supponiamo che si abbia sovrapposizione tra gli estremi dei regoli: i segnali che viaggiano dagli estremi del regolo stazionario al punto medio M (freccie bianche) percorrono distanze uguali e perciò i due eventi appaiono simultanei per O ; ma anche i segnali che arrivano nel punto medio del regolo in moto M' percorrono distanze uguali. Pertanto anche O' giudica simultanee le coincidenze degli estremi dei regoli, e perciò gli osservatori concordano nel giudicare $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Da ciò si conclude che le coordinate trasversali (perpendicolari alla velocità relativa) di un punto dello spazio sono invarianti per cambiamento di riferimento.

Molto spesso, piuttosto che la trasformazione di Lorentz, ci saranno utili le relazioni

$$\vec{\ell}'_{\perp} = \vec{\ell}_{\perp}, \quad \ell'_{\parallel} = \ell_{\parallel} / \gamma, \quad (4.15)$$

Si usa chiamare riferimento *proprio* o *'a riposo'* il sistema inerziale in cui un corpo è in quiete. Il generico riferimento inerziale O' viene detto *di laboratorio*.

dove, come al solito i pedici \perp e \parallel denotano le componenti di $\vec{\ell}$, perpendicolari e parallela alla velocità relativa \vec{V} . Si tenga però ben presente che queste relazioni valgono *solo* quando $\vec{\ell}_{\perp}$ e ℓ_{\parallel} sono lunghezze *proprie*. Un'applicazione semplice e utile delle (4.15) è la determinazione della legge di trasformazione dell'angolo θ che un regolo rigido forma con la

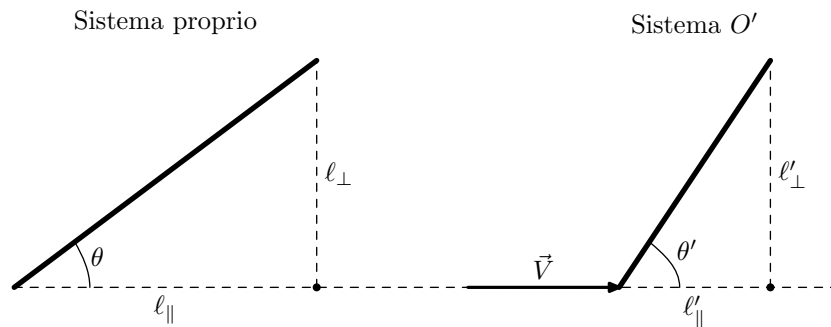


Figura 4.8: Trasformazione dell'angolo formato da un regolo rigido con la velocità relativa al sistema proprio.

velocità; dalla semplice osservazione della figura 4.8 si ha

$$\tan \theta' = \frac{\ell'_\perp}{\ell'_\parallel} = \frac{\ell_\perp}{\ell_\parallel / \gamma} = \gamma \tan \theta \quad (4.16)$$

Consideriamo infine la trasformazione degli intervalli di tempo tra due eventi. Indichiamo con t_1 e t_2 i tempi di due eventi che si verificano *nello stesso punto* di ascissa x nel riferimento O . Quale sarà l'intervallo di tempo tra questi due eventi misurato da O' ? Applicando la trasformazione di Lorentz si ha

$$t'_1 = \gamma(t_1 - \frac{\beta}{c}x)$$

$$t'_2 = \gamma(t_2 - \frac{\beta}{c}x).$$

e sottraendo membro a membro:

$$t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1) = \gamma \Delta\tau.$$

L'intervallo di tempo misurato da O' risulta dilatato di un fattore γ : gli orologi di O appaiono ‘rallentati’ all'osservatore in moto. Come per le lunghezze il fenomeno è reciproco; gli orologi di O' sembrano rallentati all'osservatore O . Il valore $\Delta\tau$ di un intervallo di tempo, misurato nel sistema in cui i due eventi si verificano nello stesso punto (sistema “a riposo”), è privilegiato, e viene chiamato intervallo di tempo proprio. Per convenzione universalmente adottata il tempo proprio viene indicato con τ .

L'effetto Doppler. Un'applicazione molto importante della dilatazione dei tempi si ha nel cambiamento di frequenza (*‘Doppler shift’*) osservato quando una sorgente di radiazione elettromagnetica si muove rispetto a un osservatore O . Assumiamo una sorgente monocromatica di frequenza propria ν_0 ; il periodo di oscillazione nel riferimento di quiete della sorgente è $T_0 = 1/\nu_0$.

Se la sorgente S è in moto con velocità \vec{v} rispetto a O , come mostrato nella figura a lato, il periodo di oscillazione appare dilatato di un fattore γ

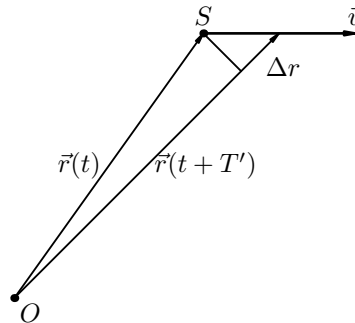
$$T' = \gamma T_0.$$

In aggiunta a quest'effetto occorre considerare che, durante l'emissione, la sorgente si sposta; due fronti d'onda successivi, sfasati di T' , vengono emessi da due punti diversi. Se v_\parallel è la componente della velocità lungo la direzione \vec{OS} , la differenza tra le distanze che il segnale deve percorrere per giungere in O vale

$$\Delta r = v_\parallel T'.$$

Perciò l'intervallo di tempo tra gli arrivi di due fronti successivi è

$$T = T' + \frac{\Delta r}{c} = T' \left(1 + \frac{v_\parallel}{c}\right) = \gamma \left(1 + \frac{v_\parallel}{c}\right) T_0,$$



e la frequenza osservata da O vale

$$\nu = \frac{1}{T} = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v_{\parallel}/c}.$$

Nel caso $v_{\parallel} > 0$ (sorgente in allontanamento) si ha $\nu < \nu_0$ (spostamento verso il rosso). Viceversa, per una sorgente in avvicinamento si può avere un shift verso il violetto. ■

4.6 Campo elettrico di cariche in moto

Confrontiamo il campo elettrico all'interno di un condensatore piano, misurato nel sistema proprio, con quello misurato da un osservatore O' che vede il condensatore in moto con velocità \vec{V} . Nella figura 4.9 il

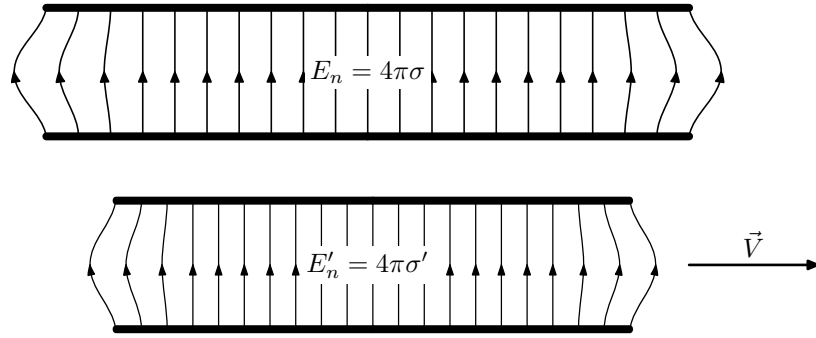


Figura 4.9: Confronto tra un condensatore in moto e un condensatore in quiete.

condensatore è rappresentato due volte: superiormente come viene ‘visto’ dall’osservatore in quiete, inferiormente come viene visto dall’osservatore in moto; ovviamente le due immagini vanno pensate sovrapposte. Dal momento che per entrambi gli osservatori vale la legge di Gauss avremo

$$E_n = 4\pi\sigma, \quad E'_n = 4\pi\sigma',$$

utilizzando, come al solito, un apice per distinguere le grandezze misurate da O' da quelle del sistema proprio. Se la velocità \vec{V} è parallela alle armature del condensatore la contrazione delle lunghezze longitudinali (4.15) comporta una contrazione dell’area di un fattore γ . Tenendo presente che la carica su ciascuna armatura è invariante si ha subito

$$\sigma' = \gamma\sigma \quad \Rightarrow \quad E'_n = \gamma E_n.$$

Osserviamo che E_n è la componente del campo perpendicolare a \vec{V} ; inoltre, dato che la relazione trovata coinvolge solo i valori dei campi misurati da due diversi osservatori nello stesso punto dello spazio, il risultato ottenuto non può dipendere dalla particolare distribuzione di carica considerata.

Se la velocità \vec{V} è perpendicolare alle armature del condensatore non si ha nessuna contrazione delle lunghezze (solo la distanza tra le armature

varia), nessun cambiamento della densità di carica e nessun cambiamento di E_n . In questo caso E_n è la componente del campo elettrico parallela alla velocità. Possiamo allora trarre la seguente conclusione di carattere generale:

Una qualsiasi distribuzione di cariche, in moto traslatorio uniforme con velocità \vec{V} , genera in qualsiasi punto dello spazio un campo \vec{E}' che è legato al campo \vec{E} nello stesso punto, misurato nel sistema proprio della distribuzione, dalle relazioni

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma \vec{E}_{\perp}, \quad E'_{\parallel} = E_{\parallel}. \quad (4.17)$$

Il segno di vettore su \vec{E}_{\perp} indica che la formula si applica a qualsiasi componente del campo nel piano perpendicolare a \vec{V} . Una conseguenza interessante di queste leggi di trasformazione è che l'angolo tra il campo elettrico e la velocità \vec{V} si trasforma secondo la stessa legge (4.16) trovata per l'angolo di un regolo rigido

$$\tan \theta' = \frac{E'_{\perp}}{E'_{\parallel}} = \frac{\gamma E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \gamma \tan \theta.$$

Questa osservazione ci permette di ricavare facilmente l'espressione per il campo elettrico di una carica puntiforme q in moto con velocità \vec{V} . Ovviamente, il campo prodotto da una carica in moto in un punto fisso dello spazio dipende dal tempo; eseguiamo il calcolo all'istante $t' = t = 0$ in cui la carica passa per l'origine del riferimento di laboratorio. Confrontando la legge di trasformazione del campo elettrico con quella dei vettori spostamento (4.16), si vede subito che \vec{E}' è ancora radiale (si osservi la figura 4.10). Occorre quindi calcolare soltanto il modulo; dalle (4.17) si ha

$$E' = \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2} = \sqrt{E_{\parallel}^2 + \gamma^2 E_{\perp}^2}.$$

Dalla legge di Coulomb, indicando per comodità con z e x le componenti parallela e perpendicolare di r , abbiamo

$$E_{\parallel} = q \frac{z}{r^3}, \quad E_{\perp} = q \frac{x}{r^3},$$

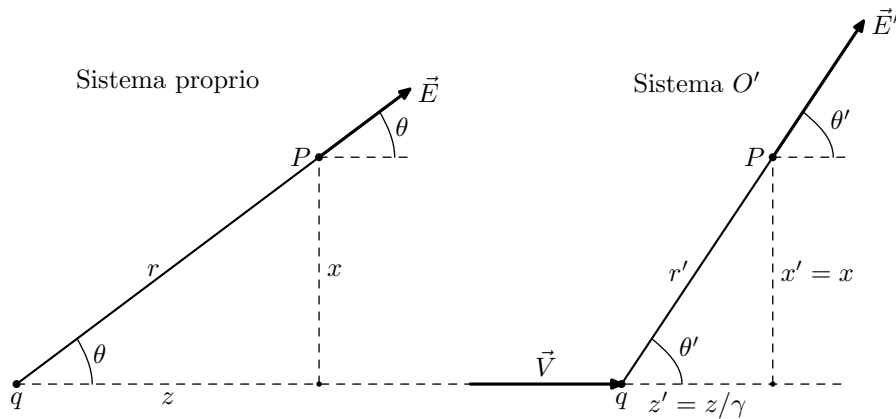


Figura 4.10: Trasformazione del campo coulombiano.

e quindi

$$E' = q \frac{\sqrt{z^2 + \gamma^2 x^2}}{(x^2 + z^2)^{3/2}} = q \frac{\gamma \sqrt{z'^2 + x'^2}}{(x'^2 + \gamma^2 z'^2)^{3/2}}.$$

Questa formula viene scritta in maniera molto più semplice ed espressiva in termini delle coordinate r' e θ' ; sostituendo

$$z' = r' \cos \theta', \quad x' = r' \sin \theta',$$

si ottiene con calcoli elementari

$$E(r, \theta) = \frac{q}{r^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}, \quad (4.18)$$

dove $\beta = V/c$. Gli apici sono stati soppressi perché tutte le grandezze che compaiono nella formula sono misurate nello stesso sistema di riferimento. La differenza con il campo coulombiano consiste nel fattore adimensionale

$$f(\theta) = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}},$$

che dipende esclusivamente dall'angolo θ . Questa funzione soddisfa l'identità

$$f(\theta) = f(\pi - \theta),$$

che implica simmetria del campo rispetto al piano perpendicolare a \vec{V} e passante per la carica; in altre parole la configurazione del campo dipende da modulo e direzione della velocità ma non dal verso. Si verifica facilmente che nell'intervallo $(0, \pi/2)$, il fattore angolare cresce in maniera monotona dal minimo

$$f(0) = 1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} < 1,$$

al massimo

$$f(\pi/2) = \gamma > 1.$$

Pertanto, a distanza fissata da q , il campo della carica in moto ha valore minimo (inferiore a quello di una carica uguale in quiete) nella direzione della velocità, e cresce allontanandosi da questa direzione raggiungendo il valore massimo (maggiore di quello della carica in quiete) in direzione

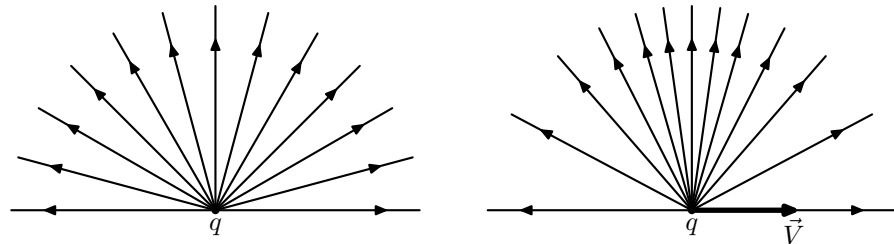


Figura 4.11: Confronto tra le linee di flusso del campo di una carica puntiforme in quiete e in moto ($\gamma = 2$).

trasversale. Questa caratteristica è illustrata graficamente mediante le linee di flusso, nella la figura 4.11. Nella parte a sinistra, sono disegnate le linee di flusso del campo coulombiano prodotto da una carica in quiete, spaziate di 15° ; nella parte destra sono rappresentate *le stesse linee di flusso*, che, per la (4.16) si allontanano dalla direzione di \vec{V} . Il visibile diradamento delle linee nella direzione della velocità e il conseguente addensamento nella direzione trasversale danno ragione della dipendenza del campo da θ discussa sopra. In conclusione il campo della carica in moto uniforme è radiale ma non centrale; da ciò segue che il campo elettrico non è irrotazionale. Del resto un campo variabile nel tempo in nessun caso è conservativo[†].

I corpi macroscopici, almeno nel dominio dei fenomeni terrestri, non hanno mai velocità relativistica

$$\beta \ll 1 \quad \Rightarrow \quad f(\theta) \approx 1.$$

Di conseguenza in molte applicazioni pratiche si può continuare ad applicare la legge di Coulomb senza commettere errori apprezzabili. Tuttavia, vedremo più avanti che il fatto che il campo elettrico delle cariche in moto non è irrotazionale può produrre effetti importanti anche alla velocità di una lumaca.

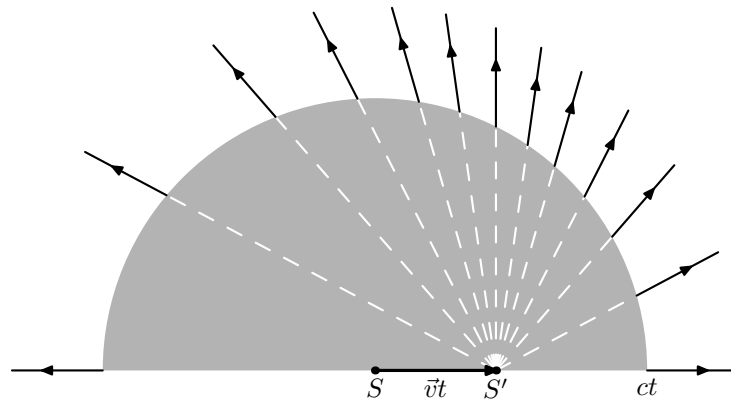
Conviene osservare esplicitamente che nella (4.18) r e θ dipendono dal tempo perché sono determinati dalla posizione della carica *nell'istante in cui viene misurato il campo*. Ciò sembra in contraddizione con le considerazioni sulla velocità finita di propagazione dei segnali svolte nel §4.4. In realtà non c'è alcuna contraddizione perché non c'è alcun segnale che si propaga: il risultato che abbiamo trovato riguarda una carica che si muove con velocità uniforme *in eterno*, per cui, se non ci sono modifiche al 'piano di volo' non c'è alcuna informazione da trasmettere. Solo se la velocità della carica cambia si verifica un evento e questo viene 'comunicato' da un segnale che viaggia con velocità c . Il segnale consisterà appunto in una modifica del campo elettrico che non sarà più espresso dalle semplici formule ricavate sopra.

Consideriamo, per esempio, una carica q che dopo aver viaggiato con velocità uniforme per lungo tempo, viene frenata da una forza esterna fino alla quiete. Prendiamo come origine dei tempi ($t = 0$) l'istante in cui la carica comincia a rallentare e vediamo cosa prescrive il principio di velocità finita di propagazione dei segnali per la configurazione del campo a un istante successivo $t > 0$. Nei punti dello spazio che distano più di ct dal punto S in cui comincia la frenata, l'informazione che la velocità della carica è variata, all'istante t , non è ancora arrivata. Quindi, in questi punti il campo è dato dalla (4.18), con r e θ determinati dalla posizione S' che la carica avrebbe raggiunto *se avesse continuato a viaggiare con la velocità \vec{v}* (vedi la parte a) della Figura 4.12). In questo non vi è nulla di paradossale perché, come osservato nel §4.4, il campo al di fuori della sfera di raggio ct è stato generato *prima* dell'arresto della carica.

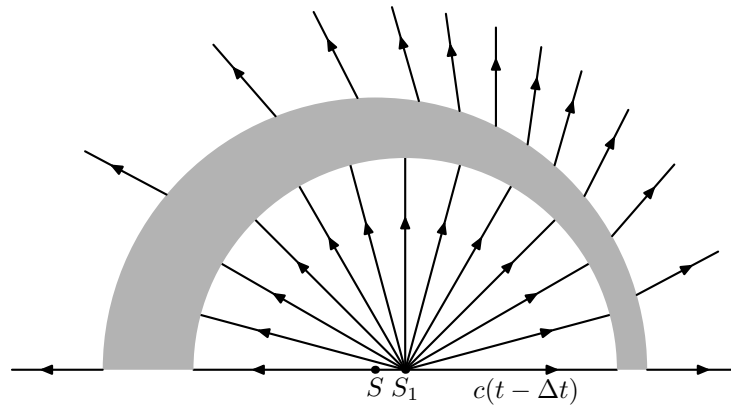
Ora, se t è maggiore della durata Δt della frenata, possiamo cominciare a sollevare parte del velo grigio nella parte a) della Figura 4.12 che

[†]Il significato fisico della circuitazione del campo elettrico verrà discusso nel settimo capitolo.

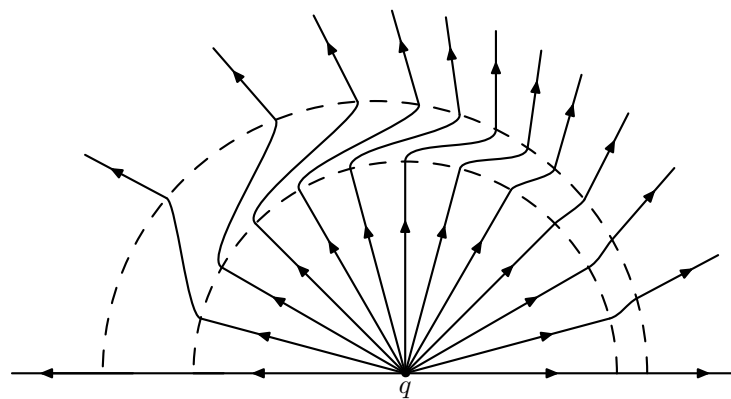
Esercizio: Calcolare i valori minimo e massimo di $f(\theta)$ per una sonda spaziale che viaggia alla velocità di fuga dalla Terra.



a) Nella regione non ancora raggiunta dal segnale il campo è quello di una carica in moto.



b) Nella regione in cui è arrivata l'informazione che la carica è ferma il campo è coulombiano.



c) Tutto il campo 'senza veli'. Figura tracciata per $\gamma = 2$.

Figura 4.12: Campo di una carica che passa da una velocità uniforme alla quiete.

ricopre la zona in cui non sono state tracciate le linee di flusso. Infatti, indicando con S_1 il punto in cui termina la frenata, tutti i punti all'interno della sfera con centro in questo punto e raggio $c(t - \Delta t)$, all'istante t sono stati raggiunti dall'informazione che ora la carica è in quiete. Pertanto, in questa regione le linee di flusso sono quelle di un campo coulombiano con centro in S_1 . Notare che nella parte b) della Figura 4.12 le linee di flusso sono ugualmente spaziate per indicare che il campo è centrale e conservativo.

Vogliamo ora far cadere l'ultimo velo, tracciando qualitativamente le linee di flusso nella regione tra le due sfere. Dal momento che non ci sono motivi perché il campo si annulli o vada all'infinito in questa regione, le linee di flusso, tracciate all'interno della sfera di centro S_1 , dovranno proseguire nella zona grigia e connettersi alle linee esterne alla sfera di centro S . Il criterio di corrispondenza tra le linee della regione interna e quella esterna, come evidenziato nella discussione della Figura 4.11 è dato dalla (4.16). Pertanto, il grafico delle linee di flusso ha l'andamento mostrato nella parte c) della Figura 4.12. Si osservi che nella zona tra le due sfere (quella in cui si propaga il segnale che la carica sta rallentando) il campo ha, oltre alla componente radiale, una considerevole componente trasversale. Il calcolo di questa componente trasversale verrà eseguito nel capitolo dedicato all'ottica,

4.7 Lo spazio-tempo

La trasformazione di Lorentz ‘mescola’ le coordinate spaziali e temporali di un evento quando si cambia il sistema di riferimento. Da ciò segue che la concezione classica di spazio e tempo come due categorie separate e indipendenti non corrisponde allo stato delle cose: le nozioni di ‘punto’ e ‘istante’ sono utili per la descrizione dei fenomeni da parte di un singolo osservatore, ma non hanno un significato fisico obiettivo, valido per tutti gli osservatori. Nella Relatività Ristretta la realtà sensibile è concepita invece come una collezione di ‘eventi’ che possono essere organizzati come una varietà geometrica detta ‘spazio-tempo’, introdotta da Hermann Minkowski. Un evento è individuato da tre coordinate spaziali e una temporale, lo spazio tempo ha quattro dimensioni, e perciò non è possibile darne una rappresentazione grafica del tutto aderente alla realtà; tuttavia, la soppressione di una dimensione spaziale non pregiudica l'efficacia di un disegno. La figura 4.13 rappresenta lo spazio tempo dal punto di vista di un osservatore che ha scelto un evento O come origine dei tempi e delle coordinate. L'asse dei tempi ct è l'insieme di tutti gli eventi che si verificano nel punto (dello spazio ordinario) scelto come origine. Il piano contrassegnato con $t = 0$, perpendicolare all'asse dei tempi, è l'insieme di tutti gli eventi simultanei all'evento origine e cioè l'intero spazio; occorre perciò pensarlo come un ‘iperpiano’ tridimensionale, anche se il disegno per forza di cose è bidimensionale. Un evento qualsiasi P viene individuato dall'osservatore O mediante le coordinate ct e \vec{r} come mostrato in figura: la scelta di un riferimento equivale dunque alla scelta di un



HERMANN MINKOWSKI
1864 – 1909

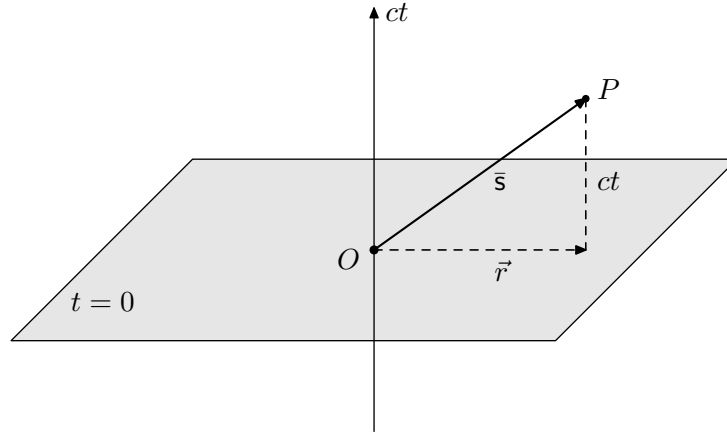


Figura 4.13: Un sistema di riferimento costituisce un sistema di coordinate nello spazio di Minkowski.

sistema di coordinate nello spazio di Minkowski. Cambiando sistema di riferimento cambiano le coordinate di P - secondo la trasformazione di Lorentz - ma non la 'collocazione' dell'evento nello spazio-tempo che è un dato fisico obiettivo. Come si è fatto per la descrizione dello spazio ordinario della meccanica classica, per liberarsi degli aspetti contingenti legati alla scelta arbitraria del riferimento, conviene introdurre la nozione di vettore spostamento come segmento orientato tra due 'punti' dello spazio di Minkowski

$$\bar{s} \equiv \overline{OP}.$$

Per distinguere i vettori nello spazio-tempo dai vettori ordinari si usa la denominazione di '*quadrivettori*'; per indicare i quadrivettori userò i seguenti "caratteri sans serif" con una sovralineatura: \bar{a} , \bar{b} ...; per esempio, nella figura l'evento P è individuato rispetto all'origine O dal quadrivettore posizione \bar{s} . Un osservatore animato da una velocità uniforme \vec{V} rispetto a O attribuisce a \bar{s} le componenti (ct', \vec{r}') , data dalla legge di trasformazione di Lorentz (4.12)

$$\begin{cases} ct' &= \gamma(ct - \beta r_{\parallel}) \\ r'_{\parallel} &= \gamma(r_{\parallel} - \beta ct) \\ \vec{r}'_{\perp} &= \vec{r}_{\perp} \end{cases} \quad (4.19)$$

Le componenti sono differenti per i due osservatori, ma il quadrivettore è lo stesso, per cui scriveremo

$$\bar{s} \equiv (ct, \vec{r}) \equiv (ct', \vec{r}').$$

Leggi fisiche espresse da relazioni tra quadrivettori soddisfano quindi automaticamente il Principio di Relatività.

I quadrivettori possono essere sommati o sottratti con le stesse regole che valgono per i vettori ordinari; inoltre, nuovi vettori vengono generati a partire dai vettori spostamento moltiplicando per grandezze *scalari*, che restano invarianti per cambiamento di riferimento. Quì occorre tenere

ben presente che l'intervallo di tempo tra due eventi, o la lunghezza di un regolo *non sono* invarianti, così come, a differenza di quanto accade in uno spazio euclideo, *non è invariante*, e non ha senso fisico, la somma dei quadrati delle componenti

$$(ct)^2 + (r)^2 \neq (ct')^2 + (r')^2.$$

Risulta invece invariante per trasformazione di Lorentz la *differenza*³

$$s^2 \equiv (ct)^2 - (r)^2 = (ct')^2 - (r')^2, \quad (4.20)$$

che prende il nome di '*norma*' del quadriettore \bar{s} , e sostituisce, nello spazio di Minkowski, la nozione euclidea di lunghezza del segmento OP . Il lettore è caldamente invitato a sostituire le (4.19) nella (4.20) per verificare l'uguaglianza; vale la pena di notare esplicitamente che, essendo

$$r^2 = r_{\parallel}^2 + r_{\perp}^2,$$

la (4.20) equivale a

$$(ct)^2 - (r_{\parallel})^2 = (ct')^2 - (r'_{\parallel})^2.$$

Più in generale, dati due quadriettori qualsiasi, $\bar{a} \equiv (a_t, \vec{a})$ e $\bar{b} \equiv (b_t, \vec{b})$, la trasformazione di Lorentz lascia invariante il prodotto scalare

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \equiv a_t b_t - \vec{a} \cdot \vec{b} = a'_t b'_t - \vec{a}' \cdot \vec{b}', \quad (4.21)$$

dove $\vec{a} \cdot \vec{b}$ è, ovviamente, l'usuale prodotto scalare dei vettori euclidei.

A differenza della distanza euclidea, la norma s^2 può assumere valore positivo, nullo (anche per eventi distinti), o negativo secondo che $(ct)^2$ sia maggiore eguale o minore di $(r)^2$. I quadriettori nulli – vedi \bar{s}_N in figura 4.14 – formano con l'asse dei tempi un angolo di 45° e puntano a eventi che giacciono sul cono di vertice O che viene chiamato 'cono luce' perché contiene tutte le linee universo dei segnali luminosi che passano per O . Infatti $s^2 = 0$ implica

$$r^2 = (ct)^2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} r = ct & \text{se } t > 0 \\ r = -ct & \text{se } t < 0 \end{cases}.$$

Nel primo caso abbiamo che l'informazione viaggia a velocità c dall'evento O all'evento N , nel secondo caso (falda inferiore del cono) da N a O . Per i quadriettori nulli, l'invarianza della norma si riduce semplicemente all'invarianza di c .

I quadriettori contenuti all'interno del cono luce, come \bar{s}_F e \bar{s}_P in figura, hanno evidentemente norma positiva

$$r_{F(P)}^2 < (ct_{F(P)})^2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} r_F < ct_F \\ r_P < -ct_P \end{cases}.$$

³In letteratura, si trova di frequente la definizione con il segno opposto:

$$s^2 \equiv (r)^2 - (ct)^2.$$

La scelta del segno è irrilevante e dipende esclusivamente dal gusto di ciascun autore.

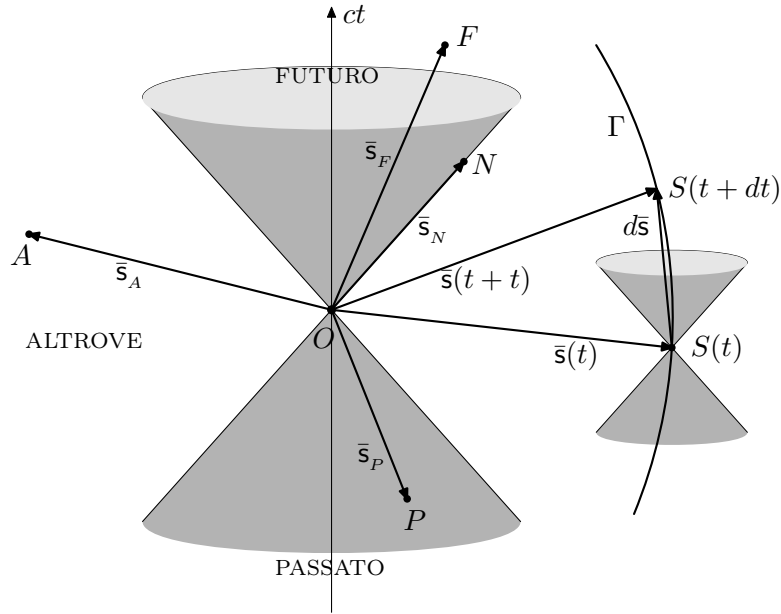


Figura 4.14: Struttura dello spazio-tempo di Minkowski.

Ciò implica che è possibile andare da O a F (oppure da P a O) viaggiando a velocità minore di c . Esiste perciò un riferimento inerziale per cui i due eventi si verificano *nello stesso punto, ma in due istanti diversi*. In questo riferimento, le componenti di \bar{s}_F sono $(c\tau_F, 0)$ dove τ_F è l'intervallo di tempo proprio tra i due eventi; per l'invarianza della norma si ha allora

$$\tau_F = \frac{1}{c} \sqrt{s^2} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 t_F^2 - r_F^2}. \quad (4.22)$$

Applicando questa formula, qualsiasi osservatore inerziale può determinare l'intervallo di tempo proprio tra due eventi separati da un quadri-vettore di norma positiva. Con ciò la nozione di tempo proprio acquista un significato intrinseco, valido per tutti gli osservatori inerziali.

Considerazioni del tutto analoghe valgono per gli eventi come P , situati nella falda inferiore del cono luce, con la sola differenza che P ha coordinata temporale negativa e perciò appartiene al passato di O ; viceversa gli eventi F della falda superiore appartengono al futuro. Dal momento che il cono luce è invariante per trasformazione di Lorentz, l'ordine cronologico di questi eventi è lo stesso per tutti gli osservatori.

I quadri-vettori che puntano a eventi all'esterno del cono luce, come A in figura 4.14, hanno norma negativa

$$(ct_A)^2 < r_A^2 \quad \implies \quad s^2 < 0.$$

Nessun effetto fisico può propagarsi da O ad A , e per questo la regione dello spazio di Minkowski esterna al cono luce viene detta 'altrove' (rispetto a O). La relazione è reciproca: nessun effetto può propagarsi da A ad O ; insomma questi eventi sono causalmente indipendenti.

Questo è importante perché nessuna inversione di causa e effetto potrà derivare dal fatto che l'ordine cronologico degli eventi 'altrove' dipende dall'osservatore.

Per i quadrivettori a norma negativa esiste un riferimento in cui la componente temporale è nulla; in questo riferimento si ha

$$s^2 = -r^2 \quad \implies \quad r = \sqrt{-s^2} \equiv \ell,$$

dove ℓ rappresenta la distanza propria tra i luoghi in cui gli eventi si verificano. Per l'invarianza della norma, le lunghezze proprie acquistano dunque un significato intrinseco, valido per tutti gli osservatori.

I quadrivettori a norma positiva, le cui componenti spaziali possono essere annullate con un'opportuna scelta del riferimento vengono detti '*time-like*'; quelli a norma negativa, di cui si può annullare la componente temporale vengono detti '*space-like*'. I quadrivettori nulli hanno invece sempre entrambe le componenti diverse da zero, in tutti i riferimenti.

Osserviamo infine che ogni evento dello spazio-tempo è vertice di un cono luce che separa il passato, il futuro e l'altrove relativi a quell'evento; a titolo di esempio, in figura 4.14 è tracciato il cono luce di un evento $S(t)$ appartenente alla linea universo Γ di punto materiale. Per quanto detto sopra, Γ deve essere interamente contenuta nel cono luce di qualsiasi suo punto. Il resto della figura serve per la discussione del prossimo paragrafo; qui voglio invitare il lettore a riflettere su questa caratteristica dello spazio-tempo: in ciascun luogo, in un determinato istante, è possibile avere cognizione soltanto di quanto è avvenuto nella falda inferiore del cono luce relativo a quel luogo e quell'istante: non solo il futuro, ma anche l'altrove sono celati. Quando si guarda lontano, non si osserva ciò che sta accadendo ora, ma si risale indietro nel tempo. Di questa proprietà del nostro mondo si può trarre profitto: per esempio, con i telescopi attualmente disponibili si può vedere come andavano le cose quando l'universo era giovane.

4.8 Cinematica relativistica

Come in Meccanica Classica, in Relatività sono quadrivettori tutte le grandezze fisiche generate da moltiplicazione dei quadrivettori spostamento per grandezze scalari, indipendenti dal riferimento. Detto $\bar{\mathbf{q}}$ un generico quadrivettore, userò la notazione

$$\bar{\mathbf{q}} \equiv (\mathbf{q}_t, \vec{\mathbf{q}})$$

per indicare la componente temporale (\mathbf{q}_t) e la parte spaziale ($\vec{\mathbf{q}}$). La norma si scriverà allora

$$\mathbf{q}^2 = \mathbf{q}_t^2 - |\vec{\mathbf{q}}|^2, \quad (4.23)$$

e la trasformazione di Lorentz

$$\begin{cases} \mathbf{q}'_t &= \gamma(\mathbf{q}_t - \beta \mathbf{q}_{\parallel}) \\ \mathbf{q}'_{\parallel} &= \gamma(\mathbf{q}_{\parallel} - \beta \mathbf{q}_t) \\ \vec{\mathbf{q}}'_{\perp} &= \vec{\mathbf{q}}_{\perp} \end{cases}, \quad (4.24)$$

dove \mathbf{q}_{\parallel} e \mathbf{q}_{\perp} sono, come al solito, le componenti del vettore $\vec{\mathbf{q}}$, parallela e perpendicolare alla velocità relativa \vec{V} .

Introduciamo ora il quadrivettore velocità. Nella figura 4.14 sono indicati due eventi vicini, $S(t)$ e $S(t+dt)$, della linea universo di un punto materiale e i corrispondenti quadrivettori, $\bar{\mathbf{s}}(t) \equiv (ct, \vec{r}(t))$ e $\bar{\mathbf{s}}(t+dt) \equiv (c(t+dt), \vec{r}(t+dt))$; la differenza

$$d\bar{\mathbf{s}} = \bar{\mathbf{s}}(t+dt) - \bar{\mathbf{s}}(t) \equiv (c dt, d\vec{r}),$$

è il quadrivettore spostamento nell'intervallo di tempo dt . Per definire il quadrivettore velocità, non si può dividere questo spostamento per dt , che non è uno scalare, ma si deve porre

$$\bar{\mathbf{v}} \equiv \frac{d\bar{\mathbf{s}}}{d\tau}, \quad (4.25)$$

dove $d\tau$ è l'intervallo di tempo proprio tra i due eventi. Come osservato nel paragrafo precedente, per misurare l'intervallo di tempo proprio non è necessario disporre di un orologio che accompagni la particella nel suo moto; dal momento che $d\bar{\mathbf{s}}$ è un vettore time-like, la (4.22) fornisce

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{(cdt)^2 - (dr)^2} = dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \frac{(dr)^2}{(dt)^2}}.$$

Indicando con $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ la familiare velocità galileiana della meccanica classica, si ha immediatamente

$$\frac{(dr)^2}{(dt)^2} = \frac{d\vec{r} \cdot d\vec{r}}{(dt)^2} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = v^2,$$

e perciò

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma}.$$

In effetti, non abbiamo fatto altro che ritrovare per altra via la legge di dilatazione dei tempi al passaggio dal sistema proprio a un generico sistema inerziale 'di laboratorio'. In questo riferimento, le componenti della quadri-velocità sono quindi

$$\bar{\mathbf{v}} \equiv (\mathbf{v}_t, \vec{v}) = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right) = \left(c\gamma, \frac{dt}{d\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = (c\gamma, \gamma \vec{v}). \quad (4.26)$$

A questa espressione si giunge anche con un diverso procedimento, molto potente, che verrà ripetutamente utilizzato in seguito. Scriviamo le componenti della velocità nel sistema proprio[†] della particella; in questo riferimento $dt = d\tau$ e $d\vec{r} = 0$, per cui dalla definizione (4.25) si ha

$$d\bar{\mathbf{s}} \equiv (cd\tau, \vec{0}) \implies \bar{\mathbf{v}} \equiv (c, \vec{0}).$$

Per tornare al riferimento di laboratorio occorre applicare la trasformazione di Lorentz (4.24) con la velocità relativa $\vec{V} = -\vec{v}$; sopprimendo gli apici a primo membro si ha

$$\mathbf{v}_t = \gamma c, \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_{\parallel} = \gamma \beta c = \gamma v, \quad \mathbf{v}_{\perp} = 0 \implies \vec{v} = \gamma \vec{v}$$

[†]Si usa anche la denominazione 'riferimento tangente', perché l'asse dei tempi dell'osservatore proprio è tangente alla linea universo. Ovviamente, se si eccettua il caso di moto uniforme (linea universo retta) in istanti diversi i riferimenti tangente sono diversi.

che coincide con la (4.26).

A differenza della velocità galileiana \vec{v} , la quadri-velocità \bar{v} è una grandezza fisica intrinseca, *indipendente dal riferimento*. Le componenti misurate da due osservatori differenti O e O' , sono differenti, ma legate dalla trasformazione di Lorentz. Ciò permette di ricavare la corretta legge di trasformazione per la velocità galileiana. Per semplicità, limitiamoci al moto in una dimensione, lungo un asse \hat{x} . Omettendo le componenti trasversali della quadri-velocità le componenti di \bar{v} misurate da O e O' sono[‡]

$$\bar{v} \equiv (c\gamma, \gamma v) \equiv (c\gamma', \gamma' v')$$

Ora, se V è la velocità di O' rispetto a O , la trasformazione di Lorentz fornisce

$$\begin{aligned} c\gamma' &= \gamma_V(c\gamma - \frac{V}{c}v\gamma) \\ v'\gamma' &= \gamma_V(v\gamma - \frac{V}{c}c\gamma) \end{aligned}$$

dove γ_V è il fattore di contrazione di Lorentz relativo alla trasformazione da O a O' da non confondere con γ e γ' . Dividendo membro a membro ed effettuando qualche semplificazione si ricava la legge relativistica di composizione delle velocità galileiane:

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{Vv}{c^2}}. \quad (4.27)$$

Ovviamente la formula inversa che esprime v in funzione di v' è identica salvo che per la sostituzione di $-V$ al posto di V . Il lettore potrà fare un utile esercizio risolvendo la (4.27) rispetto a v per verificare la validità di questa affermazione.

Ci sono tre osservazioni da fare sulla legge di composizione delle velocità:

1. Se v e V sono molto più piccole di c il denominatore della (4.27) si approssima all'unità e si ritrova la legge classica di Galilei (4.3).
2. Se $|v| < c$, allora $|v'| < c$ per qualsiasi valore di V (minore di c). Per vederlo basta disegnare il grafico di v' come funzione di v nell'intervallo $[-c, c]$.
3. Se $v = \pm c$, allora $v' = \pm c$; come doveva essere!

Questa legge di composizione delle velocità fu uno dei grandi successi della teoria di Einstein perché risultò in perfetto accordo – contrariamente alla legge classica – con le misure della velocità della luce nei liquidi⁴ in moto eseguite da Armand Fizeau più di mezzo secolo prima.

⁴La velocità della luce in un mezzo materiale è inferiore a c e quindi non è invariante.

[‡] Per alleggerire la scrittura, le componenti della velocità lungo l'asse \hat{x} vengono indicate da v e v' , invece di v_x e v'_x .

È interessante calcolare la norma della quadri-velocità; dalla definizione (4.23) e dall'espressione (4.26) si ottiene

$$\mathbf{v}^2 = c^2 \gamma^2 - v^2 \gamma^2 = \frac{c^2 - v^2}{1 - v^2/c^2} = c^2,$$

come c'era da aspettarsi! Osserviamo che lo stesso risultato si ottiene a vista, senza fare nessun calcolo dalle componenti nel sistema tangente.

Continuando, per il momento, a limitarci al caso unidimensionale passiamo a considerare l'accelerazione; la definizione è ovviamente

$$\bar{\mathbf{a}} \equiv \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{d\tau} \equiv \left(\frac{d(c\gamma)}{d\tau}, \frac{d(v\gamma)}{d\tau} \right) \equiv \left(\gamma \frac{d(c\gamma)}{dt}, \gamma \frac{d(v\gamma)}{dt} \right). \quad (4.28)$$

Per discutere le proprietà dell'accelerazione conviene seguire il metodo del riferimento tangente; ricordando che nel sistema a riposo $\gamma = 1$ e $d\tau = dt$, le componenti sono

$$\bar{\mathbf{a}} \equiv (0, a),$$

dove a è l'accelerazione classica nel sistema proprio. Da quì risulta innanzitutto che l'accelerazione è un quadrivettore space-like; inoltre

$$\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0.$$

Nel riferimento tangente i quadrivettori accelerazione e velocità sono ortogonali; ricordando poi la discussione sulla trasformazione di Lorentz nel § 4.5, il significato geometrico di questa relazione, in un generico riferimento di laboratorio, è che $\bar{\mathbf{a}}$ e $\bar{\mathbf{v}}$ formano, da parti opposte, lo stesso angolo con la linea universo del segnale luminoso (vedi figura 4.15).

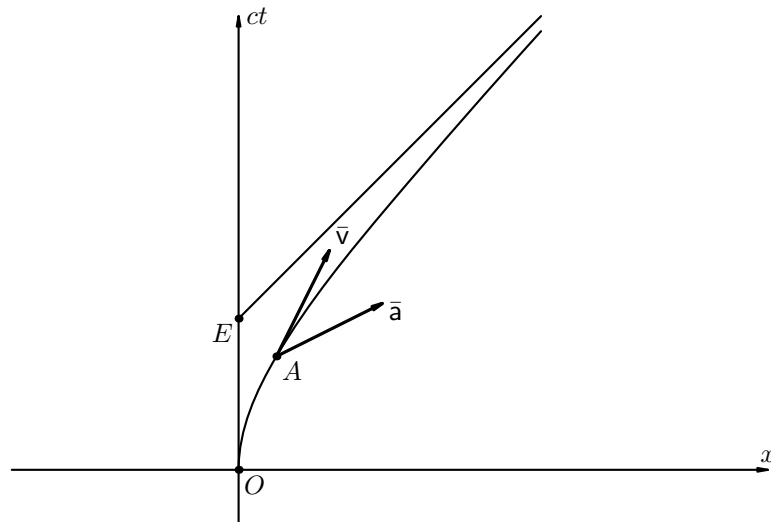


Figura 4.15: Quadrivettori velocità e accelerazione di un punto materiale.

Nel riferimento tangente è anche immediato il calcolo della norma della quadri-accelerazione

$$\mathbf{a}^2 = -a^2.$$

Questa legge è molto importante perché dimostra che l'accelerazione ordinaria nel sistema a riposo è un invariante anche in Relatività ristretta.

Le componenti di $\bar{\mathbf{a}}$ in un sistema di riferimento qualsiasi, nel quale la velocità della particella è v si ottengono mediante trasformazione di Lorentz:

$$\bar{\mathbf{a}} \equiv (\gamma\beta a, \gamma a).$$

Confrontando con la (4.28) si ricava la relazione relativistica tra la derivata della velocità galileiana e l'accelerazione nel sistema proprio:

$$\frac{d(\gamma v)}{dt} = a. \quad (4.29)$$

Per il modo in cui è stata ottenuta questa legge relativistica vale in tutti i riferimenti inerziali (si ricordi comunque che tutta questa discussione è ristretta al caso di accelerazione parallela alla velocità). Nel caso di velocità piccola rispetto a c , il fattore γ si approssima all'unità e si ottiene la relazione classica tra velocità e accelerazione.

Come esempio, studiamo il moto uniformemente accelerato (a costante). In questo caso la (4.29) si integra immediatamente, e scegliendo come condizione iniziale $v = 0$ all'istante $t = 0$ si ha

$$\gamma v = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = at.$$

Risolvendo ora rispetto a v si ha, con passaggi algebrici elementari

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2}t^2}} = \frac{c \frac{t}{T}}{\sqrt{1 + (\frac{t}{T})^2}}, \quad (4.30)$$

avendo introdotto la costante di tempo

$$T = \frac{c}{a},$$

di cui si vedrà più avanti il significato fisico. Invito il lettore a disegnare il grafico di v in funzione di t e ad osservare che la velocità, pur crescendo in maniera monotona rimane comunque inferiore a c , valore al quale tende asintoticamente per $t \rightarrow \infty$. Assumendo la condizione iniziale $x = 0$ all'istante iniziale, una ulteriore, semplice, integrazione fornisce la legge oraria del moto

$$x = cT \left(\sqrt{1 + (t/T)^2} - 1 \right). \quad (4.31)$$

Nel diagramma spazio-tempo questa è l'equazione di un arco di iperbole equilatera passante per l'origine O ed asintotica alla retta di equazione

$$x = c(t - T),$$

che interseca l'asse dei tempi nell'evento E che si verifica nel punto di partenza all'istante T (vedi figura 4.15). Questo asintoto rappresenta la propagazione di un segnale luminoso emesso da E . Osservando la figura si può constatare un fatto inaspettato e sorprendente: nessun segnale inviato dalla posizione di partenza dopo il tempo T raggiunge il punto materiale. Poniamo che un astronauta intraprenda un viaggio interstellare con un razzo capace di una accelerazione costante pari all'accelerazione di gravità (assicurando così il massimo comfort ai passeggeri). Il corrispondente valore di T è all'incirca un anno e quindi l'astronauta non potrà mai sapere (a meno di spegnere i motori) ciò che accade sulla Terra un anno dopo la sua partenza.

Il paradosso dei gemelli

Come applicazione di queste formule cinematiche, vale la pena di discutere brevemente il popolare 'paradosso' dei gemelli. Supponiamo che l'astronauta dell'esempio precedente utilizzi il suo razzo per un viaggio di andata e ritorno alla stella Proxima Centauri che dista dal Sole circa quattro anni-luce. Il viaggio di andata viene compiuto accelerando uniformemente nella prima metà del percorso e decelerando uniformemente nella seconda metà (ovviamente non si può accelerare per tutto il percorso); analogamente si procede per il ritorno. Il tempo totale di percorrenza è evidentemente il quadruplo del tempo necessario per coprire la prima metà del percorso di andata. Risolvendo la (4.31) rispetto a t si ha

$$t = T \sqrt{\left(1 + \frac{x}{cT}\right)^2 - 1}.$$

Per avere il tempo \bar{t} del primo quarto di percorso (due anni luce) occorre porre in questa formula $x = 2cT$ e si ottiene

$$\bar{t} = \sqrt{8}T \simeq 2.8T \simeq 2.8 \text{ anni},$$

e quindi il tempo totale è circa undici anni. Questo per l'osservatore O , diciamo il gemello rimasto sulla Terra. Per l'astronauta trascorre invece il tempo proprio τ del sistema a riposo e come sappiamo risulta

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt = \frac{dt}{\sqrt{1 + (t/T)^2}}.$$

Quindi il tempo proprio del primo quarto di percorso è

$$\bar{\tau} = \int_0^{\bar{t}} \frac{dt}{\sqrt{1 + (t/T)^2}} = T \ln(\sqrt{8} + 3) \simeq 1.8T.$$

Per l'astronauta dunque, al momento del ritorno, saranno trascorsi poco più di sette anni ed egli si trova di quattro anni più giovane del gemello; la dilatazione dei tempi ha avuto un effetto reale.

Questo risultato non contraddice affatto il principio di relatività che si applica a sistemi in moto relativo *uniforme*. Il moto dell'astronauta è accelerato rispetto alle stelle fisse e questa accelerazione, come si è già osservato alla fine del primo paragrafo, ha effetti osservabili; uno di questi effetti è appunto un *reale* rallentamento degli orologi.

Il 'ringiovanimento' c'è anche se uno dei gemelli compie, molto più modestamente, un giro del mondo con un aereo a reazione. Data la brevità del viaggio l'effetto è assai piccolo, ma perfettamente misurabile se i gemelli sono due orologi atomici. L'esperimento è stato effettivamente eseguito ed ha fornito ovviamente una conferma della teoria di Einstein. ■

Tornando alla cinematica in tre dimensioni, per l'accelerazione occorre distinguere la componenti parallela e perpendicolare alla velocità; partendo dal riferimento tangente

$$\bar{\mathbf{a}} \equiv (\mathbf{a}_t, \vec{\mathbf{a}}) = (0, a_{\parallel}, \vec{\mathbf{a}}_{\perp}).$$

mediante la trasformazione di Lorentz si trovano facilmente le componenti del quadri-vettore accelerazione nel sistema di laboratorio:

$$\bar{\mathbf{a}} = (\gamma\beta a_{\parallel}, \gamma a_{\parallel}, \vec{\mathbf{a}}_{\perp}).$$

Lascio come esercizio la dimostrazione del fatto che l'accelerazione totale

$$a = \sqrt{a_{\parallel}^2 + a_{\perp}^2}$$

è invariante anche in questo caso più generale.

4.9 Dinamica relativistica

Le leggi della meccanica classica, come già osservato in precedenza, continuano ad essere valide nei sistemi di riferimento in cui le velocità delle particelle sono piccole rispetto a c . Da ciò segue che per trovare le leggi della meccanica relativistica non occorre eseguire dei nuovi esperimenti, ma bisogna semplicemente imparare a trasformare le leggi di Newton dal sistema proprio a un qualsiasi riferimento inerziale. In questo modo si arriva a prevedere degli effetti nuovi che ovviamente *devono* essere sottoposti a verifica sperimentale.

Naturalmente il punto di partenza è la definizione di massa inerziale. In meccanica classica il rapporto tra le masse di due corpi viene definito mediante le accelerazioni che si determinano quando i corpi interagiscono soltanto fra loro (vedi paragrafo 2). L'unica restrizione che bisogna imporre a questa definizione classica è che la velocità relativa dei due corpi sia piccola rispetto a c . In questo caso esiste un sistema di riferimento che è proprio per ambedue i corpi. Per l'invarianza delle accelerazioni proprie, trovata alla fine del paragrafo precedente, si ha allora che il rapporto tra le masse è lo stesso per tutti gli osservatori inerziali. Pertanto, anche in relatività la massa inerziale è un invariante che assume lo stesso valore in tutti i sistemi inerziali. In effetti si potrebbe anche pensare che tutte le masse vengano alterate dal moto secondo un fattore dipendente solo dalla velocità (lasciando così inalterati i loro rapporti), e questa ipotesi fu anche adottata nei primordi dello studio della relatività, quando si postulava che un corpo avente massa m nel sistema proprio, avesse massa γm nel generico sistema inerziale. Questa idea, oltre ad essere inutile, è profondamente contraria allo spirito della teoria della relatività, ed è oggi del tutto obsoleta.

L'invarianza della massa inerziale consente di determinare subito l'espressione relativistica di tutte le grandezze meccaniche. Il quadri-vettore quantità di moto di una particella di massa m viene definito come

$$\bar{\mathbf{p}} \equiv (\mathbf{p}_t, \vec{\mathbf{p}}) = m\bar{\mathbf{v}} \equiv (\gamma mc, \gamma m\vec{\mathbf{v}}). \quad (4.32)$$

Il fatto che $\bar{\mathbf{p}}$ sia un quadrivettore segue appunto dall'invarianza di m e dal fatto che $\bar{\mathbf{v}}$ è un quadrivettore. È molto interessante esaminare le componenti di $\bar{\mathbf{p}}$ nel limite classico ($v \ll c$). La parte spaziale si riduce evidentemente all'ordinario vettore quantità di moto. Per la parte temporale occorre tenere in conto anche i termini del second'ordine. Sviluppando γ in serie di potenze di v/c e trascurando i termini di grado superiore a 2, si ottiene

$$\gamma \simeq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2,$$

e quindi

$$\bar{p}_t \simeq mc + mc \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 = \frac{1}{c} \left(mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 \right).$$

Per piccoli valori di v la componente temporale di $\bar{\mathbf{p}}$ rappresenta quindi - a meno del fattore $1/c$ - l'energia cinetica della particella. Vi è in verità il termine additivo mc^2 che, dal punto di vista classico, non è rilevante perché l'energia è definita a meno di una costante additiva; ma vedremo tra un attimo che quando si considerano processi in cui intervengono più particelle esso svolge un ruolo assai importante. Allora risulta naturale definire l'energia relativistica di una particella di massa m come

$$\mathcal{E} = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

L'uso del carattere calligrafico \mathcal{E} invece di E , si rende necessario per evitare confusioni con il simbolo di campo elettrico

Nel sistema proprio questa si riduce a

$$\mathcal{E}_0 = mc^2$$

che prende il nome di energia a riposo. La differenza

$$K = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = (\gamma - 1)mc^2$$

viene chiamata ovviamente energia cinetica e, come visto sopra, si approssima all'espressione classica $\frac{1}{2}mv^2$ per piccole velocità. Inoltre, la parte spaziale di $\bar{\mathbf{p}}$ viene chiamata 'impulso' della particella e indicata con $\vec{\mathbf{p}}$:

$$\vec{\mathbf{p}} \equiv \gamma m \vec{\mathbf{v}} = \frac{m \vec{\mathbf{v}}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Come si è visto sopra, per velocità non relativistiche l'impulso si approssima alla quantità di moto classica. In definitiva il quadrivettore $\bar{\mathbf{p}}$ si scrive

$$\bar{\mathbf{p}} = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{\mathbf{p}} \right).$$

Dalla definizione di $\bar{\mathbf{p}}$ si vede subito che

$$\mathbf{p}^2 = m^2 c^2,$$

e quindi tra l'energia e l'impulso di una particella di massa m sussiste la relazione

$$\mathcal{E}^2 = m^2 c^4 + c^2 |\vec{\mathbf{p}}|^2. \quad (4.33)$$

In relatività ha senso considerare anche particelle di massa nulla e l'indagine sui processi microscopici ha mostrato la necessità di introdurre questa generalizzazione. Non è questa la sede per discutere la natura di tali particelle, ma due osservazioni importanti si possono fare sulla base dei soli elementi di relatività fin qui sviluppati. In primo luogo il quadrivettore $\bar{\mathbf{p}}$ in questo caso, è nullo e ciò implica che le particelle di massa nulla hanno sempre velocità c . Per esse non esiste il sistema a riposo e non c'è approssimazione classica. Inoltre le espressioni di \mathcal{E} e \vec{p} in termini della massa inerziale non sono più applicabili ma la (4.33) è ancora applicabile e fornisce l'importante relazione

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c}.$$

La quantità di moto è una grandezza meccanica di particolare importanza nello studio delle collisioni tra particelle subatomiche. Questi processi hanno una notevole somiglianza con le reazioni chimiche in quanto le particelle che entrano in una collisione non sono, in generale, le stesse di quelle che ne vengono fuori, così come nella collisione di molecole di determinate specie chimiche si formano molecole di altre specie. A titolo di esempio, una reazione interessante per la produzione di energia nucleare è la fusione di un nucleo di deuterio (D) con un nucleo di trizio (T) che formano un nucleo di elio con la concomitante emissione di un neutrone. Simbolicamente si scrive



Questa è una delle reazioni attraverso cui le stelle del tipo del Sole producono energia e che potrebbe, in un futuro non molto lontano, costituire una immensa[†] fonte di energia per le attività umane. Ora la generalizzazione relativistica della legge classica di conservazione della quantità di moto è ovviamente

$$\bar{\mathbf{p}}_D + \bar{\mathbf{p}}_T = \bar{\mathbf{p}}_{He} + \bar{\mathbf{p}}_n.$$

che scritta in termini di componenti in un generico sistema inerziale diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_D + \mathcal{E}_T &= \mathcal{E}_{He} + \mathcal{E}_n \\ \vec{\mathbf{p}}_D + \vec{\mathbf{p}}_T &= \vec{\mathbf{p}}_{He} + \vec{\mathbf{p}}_n. \end{aligned}$$

La conservazione del quadrivettore quantità di moto comprende sia la conservazione dell'energia che quella dell'impulso. Nei processi relativistici si conserva l'energia ma non la massa; infatti nella reazione citata risulta

$$m_D + m_T > m_{He} + m_n \quad \Rightarrow \quad \Delta m \equiv (m_D + m_T) - (m_{He} + m_n) > 0.$$

Di conseguenza l'energia cinetica dei prodotti di reazione è maggiore dell'energia cinetica dei reagenti: la differenza Δm tra la somma delle masse finali e la somma delle masse iniziali viene ritrovata come surplus di energia cinetica

$$\Delta K = (K_{He} + K_n) - (K_D + K_T) = \Delta m c^2.$$

[†] La quantità di deuterio contenuta in un litro di acqua di mare può fornire l'energia equivalente a quella di circa 300 litri di gasolio

In sintesi, nei processi nucleari si ha trasformazione di massa (energia a riposo) in energia cinetica. Due commenti mi sembrano appropriati:

1. Nei processi a bassa energia, in cui le velocità sono piccole rispetto a c , l'energia cinetica è trascurabile rispetto all'energia a riposo. Per questo motivo nei processi chimici vale con ottima approssimazione la legge di conservazione della massa.
2. L'invarianza di una grandezza fisica è cosa del tutto distinta e indipendente dalla conservazione. La massa è per l'appunto invariante ma non si conserva.

Una conseguenza importante della legge di conservazione dell'energia-impulso è il fatto che l'energia a riposo di una particella di massa m

EQUAZIONE
DI EINSTEIN

$$\mathcal{E}_0 = mc^2,$$

non può essere considerata una costante additiva arbitraria ma *ha* un significato fisico. Questa energia che non dipende da gradi di libertà di traslazione è un'energia interna dipendente dalla struttura intima della particella; anche particelle microscopiche come il protone o l'elettrone, che fin'ora abbiamo considerato come puntiformi, devono avere una struttura e quindi un'estensione spaziale. D'altra parte, immaginando, per esempio, l'elettrone come una sferetta carica di raggio r_e , dalla (2.44) sappiamo che l'energia elettrostatica è dell'ordine di

$$U \sim \frac{e^2}{r_e},$$

dove e è la carica elementare. Assumendo che l'energia a riposo dell'elettrone sia di origine elettrostatica

$$\mathcal{E}_0 \sim U,$$

stimiamo il *raggio classico dell'elettrone* come

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2} \approx 10^{-13} \text{cm}. \quad (4.35)$$

Questa distanza rappresenta un limite di validità dell'elettrodinamica classica: tutte le leggi enunciate in questo libro sono applicabili solo a processi che avvengono su scala grande rispetto a r_e . Alla scala atomica, che è cinque ordini di grandezza maggiore, l'elettrodinamica fornisce risultati di meravigliosa precisione, a patto di tenere conto degli effetti quantistici, che pure rappresentano un limite della teoria classica, ma in un senso completamente diverso da quello discusso qui⁵.

⁵La Teoria Quantistica differisce dalle teorie classiche nella 'rappresentazione' dei sistemi fisici ma non introduce alcun cambiamento delle leggi né della meccanica né dell'elettrodinamica.

Resta da discutere il secondo principio della dinamica. La naturale estensione al caso relativistico della definizione classica di forza si ha ponendo

$$\bar{\mathbf{f}} \equiv m\bar{\mathbf{a}} = m \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{d\tau}. \quad (4.36)$$

$\bar{\mathbf{f}}$ viene chiamata forza di Minkowski ed è ovviamente un quadrivettore; l'equazione vale quindi in ogni sistema inerziale. Nel sistema a riposo risulta

$$\bar{\mathbf{f}} \equiv (\mathbf{f}_t, \vec{\mathbf{f}}) = (0, m) = (0, \vec{\mathbf{F}}),$$

indicando con $\vec{\mathbf{F}}$ la forza Newtoniana. Applicando la trasformazione di Lorentz si trovano le componenti della forza di Minkowski nel generico riferimento inerziale, in cui la velocità della particella è $\vec{\mathbf{v}}$

$$\bar{\mathbf{f}} = (\gamma\beta F_{\parallel}, \gamma F_{\parallel}, \vec{\mathbf{F}}_{\perp}), \quad (4.37)$$

dove F_{\parallel} e $\vec{\mathbf{F}}_{\perp}$ sono, come d'uso, le componenti longitudinale e trasversale rispetto alla velocità. Si ha quindi che passando dal sistema a riposo al generico riferimento inerziale la componente longitudinale della forza si dilata di un fattore γ mentre la componente perpendicolare resta invariata. Ricordando l'espressione di $\bar{\mathbf{v}}$ le componenti spaziali della (4.36) si possono scrivere

$$\begin{aligned} \gamma F_{\parallel} &= m \left(\frac{d\gamma\vec{\mathbf{v}}}{d\tau} \right)_{\parallel} \\ \vec{\mathbf{F}}_{\perp} &= m \left(\frac{d\gamma\vec{\mathbf{v}}}{d\tau} \right)_{\perp} \end{aligned}$$

Volendo le equazioni espresse in termini del tempo t dell'osservatore invece del tempo proprio τ basta tener presente la legge di dilatazione dei tempi $dt = \gamma d\tau$. Dividendo per γ le due equazioni precedenti si ha

$$F_{\parallel} = m \left(\frac{d\gamma\vec{\mathbf{v}}}{dt} \right)_{\parallel} \quad (4.38)$$

$$\frac{1}{\gamma} \vec{\mathbf{F}}_{\perp} = m \left(\frac{d\gamma\vec{\mathbf{v}}}{dt} \right)_{\perp} \quad (4.39)$$

Queste equazioni vengono spesso usate, in luogo della (4.36), per studiare la dinamica di un punto materiale, tanto che è invalso l'uso di chiamare 'forza' il vettore $\vec{\mathcal{F}}$ di componenti

$$\vec{\mathcal{F}} \equiv \frac{1}{\gamma} \bar{\mathbf{f}} = \left(F_{\parallel}, \frac{1}{\gamma} \vec{\mathbf{F}}_{\perp} \right). \quad (4.40)$$

In altre parole, viene definita come forza la parte spaziale della forza di Minkowski divisa per γ . Con l'adozione di questa definizione di forza, la legge della dinamica si scrive nella forma compatta

$$\vec{\mathcal{F}} = m \left(\frac{d\gamma\vec{\mathbf{v}}}{dt} \right). \quad (4.41)$$

È interessante notare che questa legge è espressa in termini di grandezze non relativistiche in quanto né il primo né il secondo membro sono la parte spaziale di un quadrivettore; ciò nonostante essa è valida in ogni sistema di riferimento inerziale. La ‘magia’ è operata dalla forza di Minkowski che fornisce la corretta espressione di $\vec{\mathcal{F}}$ valida in tutti i riferimenti inerziali. Un esempio di applicazione di questa procedura è dato nel prossimo paragrafo per il caso di un campo elettrostatico; il caso generale della legge della dinamica in un campo elettromagnetico arbitrario verrà discusso nel Capitolo 6.

Infine, è anche interessante esaminare la componente temporale dell’equazione della dinamica (4.36):

$$\gamma\beta F_{\parallel} = m \frac{d\gamma c}{d\tau}.$$

Eliminando anche qui il tempo proprio e ricordando l’espressione dell’energia di una particella si ha

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dK}{dt}, \quad (4.42)$$

che rappresenta la generalizzazione al caso relativistico del teorema delle forze vive.

4.9.1 Moto di una carica in campo elettrostatico

Per studiare la dinamica di una particella carica in un campo elettrico \vec{E} , occorre determinare la forza che il campo esercita su una carica q in moto con velocità \vec{v} . Si badi che $q\vec{E}$ è la forza che agisce sulla particella *in quiete* e quindi per ottenere la corretta legge della dinamica è necessario seguire il procedimento indicato nel paragrafo precedente, passando al sistema proprio della carica. Nel caso di un campo *elettrostatico*⁶ valgono le leggi di trasformazione (4.17)

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma \vec{E}_{\perp}, \quad E'_{\parallel} = E_{\parallel}$$

dove \vec{E}' è il campo nel sistema di riferimento in cui q è istantaneamente in quiete. In tale riferimento la forza newtoniana è espressa come prodotto tra carica e campo:

$$\vec{F}'_{\perp} \equiv q\vec{E}'_{\perp} = q\gamma \vec{E}_{\perp}, \quad \vec{F}'_{\parallel} \equiv q\vec{E}'_{\parallel} = q\vec{E}_{\parallel}.$$

Tornando al sistema di riferimento ‘di laboratorio’, si ha

$$\vec{\mathcal{F}}_{\perp} \equiv \frac{1}{\gamma} \vec{F}'_{\perp} = q\vec{E}_{\perp}, \quad \vec{\mathcal{F}}_{\parallel} \equiv \vec{F}'_{\parallel} = q\vec{E}_{\parallel},$$

e cioè

$$\vec{\mathcal{F}} = q\vec{E}. \quad (4.43)$$

⁶Nel caso di campi variabili nel tempo non è sufficiente conoscere il campo elettrico per determinare la forza; di ciò si parlerà nel sesto capitolo.

La semplicità di questo risultato consegue dalla cancellazione, nella componente trasversale di \vec{F} , del fattore $1/\gamma$ nella legge di trasformazione della forza, con il fattore γ nella legge di trasformazione del campo. Pertanto l'equazione della dinamica per una particella in moto in un campo elettrostatico si scrive

$$q\vec{E} = m \frac{d\gamma\vec{v}}{dt}. \quad (4.44)$$

Come esempio, consideriamo il caso di moto in un campo uniforme. Per semplicità supponiamo che la velocità iniziale sia nulla; il moto si svolge in una dimensione, nella direzione del campo elettrico. Indicando con \hat{x} un asse orientato parallelo e concorde a \vec{E} , la proiezione lungo l'asse \hat{x} della (4.44) fornisce

$$\frac{d\gamma v}{dt} = \frac{qE}{m} = a.$$

Confrontando con la (4.29) si vede immediatamente che questa è l'equazione di un moto uniformemente accelerato. La soluzione è data dalla (4.30) per la velocità e dalla (4.31) per la legge oraria:

$$v = \frac{c \frac{t}{T}}{\sqrt{1 + (t/T)^2}}, \quad x = cT \left(\sqrt{1 + (t/T)^2} - 1 \right),$$

dove

$$T = \frac{c}{a} = \frac{mc}{qE}.$$

Per $t \ll T$, le approssimazioni valide fino al second'ordine nel rapporto t/T sono

$$v \approx c \frac{t}{T} = at = \frac{qE}{m} t, \quad x \approx cT \frac{1}{2} \frac{t^2}{T^2} = \frac{1}{2} at^2 = \frac{qE}{2m} t^2,$$

che il lettore riconoscerà immediatamente come le leggi cinematiche classiche. È interessante stimare l'ordine di grandezza della costante di tempo T per un elettrone sottoposto a un intenso campo elettrico macroscopico; assumendo come al solito $E \sim 10^2$ ues si ha

$$T \sim 10^{-9} \text{ sec}.$$

Un elettrone raggiunge quindi velocità relativistica dopo aver percorso una distanza dell'ordine di un metro.

Per l'energia cinetica il teorema delle forze vive (4.42) fornisce un importante risultato di validità generale, non limitata al caso di campo uniforme

$$q\vec{E} \cdot \vec{v} = q \frac{\vec{E} \cdot d\vec{r}}{dt} = -q \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dK}{dt},$$

dove φ è il potenziale elettrostatico. Abbiamo quindi la legge di conservazione

$$mc^2(\gamma - 1) + q\varphi = \text{cost}, \quad (4.45)$$

che consente di ricavare la velocità come funzione della posizione senza che sia necessario risolvere le equazioni del moto. Il lettore può fare un utile esercizio verificando che la soluzione del moto in campo uniforme soddisfa la legge di conservazione.

Capitolo 5

Correnti elettriche

In linea di principio, la descrizione di un sistema di cariche puntiformi in movimento si può dare assegnando per ciascuna carica la legge oraria del moto; questa descrizione ‘*lagrangiana*’ di un sistema di punti materiali, familiare dalla meccanica, è però praticamente realizzabile solo nel caso di un numero limitato di particelle: si è già discusso nel §1.4 l’impossibilità di una simile descrizione in tutti i casi in cui le particelle sono numerose come i costituenti elementari di un corpo macroscopico. Nello studio della dinamica dei fluidi, questa difficoltà viene superata dalla descrizione ‘*euleriana*’ che prescinde dal dettaglio del moto delle singole particelle introducendo delle grandezze medie, le variabili euleriane (densità di massa, velocità del fluido etc.), che sono funzioni regolari della posizione e del tempo. Le densità di carica elettrica di volume, di superficie, di linea, introdotte nel primo capitolo, sono tutte grandezze euleriane; in questo capitolo, l’unica novità rispetto al caso statico è che esse andranno considerate d’ora in avanti come funzioni del tempo oltre che della posizione ($\rho(\vec{r}, t)$, $\sigma(\vec{r}, t)$ etc.). In elettrodinamica, oltre alle densità di carica occorre introdurre una sola altra variabile euleriana, il vettore *densità di corrente*.

5.1 Densità di corrente

Partiamo dalla considerazione di uno sciame di particelle aventi tutte la stessa carica q ; supponiamo inoltre che tutte le particelle che in un istante fissato t si trovano in una regione macroscopicamente piccola (un ‘punto’ \vec{r}) abbiano la stessa velocità $\vec{v}(\vec{r}, t)$ e sia $n(\vec{r}, t)$ la densità in numero. Definiamo *densità di corrente* il vettore

$$\vec{J} \equiv nq\vec{v}.$$

Osserviamo che n , \vec{v} e \vec{J} sono tutte grandezze euleriane e quindi funzioni della posizione e del tempo. È facile verificare che il flusso di \vec{J} calcolato per una superficie \mathcal{S} rappresenta la carica che fluisce attraverso la superficie per unità di tempo. Consideriamo l’evoluzione del sistema di particelle in un generico intervallo di tempo $(t, t + \Delta t)$ durante il quale

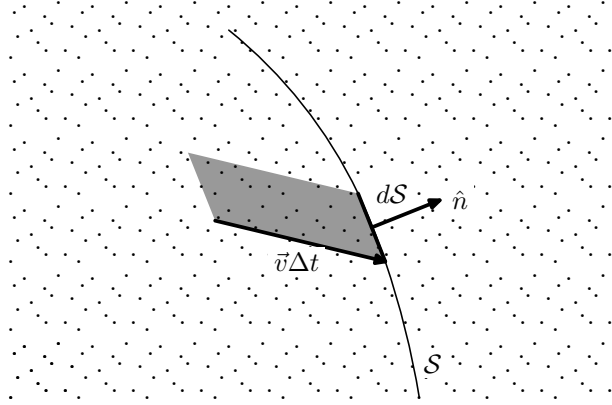


Figura 5.1: Flusso di carica attraverso una superficie.

ognuna delle particelle effettua uno spostamento $\vec{v}\Delta t$. Dall'osservazione della Figura 5.1 risulta evidente che le particelle che in questo intervallo di tempo attraversano l'elemento dS della superficie sono quelle che all'istante t si trovano nella zona ombreggiata, un parallelepipedo di base dS e spigolo $\vec{v}\Delta t$. Il volume del parallelepipedo è $dv = (\vec{v}\Delta t) \cdot \hat{n} dS = \vec{v} \cdot d\vec{S} \Delta t$ e perciò il numero di 'portatori di carica' che attraversano l'elemento di superficie è

$$dN = n dv = n \vec{v} \cdot d\vec{S} \Delta t.$$

La carica trasportata in questo processo è quindi

$$dQ = q dN = nq \vec{v} \cdot d\vec{S} \Delta t = (\vec{J} \cdot d\vec{S}) \Delta t.$$

La carica ΔQ che attraversa nell'intervallo di tempo Δt l'intera superficie S si ottiene semplicemente integrando:

$$\Delta Q = \int_S dQ = \left(\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \right) \Delta t = I_S \Delta t, \quad (5.1)$$

dove I_S è l'*intensità di corrente* attraverso la superficie S

$$I_S \equiv \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}. \quad (5.2)$$

L'intensità di corrente ha dimensioni di [carica]/[tempo] e si misura nel sistema gaussiano in statcoulomb/secondi; nel sistema internazionale l'unità di misura di I viene invece assunta come nuova grandezza primitiva e prende il nome di Ampère (abbreviato con A). La definizione di Ampère verrà data nel prossimo capitolo; per il momento basta notare che, dal momento che l'unità di misura del tempo è la stessa per i due sistemi, il fattore di conversione è lo stesso di quello delle cariche

$$1 \text{ Ampère} = 1 \text{ C/sec} = 8.9874 \times 10^9 \text{ statcoulomb/sec}.$$

Ovviamente, per quanto riguarda le dimensioni della densità di corrente, occorre soltanto dividere per un'area; per esempio, nel sistema internazionale la densità viene misurata in A/m².

Una puntualizzazione importante deve essere fatta riguardo all'uso del simbolo ΔQ nella (5.1): il prefisso Δ *non* indica, come è usuale, l'incremento di una qualche funzione Q nell'intervallo di tempo Δt , né vuole alludere alla possibilità che la (5.1) possa essere utilizzata per definire una tale funzione; sarebbe quindi un grave errore (che purtroppo si riscontra non di rado in trattazioni elementari) dividere ambo i membri della (5.1) per Δt e asserire che I_S è una derivata. Il simbolo ΔQ sta semplicemente a indicare che la carica che attraversa la superficie è un infinitesimo dello stesso ordine di Δt .

La (5.1) si estende facilmente a situazioni più generali; in uno sciame di particelle microscopiche le velocità non sono tutte eguali ma, tipicamente, hanno una distribuzione maxwelliana. Tuttavia la nozione di densità di corrente prescinde totalmente dal tipo di distribuzione; utilizzando un generico parametro k per classificare i differenti valori delle velocità indichiamo con n_k la densità in numero della famiglia di particelle dotate di velocità \vec{v}_k e definiamo la densità di corrente come¹

$$\vec{J} \equiv \sum_k q n_k \vec{v}_k.$$

La carica totale trasportata attraverso una superficie è ovviamente la somma delle cariche trasportate da ciascuna famiglia \vec{v}_k e pertanto la (5.2) continua a valere in questo caso più generale. Osserviamo che definendo la velocità media delle particelle

$$\vec{u} \equiv \langle \vec{v} \rangle \equiv \frac{\sum_k n_k \vec{v}_k}{\sum_k n_k} = \frac{\sum_k n_k \vec{v}_k}{n}, \quad (5.3)$$

dove n rappresenta la densità totale di particelle, l'espressione della densità di corrente si scrive ancora

$$\vec{J} = q n \vec{u}. \quad (5.4)$$

Infine, le famiglie di portatori possono distinguersi per la carica portata da ciascuna particella. Il caso fisicamente più significativo è quello di due specie chimiche (vedi §1.4) con cariche di segno opposto, che possiamo contrassegnare con q_+ e q_- ; indicando con \vec{u}_+ e \vec{u}_- le velocità medie delle due specie chimiche e con n_+ , n_- le rispettive densità in numero, il vettore \vec{J} è espresso da

$$\vec{J} = q_+ n_+ \vec{u}_+ + q_- n_- \vec{u}_-. \quad (5.5)$$

Vale la pena di notare che cariche di segno opposto dotate di velocità di verso opposto danno contributi concordi all'intensità di corrente attraverso una superficie; in parole povere, una carica che attraversa una superficie in un senso, equivale a una carica opposta che attraversa in senso contrario.

¹Nelle formule assumiamo che k sia un indice discreto; ovviamente nel caso in cui k è un parametro continuo si devono sostituire le somme con integrali ma, dal punto di vista concettuale, non cambia nulla.

I prodotti $q_+n_+ = \rho_+$ e $q_-n_- = \rho_-$ rappresentano, rispettivamente, le densità di carica di volume degli sciami di cariche positive e negative: questi due ‘fluidi’ di carica (e le rispettive velocità) determinano sia la densità di carica totale che la densità di corrente

$$\rho = \rho_+ + \rho_- , \quad \vec{J} = \rho_+ \vec{u}_+ + \rho_- \vec{u}_- . \quad (5.6)$$

L’esistenza di cariche di segno opposto comporta che la densità di carica e la densità di corrente sono due grandezze del tutto indipendenti; per esempio, la densità di carica può essere nulla senza che sia nulla la densità di corrente; infatti

$$\rho = 0 \Rightarrow \rho_- = -\rho_+ \Rightarrow \vec{J} = \rho_+ (\vec{u}_+ - \vec{u}_-),$$

che non si annulla se $\vec{u}_+ \neq \vec{u}_-$. Vedremo più avanti che la coppia di variabili (ρ, \vec{J}) fornisce in elettrodinamica una descrizione esauriente di un sistema di particelle cariche. Di più, si può dimostrare* che i quattro numeri $(c\rho, \vec{J})$ si trasformano come le componenti di un quadrivettore e rappresentano quindi le componenti di una grandezza intrinseca ‘la quadricorrente’. In questo libro non verrà discussa in maniera formale l’invarianza relativistica delle leggi dell’elettromagnetismo ma il fatto che il vettore \vec{J} , a differenza dei vettori della meccanica di Newton, è la parte spaziale di un quadrivettore sarà richiamato nel seguito.

Nel caso di distribuzioni di carica di superficie (che si muovono restando sulla superficie) si definisce la densità di corrente superficiale

$$\vec{\mathcal{J}} \equiv \sigma_+ \vec{u}_+ + \sigma_- \vec{u}_- , \quad (5.7)$$

il cui flusso attraverso una *linea* tracciata sulla superficie rappresenta ovviamente la carica che attraversa quella linea per unità di tempo. Si noti che $\vec{\mathcal{J}}$ è un vettore a due componenti nel piano tangente alla superficie; inoltre le dimensioni di $\vec{\mathcal{J}}$ sono quelle di \vec{J} moltiplicata una lunghezza.

Infine, per cariche che scorrono in un filo, definiamo il vettore

$$\vec{j} = \lambda_+ \vec{u}_+ + \lambda_- \vec{u}_- , \quad (5.8)$$

dove \vec{u}_+ e \vec{u}_- sono le velocità delle distribuzioni lineari di cariche positive λ_+ , e negative λ_- , in un punto del filo. Le dimensioni di \vec{j} sono evidentemente quelle di una carica su un tempo e cioè le stesse di una intensità di corrente. Si osservi che le velocità \vec{u}_+ e \vec{u}_- hanno necessariamente la direzione della tangente al filo; allora, indicando con $\hat{\tau}$ il versore della tangente si può scrivere

$$\vec{u}_+ = u_+ \hat{\tau}, \quad \vec{u}_- = u_- \hat{\tau} \quad \Rightarrow \quad \vec{j} = (\lambda_+ u_+ + \lambda_- u_-) \hat{\tau} = I \hat{\tau} ,$$

dove u_+ e u_- sono le componenti delle velocità lungo $\hat{\tau}$ e

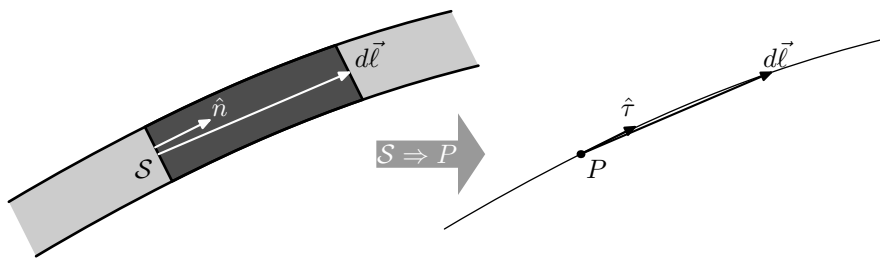
$$I = \lambda_+ u_+ + \lambda_- u_- , \quad (5.9)$$

l’intensità di corrente ‘attraverso un punto’ del filo. Conviene insistere sul fatto che, in accordo con la definizione (5.2), l’intensità di corrente I

*La dimostrazione viene omessa per brevità ma lo studente volenteroso può facilmente ricavarla da sé. (Suggerimento: partire dal sistema di riferimento proprio.)

Il carattere \mathcal{J} è la lettera ‘J’ scritta in corsivo.

è in ogni caso un flusso attraverso una superficie (in questo caso una sezione del filo) che, per aver trascurato le dimensioni trasversali si contrae in un punto. Si noti inoltre che, mentre \vec{J} , $\vec{\mathcal{J}}$ e \vec{j} sono vettori ‘intrinseci’, nel senso che hanno direzione, modulo e verso determinati dal moto delle cariche, lo scalare I ha un segno che dipende dalla scelta convenzionale del verso della normale alla superficie attraverso cui si calcola il flusso; nel caso delle correnti nei fili il verso della normale alla sezione viene considerato come verso positivo per la curva che rappresenta geometricamente il filo. La corrispondenza tra le due descrizioni è illustrata nella figura sotto:



A sinistra, il filo percorso da corrente è rappresentato come un tubo di sezione S nel quale fluisce una corrente di volume $\vec{J} = \rho_+ \vec{u}_+ + \rho_- \vec{u}_-$; a destra, lo stesso filo è rappresentato dalla curva disegnata a tratto sottile in cui scorre la corrente $\vec{j} = \lambda_+ \vec{u}_+ + \lambda_- \vec{u}_-$. Quando la sezione S si contrae al punto P la normale \hat{n} a S si identifica con la tangente $\hat{\tau}$ alla curva in P ; inoltre si ha immediatamente

$$\lambda_{\pm} = S\rho_{\pm} \quad \Longrightarrow \quad \vec{j} = S\vec{J} \quad \Longrightarrow \quad I = S\vec{J} \cdot \hat{n} = \vec{j} \cdot \hat{\tau}.$$

Infine, se indichiamo con $d\nu$ il volume del cilindretto di altezza $d\ell$, evidenziato in figura con un'ombreggiatura più scura, si ha l'importante identificazione

$$\vec{J}d\nu = Id\vec{\ell}. \quad (5.10)$$

La facile dimostrazione dell'uguaglianza è lasciata come esercizio.[†]

[†]Suggerimento: verificare l'uguaglianza di direzione, modulo e verso dei due membri.

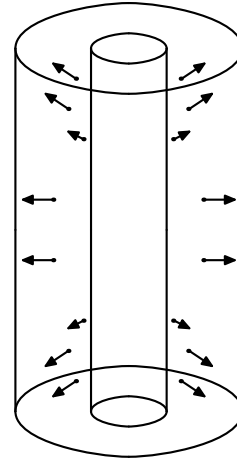
Esempi

EMISSIONE TERMOIONICA. Nel § 3.2 si è osservato che, in condizioni normali, gli elettroni di conduzione in un metallo non possono attraversare la superficie del conduttore; tuttavia, quando il metallo viene portato a temperatura elevata, una frazione non trascurabile degli elettroni di conduzione possiede energia cinetica sufficiente a superare la differenza di energia potenziale tra l'interno e l'esterno del conduttore. Nei metalli portati all'incandescenza si osserva un'apprezzabile flusso di elettroni dalla superficie. Un importante dispositivo che sfrutta questo effetto è il diodo raddrizzatore.



VALVOLA TERMOIONICA

Esso consiste essenzialmente di un elettrodo metallico cilindrico che viene tenuto a un potenziale negativo (catodo) rispetto a un elettrodo (anodo) cilindrico coassiale di raggio maggiore; il tutto è racchiuso in un'ampolla di vetro, non rappresentata in figura, nella quale viene fatto il vuoto. Il catodo viene portato a una temperatura elevata facendo circolare corrente in un filamento contenuto al suo interno (vedi effetto Joule più avanti) e ciò produce una emissione di elettroni; mantenendo una differenza di potenziale tra anodo e catodo i termoelettroni vengono accelerati verso l'anodo dando luogo a una corrente.



Si noti che questo dispositivo è unidirezionale: la corrente passa solo se l'anodo è a potenziale superiore rispetto al catodo. Infatti, in caso contrario, i termoelettroni vengono respinti verso il catodo, si accumulano intorno a esso e generano un controcampo che impedisce la fuoriuscita di altri elettroni. Questa caratteristica può essere desiderabile nella realizzazione di circuiti elettronici, per esempio per trasformare una corrente alternata in corrente continua, e giustifica la qualifica di 'raddrizzatore'. Dispositivi più complessi, triodi, tetrodi, etc., vengono realizzati, inserendo 'griglie di controllo' a un diverso potenziale tra catodo e anodo, per implementare varie funzioni utili in elettronica.²

CORRENTE DI TRASCINAMENTO. Una corrente può essere prodotta mettendo in moto un corpo carico: in questo caso le cariche verranno trasportate seguendo il moto del corpo. Ad esempio una lastra piana dotata di una densità di carica di superficie σ , muovendosi con velocità \vec{u} parallela al piano in cui giace la lastra stessa, dà luogo a una corrente di superficie con densità

$$\vec{\mathcal{J}} = \sigma \vec{u}.$$

Ancora, una sfera conduttrice uniformemente carica, ruotando intorno a un asse passante per il centro genera una corrente di superficie non uniforme; indicando con $\vec{\omega}$ la velocità angolare della sfera, la densità di corrente in un punto generico \vec{r} della superficie sarà

$$\vec{\mathcal{J}} = \sigma \vec{u} = \sigma \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

²Attualmente queste funzioni vengono svolte mediante componenti 'a stato solido', che sono di gran lunga preferibili per semplicità costruttiva, dimensioni, costi etc. rispetto alle 'valvole' termoioniche, e hanno consentito il grande sviluppo dell'elettronica di consumo.

Detto a il raggio della sfera, l'intensità di corrente che attraversa un meridiano si esprime come

$$I_{\mathcal{M}} = \int_{\mathcal{M}} \vec{J} \cdot \hat{n} \, ds,$$

dove \mathcal{M} indica il meridiano (metà del cerchio massimo da Nord a Sud), \hat{n} la normale al meridiano nella sfera (la direzione del parallelo) e ds è l'elemento d'arco del meridiano.

CORRENTI NEI METALLI. Nei conduttori metallici i portatori di carica sono gli elettroni che hanno tutta carica $-e$; se la densità in numero di elettroni di conduzione è n la densità di carica di volume è

$$\rho_-(\vec{r}, t) = -n(\vec{r}, t)e.$$

In condizioni statiche questa distribuzione di carica negativa è neutralizzata da una distribuzione di segno opposto degli ioni positivi. In presenza di correnti, la distribuzione di carica positiva resta uniforme, perché gli ioni del reticolo non partecipano al moto, mentre quella degli elettroni, come indicato nella formula sopra, dipende in generale dalla posizione e dal tempo. Di conseguenza la densità di carica totale in un conduttore non è necessariamente nulla. Tuttavia vi è un'importante categoria di processi 'quasi stazionari', che verranno definiti e discussi più avanti, per i quali con ottima approssimazione risulta, in ogni punto e in ogni istante

$$\rho_+ + \rho_- \approx 0.$$

In questo caso, come in elettrostatica, vi sono solo cariche sulla superficie dei conduttori che (di solito) sono statiche e non danno luogo a corrente; inoltre, le cariche positive detengono la quasi totalità della massa del conduttore e pertanto sono in quiete nel sistema di riferimento in cui il conduttore è fermo. In queste condizioni la corrente in un conduttore metallico è esprimibile come

$$\vec{J} = -ne\vec{u},$$

dove \vec{u} è la velocità media degli elettroni. Per un metallo di uso comune come il rame si può stimare che ciascun atomo fornisca, in media, un elettrone di conduzione; sapendo³ che un atomo di rame ha una massa atomica ~ 64 e che la densità in condizioni normali di temperatura e pressione è di circa 9 g/cm^3 si trova subito che $n \approx 9 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$. Pertanto la densità di volume della carica negativa mobile è[†]

$$\rho_- \simeq 9 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3} (-1.6 \times 10^{-19} \text{ C}) = -1.4 \times 10^4 \text{ C/cm}^3.$$

Per un filo a sezione circolare di 1 mm di diametro si stima quindi una densità lineare di carica negativa

$$\lambda_- = \rho_- \mathcal{S} \approx 10^2 \text{ C/cm}.$$

Esercizio: Calcolando l'integrale a lato dimostrare che

$$I_{\mathcal{M}} = \frac{Q}{T}$$

dove Q è la carica totale della sfera e T il periodo di rotazione.

[†]In questo capitolo si farà uso frequente delle unità SI perché le grandezze trattate si presentano spesso in applicazioni pratiche.

³Vedere ad esempio il sito web: www.chemicalelements.com

Queste stime mostrano che le quantità di carica che vengono trasportate in un conduttore metallico sono enormi e che, di conseguenza, anche un moto con velocità modesta produce correnti apprezzabili; per esempio, in un normale impianto domestico, circolano correnti dell'ordine dell'Ampère che corrispondono a una velocità media degli elettroni dell'ordine di

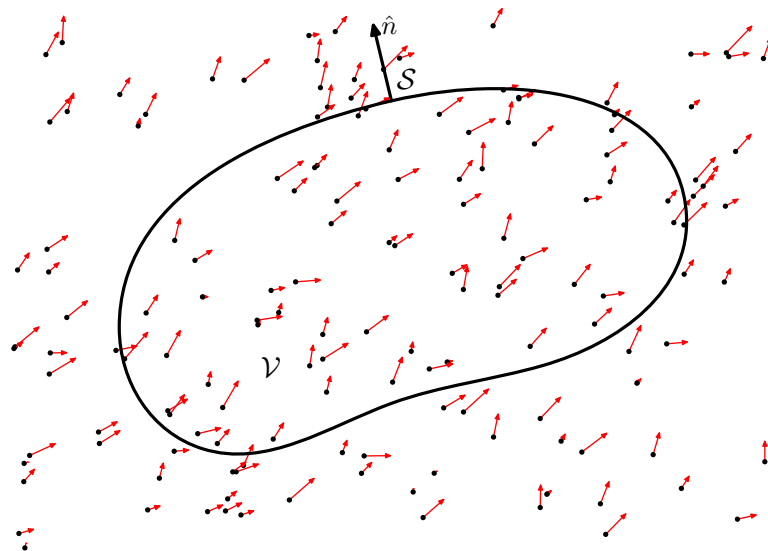
$$u = \frac{I}{|\lambda_-|} \approx 10^{-2} \text{ cm/sec.}$$

Questa velocità è piccola anche in confronto a quella di una lumaca: quando in casa 'si accende la luce', un elettrone presente nell'interruttore impiega delle ore per arrivare alla lampadina.* La corrente che circola nella lampadina (quasi istantaneamente) è dovuta a elettroni che sono già presenti nel filamento al momento in cui si agisce sull'interruttore.

*In realtà, dal momento che la corrente è alternata, non ci arriva mai, o meglio può arrivarci per il moto di agitazione termica ma non per il moto sistematico legato alla corrente.

5.2 La conservazione della carica

Nel primo capitolo abbiamo visto che nei processi nucleari singole particelle cariche possono essere create o distrutte ma sempre a coppie di cariche opposte; questa costituisce una descrizione, per così dire, lagrangiana della legge di conservazione della carica elettrica. Mediante la nozione di corrente possiamo ora dare una espressione analitica di questa legge in termini di grandezze euleriane.



Consideriamo una generica regione V dello spazio delimitata da una superficie chiusa S . Nella figura, i puntini neri rappresentano cariche in moto e le freccioline rosse indicano la velocità. Nel tempo, cariche entrano e escono dalla regione V attraverso la frontiera S . Indichiamo con $Q(t)$ la carica totale presente in V a un generico istante t . Dal momento che nessun processo che avviene internamente alla regione V può alterare la carica totale, ci può essere variazione di Q nel tempo solo a causa

di attraversamenti della frontiera; indicando con δQ la carica che emigra (ovviamente, differenza tra la carica netta che effettivamente esce e quella che entra) nell'intervallo di tempo dt deve quindi essere

$$Q(t + dt) = Q(t) - \delta Q.$$

Dalla definizione di intensità di corrente (5.1) si ha

$$\delta Q = I_S dt,$$

e quindi la legge di conservazione della carica si esprime

$$Q(t + dt) = Q(t) - I_S dt \quad \Longrightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = -I_S. \quad (5.11)$$

Conviene soffermarsi a notare che il differenziale $dQ = Q(t + dt) - Q(t)$ rappresenta la variazione infinitesima della carica *in* \mathcal{V} mentre δQ (che non è un differenziale) rappresenta la carica che *attraversa* la frontiera \mathcal{S} ; queste due quantità non sono in alcun modo legate logicamente ma è la natura a imporre $dQ = -\delta Q$ e quindi la (5.11). Questa uguaglianza costituisce l'espressione della legge di conservazione della carica nella sua forma più generale.

Nel caso di correnti di volume, per la (5.2), l'intensità di corrente I_S si esprime come il flusso di \vec{J} uscente dalla superficie chiusa \mathcal{S} :

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt}. \quad (5.12)$$

La legge di conservazione si presenta quindi come una sorta di legge di Gauss per il campo vettoriale \vec{J} e come tale è suscettibile di espressioni locali che mettono in relazione la densità di carica e la densità di corrente. Come per il campo elettrico, occorre distinguere il caso di cariche di volume da quello delle cariche di superficie. Nel primo caso la carica contenuta nella regione \mathcal{V} si esprime come

$$Q(t) = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}, t) dv \quad \Longrightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv.$$

D'altra parte, per il teorema della divergenza

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{J} dv,$$

e perciò

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{J} dv = - \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv.$$

L'eguaglianza vale per una regione generica \mathcal{V} e quindi deve essere

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (5.13)$$

Nota: per una grandezza *non conservata* non è valida una relazione come quella scritta a lato. Per esempio il *numero* di particelle cariche che fluisce attraverso la frontiera di un dominio non è in generale uguale alla diminuzione del numero di particelle contenute in quel dominio (vedi il decadimento del neutrone citato nel § 1.2).

Questa importante relazione viene chiamata *equazione di continuità*; dal confronto con la (1.27) si vede subito che (a parte un fattore -4π) le variazioni di densità di carica costituiscono sorgenti del campo vettoriale \vec{J} . Questa osservazione consente di scrivere subito la forma locale della legge di conservazione per cariche di superficie; confrontando con la (1.29), si ottiene per semplice sostituzione

$$J_{n1} - J_{n2} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad (5.14)$$

dove J_{n1} , J_{n2} sono le componenti della densità di corrente normali alla superficie sulla quale vi è la densità di carica σ . Un esempio di processo in cui si ha accumulo di carica su una superficie è la fase transitoria dell'induzione su un corpo conduttore discussa nel § 3.2: prima che si raggiunga l'equilibrio i portatori di carica (elettroni nel caso dei metalli) danno luogo a una corrente nel corpo che produce un accumulo di carica sulla superficie in quanto la corrente all'esterno del conduttore (J_{n1}) è nulla.

Un'altra applicazione importante della legge di conservazione della carica si ha per le correnti nei fili. Indicando con s un'ascissa curvilinea sulla curva che rappresenta il filo, $I(s, t) dt$ rappresenta la carica che, nell'intervallo di tempo $(t, t+dt)$ attraversa il punto (sezione) individuato da s . La carica di un generico elemento del filo $(s, s+ds)$ è espressa da $\lambda(s, t)ds$, dove λ è la densità di carica; per la conservazione della carica deve essere

$$[I(s+ds, t) - I(s, t)] dt = -[\lambda(s, t+dt) - \lambda(s, t)] ds \implies \frac{\partial I}{\partial s} = -\frac{\partial \lambda}{\partial t}. \quad (5.15)$$

Nel caso di fili metallici in regime 'lento' (vedi § 5.4.mps), la densità di carica non si discosta in maniera apprezzabile da quella di equilibrio statico, per cui

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} \approx 0.$$

Per la (5.15) risulta allora che l'intensità di corrente, pur dipendente dal tempo, non dipende dalla posizione; ciò consente di utilizzare la comoda locuzione abbreviata di '*corrente in un filo*'.

5.3 Processi stazionari

Si definiscono 'stazionari' i processi per cui le variabili euleriane sono indipendenti dal tempo. Il termine 'processo' indica che le cariche sono in moto, e perciò non abbiamo una situazione statica, e tuttavia le grandezze macroscopiche, ρ , \vec{J} , $\vec{\mathcal{J}}$ etc. non variano nel tempo. Il fatto che le densità di carica siano indipendenti dal tempo implica che il campo elettrico macroscopico è statico e perciò nei processi stazionari valgono ancora le proprietà discusse nei capitoli precedenti; in particolare il campo elettrico è ancora conservativo e derivabile da una funzione potenziale

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi.$$

Per quanto riguarda il vettore \vec{J} , la condizione di stazionarietà implica, non solo che \vec{J} è indipendente dal tempo, ma, per la legge di conservazione, anche

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (5.16)$$

per *qualsiasi* superficie chiusa \mathcal{S} . I campi vettoriali che soddisfano questa condizione vengono chiamati *solenoidali*. Il termine solenoidale è stato introdotto originariamente nello studio dei campi magnetici di cui ci occuperemo nel prossimo capitolo; indipendentemente dalla natura fisica del campo vettoriale, dalla sola condizione (5.16) si deducono delle importanti proprietà della struttura geometrica delle linee di flusso che verranno discusse qui riferendosi al vettore \vec{J} ma si applicano a qualsiasi campo solenoidale. In forma locale la (5.16) implica

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0 \quad (5.17)$$

in tutti i punti dello spazio; inoltre, per la (5.14) è assicurata la continuità della componente normale di \vec{J} anche sulle eventuali superfici cariche; ciò implica l'assenza di sorgenti da cui scaturiscono le cariche che producono la corrente (o di pozzi che le inghiottono), e quindi:

le linee di flusso di un campo solenoidale non hanno punti estremi.

Di conseguenza le linee di flusso sono chiuse oppure infinite. Nel caso di correnti in conduttori filiformi, che si identificano geometricamente con una linea di flusso, ovviamente si realizza la prima possibilità: correnti stazionarie fluiscono solo in *circuiti* chiusi lungo i quali le cariche circolano senza accumularsi in nessun punto. Osserviamo che in questo caso la (5.15) implica che l'intensità della corrente in un filo, in condizioni stazionarie, non dipende da s : la corrente I nel circuito è una costante, positiva o negativa secondo che le cariche positive viaggiano nel senso concorde o discorde rispetto al verso convenzionalmente scelto come positivo per la tangente alla curva chiusa. Questo punto è illustrato nella

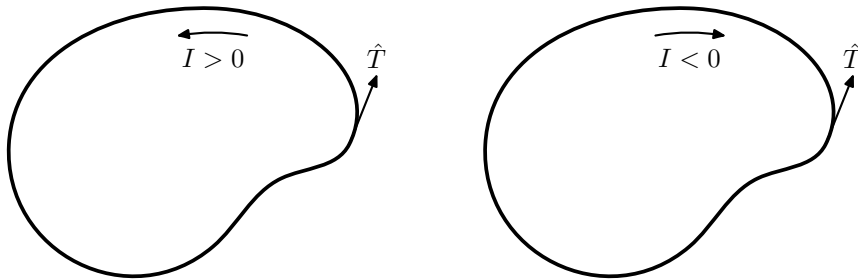


Figura 5.2: Due sensi possibili di circolazione per la corrente in un circuito.

figura 5.2 dove il filo conduttore è rappresentato da una linea spessa, l'orientazione della curva è indicata dal versore \hat{T} e il verso di circolazione delle cariche positive dalle frecce ricurve.

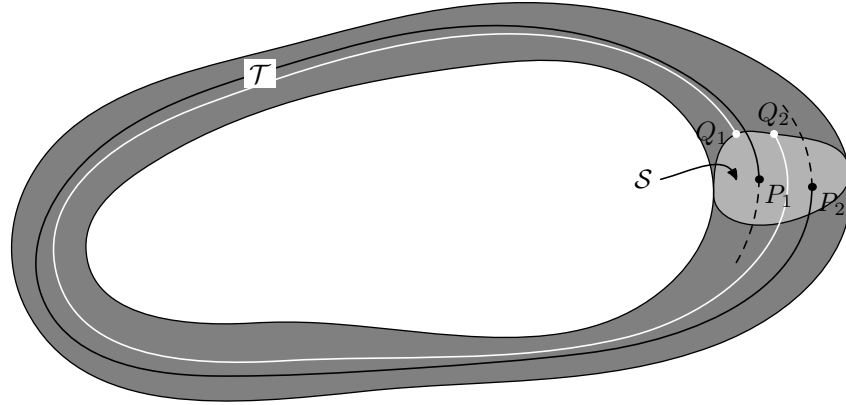


Figura 5.3: Tubo di flusso di un campo solenoidale generato da una sola linea di flusso

[†]Ricordo che in Analisi ‘quasi’ significa che l’insieme dei punti che non vengono toccati dalla linea ha misura nulla; per esempio nella regione \mathcal{T} possono essere contenute isolate linee di flusso chiuse.

Per un generico campo solenoidale le linee di flusso sono di regola infinite ma ciò non vuol dire che vadano all’infinito, (anzi, per il vettore \vec{J} questa possibilità è esclusa perché le correnti circolano in regioni limitate dello spazio); una linea può avvolgersi come una matassa di filo di lunghezza infinita passando per quasi[†] tutti i punti di un ‘toro’, regione dello spazio di forma simile a una ciambella (col buco!), senza mai chiudersi; la figura 5.3 dà un’idea di come ciò avvenga. La regione con ombreggiatura scura contrassegnata con \mathcal{T} in figura è il toro. Consideriamo una sezione trasversale \mathcal{S} del toro come quella indicata dall’ombreggiatura più chiara e un punto P_1 di \mathcal{S} . Partendo da P_1 la linea di flusso descrive una curva del tipo di quella disegnata a tratto continuo che, dopo aver ‘girato intorno al buco’, interseca nuovamente \mathcal{S} in un punto P_2 distinto da P_1 . Gli archi tratteggiati indicano che la linea si prolunga, sia a monte di P_1 che a valle di P_2 , intersecando \mathcal{S} in punti sempre diversi e senza mai chiudersi su se stessa. In questo modo una sola linea di flusso di un campo solenoidale può ‘ricoprire’ interamente il toro, passando vicino quanto si vuole a qualsiasi punto di \mathcal{T} .

Osserviamo che sulla superficie di frontiera \mathcal{F} di \mathcal{T} (la crosta della ciambella) la componente normale di \vec{J} deve essere nulla, perché altrimenti la linea di flusso evaderebbe dal toro. Pertanto, la linea di flusso passante per un punto Q_1 del bordo di \mathcal{S} (disegnata in colore bianco) si svolge interamente su \mathcal{F} ; dopo un giro completo ‘intorno al buco’ la linea torna a intersecare il bordo in un punto distinto Q_2 ; insomma, la frontiera del toro è una superficie ricoperta interamente da una sola linea di flusso.

Il flusso attraverso la sezione \mathcal{S} (nel caso di \vec{J} l’intensità di corrente) non dipende evidentemente dalla scelta della sezione, ma è una grandezza caratteristica del toro; per questo motivo \mathcal{T} viene chiamato ‘tubo di flusso’[‡]. In sostanza, la nozione di tubo di flusso generalizza quella di linea di flusso, e consente di caratterizzare i campi solenoidali come quelli che hanno tubi di flusso chiusi.

[‡]L’appellativo ‘tubo di flusso’ talvolta viene riferito alla superficie di frontiera \mathcal{F} .

L'integrale di volume del vettore \vec{J} su un tubo di flusso è nullo

$$\int_{\mathcal{T}} \vec{J} d\mathbf{v} = 0.$$

La cosa è molto semplice da dimostrare per un tubo filiforme; infatti, indicando con γ la curva che approssima il tubo nel limite in cui si trascura la sezione trasversale, per la (5.10) si ha

$$\int_{\mathcal{T}} \vec{J} d\mathbf{v} = \oint_{\gamma} I d\vec{\ell} = I \oint_{\gamma} d\vec{\ell} = 0.$$

L'estensione a un tubo generico, come quello di figura 5.3, richiede un argomento analitico essenzialmente tecnico che non è di particolare interesse in questo contesto. Dall'annullamento dell'integrale di volume per un tubo di flusso, per i campi che sono nulli al di fuori di un dominio limitato \mathcal{V} (come il vettore densità di corrente), segue subito

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{J} d\mathbf{v} = 0, \quad (5.18)$$

proprietà che verrà utilizzata nel seguito. Vale la pena di osservare che, nella descrizione lagrangiana l'annullamento dell'integrale della densità di corrente ha un significato fisico molto semplice. Dalla definizione di \vec{J} si ha immediatamente

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{J} d\mathbf{v} = \sum_k q_k \vec{v}_k,$$

dove la somma è estesa a tutti i portatori di carica contenuti nella regione \mathcal{V} ; ma il secondo membro rappresenta la derivata rispetto al tempo del momento di dipolo del sistema di cariche

$$\sum_k q_k \vec{v}_k = \frac{d}{dt} \left(\sum_k q_k \vec{r}_k \right) = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

che in condizioni stazionarie deve ovviamente annullarsi.

5.4 Correnti nella materia

Quando in un materiale circolano correnti la (3.2) non è valida: il campo elettrico generalmente non è nullo e le proprietà di un mezzo conduttore vengono espresse da un'equazione costitutiva che mette in relazione il campo elettrico con la densità di corrente. Nel caso di correnti stazionarie e per un gran numero di materiali, i dati empirici sono in accordo con una semplice relazione di proporzionalità nota come **legge di Ohm**:

$$\vec{E} = \varrho \vec{J}. \quad (5.19)$$

Il fattore di proporzionalità ϱ^\dagger prende il nome di *resistività* del materiale. La resistività è un parametro fenomenologico caratteristico del

[†]Si noti la differenza tra le due grafie della lettera greca 'rho': ϱ per la resistività, e ρ per la densità di carica di volume; analogamente, nella (5.20), ς è una variante grafica di σ . Certamente sarebbe meglio distinguere queste grandezze con lettere diverse ma la tradizione vuole così.

conduttore che dipende dallo stato termodinamico (segnatamente dalla temperatura) ma, entro limiti molto ampi, non dipende da \vec{J} . La (5.19) si scrive anche

$$\vec{J} = \varsigma \vec{E} \quad (5.20)$$

dove la *conducibilità* ς è ovviamente l'inverso della resistività

$$\varsigma = \frac{1}{\varrho}.$$

Le due espressioni della legge di Ohm sono banalmente equivalenti dal punto di vista algebrico ma la (5.20) rende chiaro il motivo per cui il coefficiente ς si chiama conducibilità: a parità di campo elettrico 'applicato' la corrente che si genera in un conduttore è tanto maggiore quanto più ς è grande. Allo stesso modo si giustifica il nome resistività per il coefficiente ϱ . In entrambe le espressioni, l'idea intuitiva è che il campo elettrico è causa della corrente e non viceversa.

Dalla definizione (5.19) si ricava immediatamente che la resistività, nel sistema gaussiano, ha la dimensione di un tempo e perciò si misura in secondi. Vedremo più avanti che ϱ rappresenta proprio un tempo caratteristico dei conduttori ma, in vista delle applicazioni pratiche, è necessario definire anche l'unità del Sistema Internazionale. Si ha

$$[\text{Resistività}]_{\text{SI}} \equiv \frac{\text{Volt/m}}{\text{Ampère/m}^2} = \frac{\text{Volt}}{\text{Ampère}} \cdot \text{m} = \text{Ohm} \cdot \text{m} = \Omega \cdot \text{m},$$

introducendo la nuova unità 'Ohm', simbolo Ω , definita come rapporto tra Volt e Ampère di cui si vedrà più avanti l'utilità. Il fattore di conversione da $\Omega \cdot \text{m}$ a secondi è $\frac{1}{9}10^{-9}$ come il lettore può facilmente verificare.

I tipici conduttori ohmici sono i metalli e le leghe metalliche per i quali la legge di Ohm è valida anche per campi elettrici molto intensi dell'ordine di 10^7 Volt/m. I valori della resistività a temperatura ambiente vanno da 10^{-8} a $10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$ come si può osservare nella tabella 5.1. I metalli hanno resistività che cresce con la temperatura; in prima approssimazione, per un salto di temperatura $T - T_0$ non troppo grande, vale una legge lineare

$$\varrho(T) \approx \varrho(T_0)[1 + \alpha(T - T_0)].$$



GEORG SIMON OHM
1789 – 1854

Sostanza	Resistività ϱ ($\Omega \cdot \text{m}$)	Coefficiente α (K^{-1})
Argento	1.6×10^{-8}	3.8×10^{-3}
Rame	1.7×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Ferro	1.0×10^{-7}	5.0×10^{-3}
Piombo	2.2×10^{-7}	4.5×10^{-3}
Mercurio	9.8×10^{-7}	8.9×10^{-4}
Nichelcromo	1.0×10^{-6}	4.0×10^{-4}
Costantana (Lega Cu-Ni)	4.4×10^{-7}	~ 0

Tabella 5.1: Resistività di alcuni metalli e leghe

Il coefficiente α , determinato sperimentalmente a temperatura ambiente, è riportato nell'ultima colonna in tabella. Questa formula empirica non ha validità generale; al riguardo vale la pena di citare l'importante fenomeno della superconduttività: la resistività di alcuni metalli e leghe, al di sotto di una temperatura critica T_c caratteristica della sostanza, crolla con un salto discontinuo da un valore finito a zero (o comunque a un valore tanto piccolo da non essere misurabile). Questo effetto fu osservato per la prima volta nel 1911 da Kammerlingh-Onnes per il mercurio solido alla temperatura $T_c = 4.2^\circ\text{K}$.

I conduttori solidi non metallici (*semiconduttori*) hanno resistività più elevata che *decresce* al crescere della temperatura; i semiconduttori hanno resistività che vanno da $\sim 10^{-5}\Omega \cdot \text{m}$ per la grafite a $\sim 10^3\Omega \cdot \text{m}$ per il silicio. La resistività dei semiconduttori è estremamente sensibile alla presenza di impurezze: introducendo nel silicio piccole quantità, dell'ordine di una parte su un milione, di arsenico o boro (drogaggio), si ottiene una riduzione della resistività di vari ordini di grandezza. Questa caratteristica viene sfruttata nella attuale tecnologia elettronica.

Infine gli isolanti non sono 'impermeabili' al passaggio di cariche ma hanno resistività che vanno da $\sim 10^{12}\Omega \cdot \text{m}$ per il vetro a $\sim 10^{18}\Omega \cdot \text{m}$ per il quarzo fuso. Valori tanto elevati di ρ implicano che il moto delle cariche negli isolanti è così lento da giustificare l'assunzione fatta in elettrostatica che questi materiali non consentono il moto delle cariche. Questa idea può essere precisata con il seguente semplice argomento. Supponiamo di depositare in una piccola regione dell'isolante una carica con densità ρ_0 ; in un isolante ideale la carica dovrebbe rimanere 'congelata' nella posizione iniziale ma in una sostanza reale, di conducibilità piccola ma non nulla, la repulsione elettrostatica porterà a uno sparpagliamento il cui esito finale sarà una configurazione di equilibrio con la carica distribuita sulla superficie esattamente come nei conduttori metallici. La scala dei tempi di questo processo può essere valutata sostituendo nell'equazione di continuità (5.13) la legge di Ohm (5.20)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div } \vec{J} = -\text{div}(\varsigma \vec{E}).$$

Assumendo ς uniforme ed applicando la legge di Gauss si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(4\pi\varsigma)\rho = -\frac{\rho}{\tau},$$

definendo il *tempo di rilassamento**

$$\tau \equiv \frac{1}{4\pi\varsigma} = \frac{\rho}{\tau}. \quad (5.21)$$

L'equazione si integra immediatamente:

$$\rho(t) = \rho_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

mostrando che la densità di carica si annulla a tempi lunghi rispetto al tempo di rilassamento. Dai valori forniti per la resistività degli isolanti

* Si noti qui come è naturale il fatto che, nel sistema gaussiano, la resistività ρ abbia dimensione di un tempo; nel SI la definizione di τ richiede un fattore ε_0 per correggere le dimensioni arbitrarie di $\Omega \cdot \text{m}$.

si calcola facilmente che l'equilibrio macroscopico si raggiunge in tempi che vanno da qualche minuto a qualche anno. Per avere un termine di paragone si consideri che la corrente elettrica negli impianti domestici oscilla nel tempo con un periodo $T = 2 \times 10^{-2}$ sec.

5.4.1 Modello di Drude



PAUL DRUDE
1863 – 1906

Se si applica la (5.21) a un conduttore metallico, si ottiene un tempo di rilassamento dell'ordine di $\tau \sim 10^{-18}$ sec, che non è ragionevole perché in un tempo così piccolo nessun effetto fisico può percorrere distanze macroscopiche; infatti $c\tau \sim 10^{-8}$ cm è dell'ordine delle dimensioni atomiche. Questo risultato paradossale dipende dal fatto che, nell'argomento svolto per ricavare la (5.21), si è applicata la legge di Ohm a un processo *non* stazionario; in effetti ciò si può fare solo per variazioni nel tempo relativamente lente. Per avere un'idea del dominio di applicabilità della legge di Ohm sotto questo aspetto consideriamo un semplice modello della conduzione nei metalli introdotto da Paul Drude. Nella discussione dell'induzione elettrostatica (§ 3.2) si è assunto che gli elettroni di conduzione fossero del tutto liberi di muoversi all'interno del metallo con solo il vincolo di non poter attraversare la superficie del conduttore; in realtà gli elettroni interagiscono con gli ioni del reticolo (e tra di loro) attraverso collisioni. Ciò vuol dire che un elettrone si muove sotto l'azione del campo medio soltanto finché non è tanto vicino a uno ione da risentire dell'intenso campo microscopico da questo prodotto; la descrizione dettagliata del moto che ne deriva è al di là delle capacità umane ma, fortunatamente, non necessaria ai fini della determinazione delle proprietà macroscopiche. Infatti, la durata di una collisione è molto più breve del 'tempo di volo' tra due collisioni, per cui il moto dell'elettrone si svolge per la maggior parte del tempo sotto l'azione del campo medio. Inoltre, se il campo elettrico non è eccezionalmente intenso, le collisioni sono elastiche, e danno luogo soltanto a ridistribuzione delle energie cinetiche tra le particelle che collidono, oltre che a una brusca variazione della direzione della velocità. Il ruolo delle collisioni è in primo luogo quello di stabilire l'equilibrio termodinamico tra gli elettroni di conduzione, e di questi con gli ioni, ma senza contribuire in maniera significativa all'energia interna del materiale. Possiamo allora applicare il principio di equipartizione per calcolare la velocità quadratica media

$$\frac{1}{2} m u_c^2 = \frac{3}{2} kT \quad \Rightarrow \quad u_c = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \approx 10^7 \text{ cm/sec}, \quad (5.22)$$

dove il suffisso c sta per caotica; il valore numerico è stato calcolato alla temperatura ambiente $T \simeq 300$ K. Ben diversamente vanno le cose per il *vettore* velocità. In assenza di campo elettrico il valore medio[†], \vec{u}_c , delle velocità degli elettroni è nullo,

$$\vec{u}_c = 0,$$

perché nel moto caotico tutte le direzioni della velocità sono ugualmente probabili.

[†]La media è fatta sulla popolazione degli elettroni in ciascun 'punto' (cella macroscopicamente infinitesima) del conduttore: \vec{u}_c è una variabile euleriana.

La presenza di un campo elettrico rompe questa simmetria: a causa della forza $\vec{F} = -e\vec{E}$ esercitata dal campo su ciascun elettrone, nell'intervallo tra due collisioni il moto non è più uniforme ma uniformemente accelerato; fissando l'attenzione su un singolo elettrone indichiamo con t il tempo trascorso dall'ultima collisione e con \vec{u}_0 la velocità con cui l'elettrone emerge da quest'urto; la velocità all'istante t è

$$\vec{u}(t) = \vec{u}_0 + \frac{-e\vec{E}}{m}t,$$

che non si media a zero perché l'elettrone acquista una 'componente di deriva' nella direzione (e nel verso opposto) di \vec{E} . In una cella piccola del conduttore sono presenti un gran numero di elettroni, a ciascuno dei quali competono valori differenti di \vec{u}_0 e t , ma le grandezze macroscopiche sono determinate dalla media sulla popolazione delle grandezze microscopiche. Per calcolare la densità di corrente (vedi la (5.5)) occorre determinare il valore medio del vettore \vec{u}

$$\langle \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}_0 \rangle + \frac{-e\vec{E}}{m} \langle t \rangle.$$

Ammettiamo per un momento che un solo urto sia sufficiente a riportare la distribuzione delle velocità all'equilibrio termico; in questa ipotesi si ha ovviamente che il valore medio di \vec{u}_0 coincide con \vec{u}_c e il valore medio di t con il tempo, diciamo τ_c , tra due collisioni

$$\langle \vec{u}_0 \rangle = \vec{u}_c = 0 \quad \text{e} \quad \langle t \rangle = \tau_c.$$

In realtà per ripristinare l'equilibrio statistico tra elettroni e ioni occorrono più collisioni e di conseguenza un tempo $\tau_r > \tau_c$; un attimo di riflessione porta a concludere che le formule scritte sopra sono valide a condizione di sostituire τ_r a τ_c e perciò

$$\langle \vec{u} \rangle = \frac{-e\vec{E}\tau_r}{m}. \quad (5.23)$$

Da qui si ottiene subito

$$\vec{J} = -en\langle \vec{u} \rangle = \frac{ne^2\tau_r}{m}\vec{E} \quad \Longrightarrow \quad \varsigma = \frac{ne^2\tau_r}{m}. \quad (5.24)$$

Una teoria completa della conduzione nei metalli richiederebbe a questo punto il calcolo del tempo di rilassamento τ_r (e anche della densità n dei portatori) in termini della costituzione microscopica di ciascuna sostanza (passo reticolare, masse degli ioni, energie di legame, etc.) ma questo non può essere fatto in maniera elementare senza l'uso dei metodi della meccanica quantistica. Lasciamo quindi τ_r come parametro fenomenologico che viene determinato dal confronto con i dati sperimentali; per esempio, utilizzando il valore della resistività riportato nella Tabella 5.1 e il valore di n stimato a pagina 161, si ricava per il rame

$$\varsigma = \frac{1}{\varrho} \simeq 5 \times 10^{17} \text{sec}^{-1} \quad \Longrightarrow \quad \tau_r = \frac{m\varsigma}{ne^2} \simeq 2 \times 10^{-14} \text{sec},$$

Nota. L'uso delle leggi classiche del moto è giustificato dal fatto che le velocità dei portatori di carica sono trascurabili rispetto a c .

che è una stima molto più ragionevole di quella fornita dalla applicazione ingenua della (5.21). Osserviamo che molti dispositivi elettronici di uso comune come cellulari, computers, etc. ‘lavorano’ a frequenze dell’ordine del gigahertz che significa su scale dei tempi di 10^{-9} sec, che sono lunghi rispetto al tempo di rilassamento stimato sopra: i progettisti di questi sistemi possono tranquillamente applicare la legge di Ohm.

La semplice relazione (5.24) consente di interpretare, sia pure in maniera qualitativa, molte caratteristiche della conduzione elettrica osservate per vari materiali. La bassa conducibilità dei solidi non metallici, dei liquidi (puri) e dei gas è da ascrivere alla carenza di portatori di carica e cioè al piccolo valore di n a numeratore nella (5.24). Per esempio, l’acqua distillata a temperatura ambiente è un isolante perché la grande stabilità della molecola H_2O fa sì che le concentrazioni di ioni positivi H^+ e negativi O^{--} sono molto basse. Se vi è un sale disciolto, le concentrazioni n^+ e n^- di ioni del soluto possono essere elevate: si ha una soluzione elettrolitica di conducibilità elevata. In questo caso vi sono portatori di carica di entrambi i segni e quindi la (5.24) si generalizza in

$$\varsigma = \frac{n_+ q_+^2 \tau_+}{m_+} + \frac{n_- q_-^2 \tau_-}{m_-}, \quad (5.25)$$

con ovvio significato dei simboli. Si noti che i portatori di segno opposto cooperano alla conduzione in quanto nella formula compare il quadrato della carica. Anche a concentrazioni elevate, la conducibilità delle soluzioni elettrolitiche è comunque inferiore a quella dei metalli per la presenza a denominatore nella (5.25) delle masse degli ioni che sono almeno quattro ordini di grandezza maggiori di quella dell’elettrone.

Al crescere della temperatura il tempo di rilassamento τ_r decresce perché l’aumento della velocità media u_c comporta un aumento della frequenza di collisione; inoltre, nei solidi decresce il numero di collisioni necessarie per ridistribuire l’energia tra elettroni e ioni (la dimostrazione non è elementare). Per quanto riguarda la densità dei portatori di carica, la teoria quantistica mostra che nei metalli n è praticamente indipendente dalla temperatura mentre nei semiconduttori e nei dielettrici cresce molto rapidamente con T . Questo spiega l’osservato aumento di resistività con la temperatura nei conduttori metallici mentre nei semiconduttori e isolanti la diminuzione di τ_r è più che compensata dalla crescita di n portando a un aumento di conducibilità.

La legge di Ohm cessa di essere valida quando τ_r e n dipendono dal campo elettrico applicato e ciò avviene per campi molto intensi. Infatti dalla (5.23) si vede che quanto maggiore è il campo tanto maggiore sarà la deviazione dall’equilibrio della distribuzione di velocità e di conseguenza tanto più grande il tempo di rilassamento. La dipendenza di n dal campo elettrico è dovuta al fatto che, quando i portatori di carica acquistano una sufficiente energia cinetica, si verificano collisioni anelastiche che ‘strappano’ elettroni dagli atomi producendo nuovi portatori di carica. La legge di Ohm è quindi applicabile solo nel limite in cui

$$\langle u \rangle \ll u_c.$$

Le stime di $\langle u \rangle$ e u_c calcolate a pag. 162 e a pag. 170 mostrano che la condizione è largamente soddisfatta nei conduttori di rame degli impianti domestici. Per evidenziare il ruolo del campo elettrico utilizziamo le espressioni (5.22) e (5.23); si ha

$$\frac{eE\tau_r}{m} \ll \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad \Rightarrow \quad E \ll E_m \equiv \frac{\sqrt{3kTm}}{e\tau_r}.$$

Quando il campo elettrico si avvicina al valore critico E_m cominciano a presentarsi deviazioni dalla legge di Ohm; per il rame a temperatura ambiente possiamo valutare

$$E_m \approx 10^3 \text{ statvolt/cm} = 3 \times 10^7 \text{ Volt/m},$$

in accordo con il valore empirico citato in precedenza.

Nei semiconduttori e negli isolanti, dove è più facile la creazione di nuovi elettroni di conduzione in collisioni anelastiche, per campi abbastanza intensi si può avere una moltiplicazione esponenziale dei portatori di carica che porta a una crescita esplosiva della corrente: si ha una scarica elettrica[†]. Questo fenomeno, oltre che una drammatica violazione della legge di Ohm, è un processo non stazionario che non può essere discusso in dettaglio in questa sede. Il valore limite del campo per cui si innesca la scarica viene detto *rigidità dielettrica*. La rigidità dielettrica dell'aria secca è dell'ordine di 3×10^6 Volt/m, mentre quella di isolanti come vetro, gomma, etc. può avere valori di un ordine di grandezza maggiori. In aria umida la scarica elettrica può prodursi a campi sensibilmente più bassi dando luogo durante i temporali a lampi (scariche tra nuvole) e fulmini (tra suolo e nuvole).

[†] La fastidiosa 'scossa' che, nelle giornate secche, si prova toccando la portiera di un'automobile è dovuta proprio a questo fenomeno; infatti, nell'aria tra la punta delle dita e la maniglia, che sono conduttori a diverso potenziale, scocca una scintilla *prima* che si stabilisca il contatto. Morale: se non volete prendere la scossa toccate una parte metallica dell'auto prima di uscire e mantenete il contatto finché non avete messo i piedi a terra.

5.4.2 Effetto Joule

La forza esercitata dal campo elettrico su un portatore di carica esegue un lavoro per unità di tempo, la potenza W , espressa da

$$W \equiv \vec{F} \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{E} \cdot (q\vec{v}).$$

Il passaggio algebrico che porta all'espressione a destra nella formula è banale ma giustifica l'affermazione non banale che il campo elettrico esegue lavoro su una carica in moto. Dalla meccanica sappiamo che questo lavoro rappresenta un trasferimento di energia dal campo alla particella (o viceversa, nel caso in cui $W < 0$). Se abbiamo uno sciame di particelle, tutte di carica q , velocità \vec{v} e con densità n , la potenza erogata sui portatori presenti in una cella di volume $d\nu$ sarà

$$dW = WdN = Wnd\nu = \vec{E} \cdot (nq\vec{v})d\nu = \vec{E} \cdot \vec{J}d\nu = wd\nu,$$

dove la *densità di potenza*

$$w \equiv \vec{E} \cdot \vec{J}, \quad (5.26)$$

rappresenta l'energia per unità di tempo e per unità di volume trasferita dal campo al sistema meccanico dei portatori di carica. Un attimo di

riflessione è sufficiente a convincersi che la formula vale in generale per una corrente (di volume) prodotta dal moto di più famiglie di portatori con differenti cariche e velocità; ancora una volta il vettore \vec{J} contiene tutta l'informazione necessaria per descrivere i processi fisici connessi al moto delle cariche.

La (5.26) ha validità del tutto generale perché è stata ricavata utilizzando soltanto principi basilari, ed è la relazione chiave per discutere lo scambio di energia tra materia e campo. Nel presente contesto essa fornisce l'interpretazione de *l'effetto Joule* che consiste nell'aumento di temperatura prodotto dal passaggio di corrente in un conduttore Ohmico. Dalla (5.26) e dalla legge di Ohm si ha che la densità di potenza

$$w = \rho J^2, \quad (5.27)$$

è necessariamente positiva e perciò energia 'entra' effettivamente nel conduttore. Attraverso le collisioni tra gli elettroni e gli ioni questa energia viene ridistribuita tra tutti i costituenti microscopici del materiale che *resta in equilibrio termodinamico*. Pertanto si ha un aumento dell'energia interna del materiale e con essa della temperatura.

Convien sottolineare che, con l'effetto Joule, abbiamo un modo molto efficiente di eseguire *lavoro* su un sistema termodinamico tanto che spesso ρJ^2 viene chiamato *lavoro di Joule* (lasciando sottinteso per unità di volume e per unità di tempo); si tratta di un lavoro dissipativo esattamente come quello eseguito da un sistema di palette agitato in un fluido viscoso[†] e in effetti la 'resistenza' ohmica ha un tipico carattere viscoso in quanto i portatori di carica acquisiscono una velocità costante sotto l'azione di una forza costante.

Molte applicazioni pratiche dell'effetto Joule appartengono al nostro quotidiano: per esempio, il filamento di una lampadina o di una stufa vengono portati a temperatura elevata dal passaggio di corrente elettrica per ottenere illuminazione o riscaldamento. Senza entrare in dettagli tecnici voglio segnalare che in questi dispositivi si raggiunge una temperatura costante 'di regime' alla quale il lavoro di Joule che entra nel dispositivo è bilanciato da perdite di energia sotto varie forme tra le quali spesso ha un ruolo dominante (ma non esclusivo) il *calore* ceduto all'ambiente esterno per contatto termico e ciò induce spesso a dire che nell'effetto Joule 'si produce calore'. Metto in guardia i miei studenti contro l'uso di questa espressione che è un vero e proprio errore concettuale.

Per lo più l'effetto Joule costituisce un fenomeno indesiderato che si cerca di ridurre utilizzando materiali a bassa resistività, il rame soprattutto che è relativamente economico e ha anche buone proprietà meccaniche, mentre nelle applicazioni più spinte si fa ricorso a superconduttori per i quali la dissipazione è del tutto assente. Un esempio interessante sono le CPU dei computers; in questo caso la dissipazione di Joule è uno degli ostacoli principali all'aumento delle prestazioni in termini di velocità (clock) e miniaturizzazione.

[†] Si ricordi l'esperimento di Joule per la determinazione dell'equivalente meccanico della calorìa.

5.5 Resistori

In molte applicazioni pratiche il passaggio di corrente stazionaria in un corpo conduttore viene ottenuto collegando zone diverse del corpo stesso con i poli di una pila che mantiene una differenza di potenziale costante tra questi punti. La figura sotto illustra schematicamente una disposizione tipica per un corpo conduttore \mathcal{C} di forma generica.

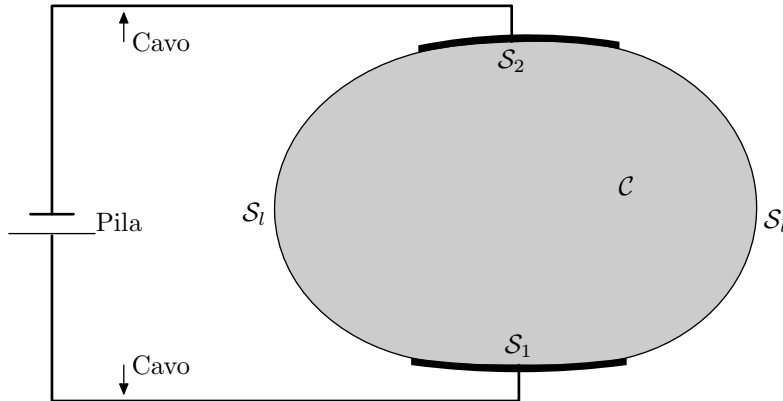


Figura 5.4: Un corpo conduttore collegato a una batteria mediante due elettrodi.

I poli della batteria sono collegati mediante cavi, usualmente di rame, a due piastre, *elettrodi*, che sono fermamente in contatto con il corpo \mathcal{C} . Se la conducibilità del corpo è più piccola di quella del rame e le due superfici di contatto non troppo estese, allora \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 sono, con ottima approssimazione, superfici equipotenziali. La restante porzione \mathcal{S}_l della superficie che delimita \mathcal{C} costituisce invece la superficie laterale di un tubo di flusso del vettore \vec{J} . La distribuzione di corrente all'interno del conduttore è determinata dalla legge di Ohm, $\vec{J} = \varsigma \vec{E}$; perciò, per determinare la corrente che circola, occorre calcolare il campo elettrico in \mathcal{C} . In condizioni stazionarie e per un conduttore omogeneo (ς indipendente dalla posizione) la densità di carica di volume è nulla; infatti

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varsigma} \operatorname{div} \vec{J} = 0.$$

La funzione potenziale all'interno del conduttore soddisfa quindi l'equazione di Laplace

$$\nabla^2 \varphi = 0,$$

esattamente come in un problema di elettrostatica nel vuoto in assenza di cariche di volume. La grande differenza rispetto ai problemi elettrostatici sta nelle condizioni al contorno sulla frontiera di \mathcal{C} ; infatti, mentre su \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 la funzione potenziale deve tendere a valori costanti fissati, diciamo V_1 e V_2 , come nel caso elettrostatico, sulla superficie laterale \mathcal{S}_l , che è un tubo di flusso, deve essere

$$\vec{J} \cdot \hat{n} = 0 \quad \implies \quad \vec{E} \cdot \hat{n} = 0,$$

dove \vec{E} è il limite del campo sulla superficie *dall'interno* del conduttore. In termini di φ questa è una condizione al contorno di tipo Neumann (2.32), sulla superficie \mathcal{S}_l :

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\mathcal{S}_l} = 0.$$

Il significato geometrico di questa condizione al contorno è assai semplice: le superfici equipotenziali devono intersecare perpendicolarmente la superficie laterale del conduttore. Sulle superfici \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 sono invece le linee di flusso che intersecano perpendicolarmente. Uno schizzo qualitativo dell'andamento delle linee di flusso e delle superfici equipotenziali può essere disegnato facilmente: Nella figura 5.5 le superfici equipoten-

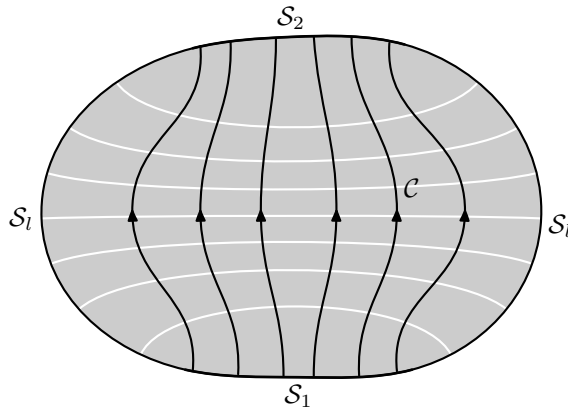


Figura 5.5: Andamento del campo in un conduttore massiccio.

ziali sono rappresentate dalle linee bianche e le linee di flusso di \vec{E} (e di \vec{J}) dalle linee scure. Il calcolo analitico 'esatto', per una forma generica delle superfici, presenta essenzialmente le stesse difficoltà del problema di Dirichlet ma, anche con questo diverso tipo di condizioni al contorno 'miste', sussiste un teorema di unicità.

Una classe importante di problemi per i quali esiste una soluzione analitica esatta molto semplice è quella dei conduttori cilindrici ai quali è applicata una differenza di potenziale tra due sezioni rette. In questo caso le superfici \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 sono piane (ma per il resto di forma generica) e \mathcal{S}_l è la superficie laterale del cilindro. Si verifica subito che, in questa geometria, la configurazione del campo all'interno del conduttore che soddisfa l'equazione di Poisson e le condizioni al contorno è quella mostrata nella figura 5.6. Le superfici equipotenziali, disegnate a tratto bianco nella figura, sono piane e parallele a \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 . Il campo è uniforme, parallelo all'asse del cilindro e vale

$$\vec{E} = \frac{V}{\ell} \hat{z} \quad \text{dove} \quad V \equiv V_2 - V_1,$$

ℓ è la lunghezza del cilindro e \hat{z} il versore dell'asse. Nella figura sono mostrate anche alcune linee di flusso all'esterno del conduttore per evidenziare il fatto che sulla superficie laterale sono presenti cariche; sono

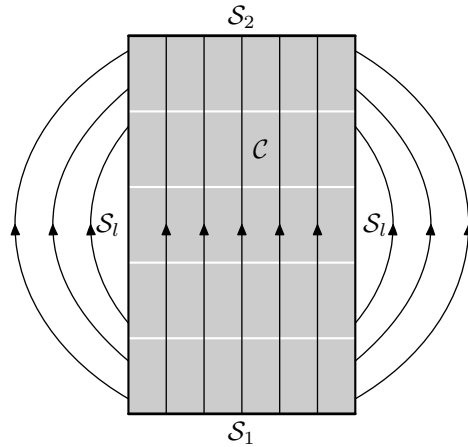


Figura 5.6: Campo elettrico in un conduttore cilindrico.

proprio queste cariche di superficie che annullano la componente normale del campo nel passaggio dal vuoto all'interno del conduttore. La soluzione del problema di Dirichlet esterno non è così semplice come quella del problema misto interno ma ai fini del calcolo della corrente non è rilevante. Per mezzo della legge di Ohm possiamo calcolare la densità di corrente e da questa l'intensità I nel tubo di flusso; indicando con S l'area della sezione del cilindro si ha subito

$$I = \varsigma S \frac{V}{\ell}.$$

Questa relazione viene normalmente scritta nella forma

$$V = RI, \quad (5.28)$$

dove

$$R = \varrho \frac{\ell}{S}. \quad (5.29)$$

La costante R viene chiamata *resistenza ohmica* del conduttore e nel Sistema Internazionale, come indicato a pag. 168, si misura in Ohm. Le due relazioni (5.28) e (5.29) vengono chiamate rispettivamente prima e seconda* legge di Ohm. La somiglianza della prima legge (5.28) con quella che lega tensione e carica di un condensatore è evidente: si può stabilire la legge di corrispondenza

$$\frac{1}{R} \leftrightarrow C, \quad I \leftrightarrow Q,$$

che trasforma la (3.9) nella prima legge di Ohm; questa analogia dipende dal fatto che anche qui le superfici S_1 e S_2 sono 'affacciate': tutte le linee di flusso di \vec{E} (e quindi di \vec{J}) che partono da S_1 terminano su S_2 . La prima legge di Ohm vale per tutte le configurazioni come quella della figura 5.5 indipendentemente dalla forma del conduttore; infatti si può ripetere punto per punto lo stesso ragionamento fatto per i condensatori: se la differenza di potenziale scala di un fattore, diciamo k , il campo

* **Nota:** le due relazioni trovate sopra sono applicazioni particolari della più generale legge di Ohm 'tout court' espressa dalla (5.19).

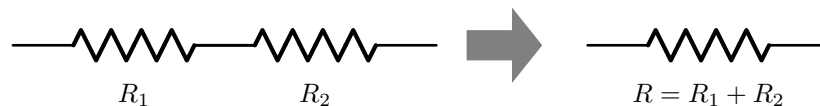
elettrico scala dello stesso fattore, e così la densità di corrente e quindi l'intensità I . Questo tipo di dispositivo viene chiamato *resistore* ed è indicato nei disegni dei circuiti elettrici da un simbolo a zig-zag come quello mostrato sotto



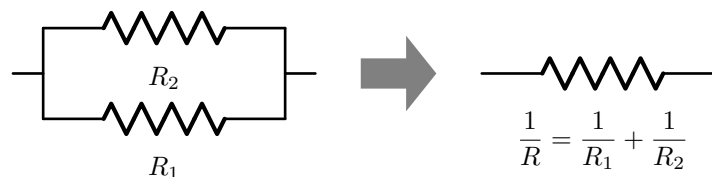
I due tratti rettilinei alle estremità rappresentano i terminali attraverso cui la corrente I entra ed esce dal resistore e tra i quali si stabilisce la differenza di potenziale V data dalla (5.28). Il 'corpo' del resistore viene disegnato a zig-zag perché nei tempi pionieristici questi componenti venivano realizzati proprio con un lungo filo disposto in questa configurazione su un supporto di materiale isolante.*

* Se un filo viene avvolto (per esempio su un rocchetto) si verificano dei fenomeni non elettrostatici che verranno discussi nei capitoli successivi.

L'applicazione della prima legge di Ohm consente di calcolare facilmente la resistenza di combinazioni di resistori collegati *in serie*



oppure *in parallelo*



La semplice dimostrazione delle formule viene lasciata al lettore come esercizio. Si osservi che queste formule sono identiche alle corrispondenti formule per i condensatori attraverso la sostituzione $R \leftrightarrow 1/C$.

La seconda legge (5.29) corrisponde alla formula del condensatore piano riempito con un isolante di costante dielettrica ε

$$\frac{1}{R} = \varepsilon \frac{S}{\ell} \quad \leftrightarrow \quad C = \varepsilon \frac{S}{d}.$$

Una differenza importante tra i due casi è che, mentre la formula del condensatore piano vale nel limite in cui d è molto più piccola delle dimensioni trasversali delle armature, la validità della (5.29) non è in alcun modo subordinata a qualche condizione sulla piccolezza di ℓ ; anzi, l'ipotesi che le sezioni estreme S_1 e S_2 siano equipotenziali diventa tanto meno importante quanto più *grande* è la lunghezza del conduttore. Infatti, per un cilindro abbastanza 'lungo', il campo elettrico è uniforme in quasi tutto il volume del conduttore, escluse le zone in prossimità delle sezioni estreme (se queste sezioni non sono equipotenziali). In sintesi, nella conduzione, all'opposto di quello che avviene per un condensatore, gli effetti di bordo riguardano le basi del cilindro e non la superficie laterale. Ciò è dovuto alla condizione al contorno di annullamento della componente

normale del campo elettrico sulla superficie laterale del conduttore. Nel caso di conduttore filiforme diventa irrilevante anche l'ipotesi che il filo sia rettilineo: una matassa aggrovigliata di filo ha essenzialmente la stessa resistenza ohmica di un filo disteso.

La seconda legge di Ohm non è valida invece per geometrie diverse da quella cilindrica discussa sopra. Studiamo a titolo di esempio il caso di un guscio conduttore racchiuso tra due sfere concentriche di raggi a e b ($b > a$), a potenziali fissati V_a e V_b . Una realizzazione concreta di questa geometria si può avere immergendo due sfere di rame, collegate a una batteria, in un liquido conduttore. In questo caso il problema dell'elettrostatica è identico a quello di un condensatore sferico (manca la superficie laterale) ed ha la stessa soluzione. Confrontando con le formule del condensatore sferico a pag. 78 si ricava subito che il campo elettrico nel conduttore è

$$\vec{E}(r) = \frac{ab}{b-a} \frac{V}{r^2} \hat{r} \quad (V \equiv V_a - V_b),$$

e quindi la densità di corrente

$$\vec{J} = \varsigma \frac{ab}{b-a} \frac{V}{r^2} \hat{r}.$$

La corrente totale tra le due superfici affacciate è il flusso di \vec{J} uscente da una qualsiasi sfera di raggio intermedio tra a e b :

$$I = \varsigma \frac{ab}{b-a} \frac{V}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi \varsigma \frac{ab}{b-a} V.$$

La prima legge di Ohm è ancora valida ma la resistenza è data da

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Confrontando con la formula della capacità di un condensatore sferico (3.10) si verifica ancora una volta la corrispondenza tra C e $1/R$. Se il raggio della sfera esterna è molto grande ($b \gg a$) si ha

$$R \approx \frac{\rho}{4\pi a}.$$

Questo risultato è ovviamente valido anche se la superficie esterna non è affatto una sfera purché sia molto lontana dalla sfera di raggio a : si può quindi parlare di resistenza 'rispetto all'infinito' di una sfera o, più in generale, di una superficie \mathcal{S} di forma qualsiasi e dimensione caratteristica a , in tutti i casi in cui la superficie affacciata a \mathcal{S} si trova a distanza grande rispetto ad a . Un'applicazione pratica importante di questa osservazione è la possibilità di ottenere misure rapide della resistività di un fluido immergendo in questo una sonda conduttrice a potenziale fissato e misurando la corrente che viene erogata.

La resistenza R determina anche la potenza dissipata in un resistore per effetto Joule. Dalla (5.26) si ha che la potenza totale W trasferita

dal campo elettrico ai portatori di carica in un conduttore \mathcal{C} come quello rappresentato nella figura 5.5 è data dall'integrale di volume della densità $\vec{E} \cdot \vec{J}$ esteso a tutta la regione \mathcal{C}

$$W = \int_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{J} dv = - \int_{\mathcal{C}} \text{grad } \varphi \cdot \vec{J} dv.$$

Usando l'identità vettoriale (2.45) e tenendo conto della condizione di stazionarietà (5.17) si ha immediatamente

$$W = - \int_{\mathcal{C}} \text{div}(\varphi \vec{J}) dv = - \oint_{\mathcal{S}} \varphi \vec{J} \cdot d\vec{S},$$

dove \mathcal{S} è l'unione delle superfici \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 e \mathcal{S}_l . Tenendo presente che \vec{J} è tangenziale su \mathcal{S}_l e che su \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 il potenziale assume i valori costanti V_1 e V_2 abbiamo ancora

$$W = -V_1 \int_{\mathcal{S}_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} - V_2 \int_{\mathcal{S}_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} = V_1 I - V_2 I.$$

L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che la normale esterna sulla superficie \mathcal{S}_1 ha verso opposto a quello di \vec{J} (si guardi la figura 5.5). In conclusione

$$W = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}. \quad (5.30)$$

La prima espressione della potenza impiegata in un resistore ha validità generale e si applica anche a dispositivi non ohmici (come per esempio il diodo), mentre le altre due sono specifiche per i conduttori ohmici.

Un esempio domestico: il resistore di uno scaldabagno assorbe tipicamente una potenza di 800Watt alla tensione di 220Volt. Dalle formule ricavate sopra l'intensità di corrente che circola nel conduttore è $I = W/V \approx 3.6$ A e la resistenza è $R = V^2/W \approx 60 \Omega$.



PILA DI VOLTA

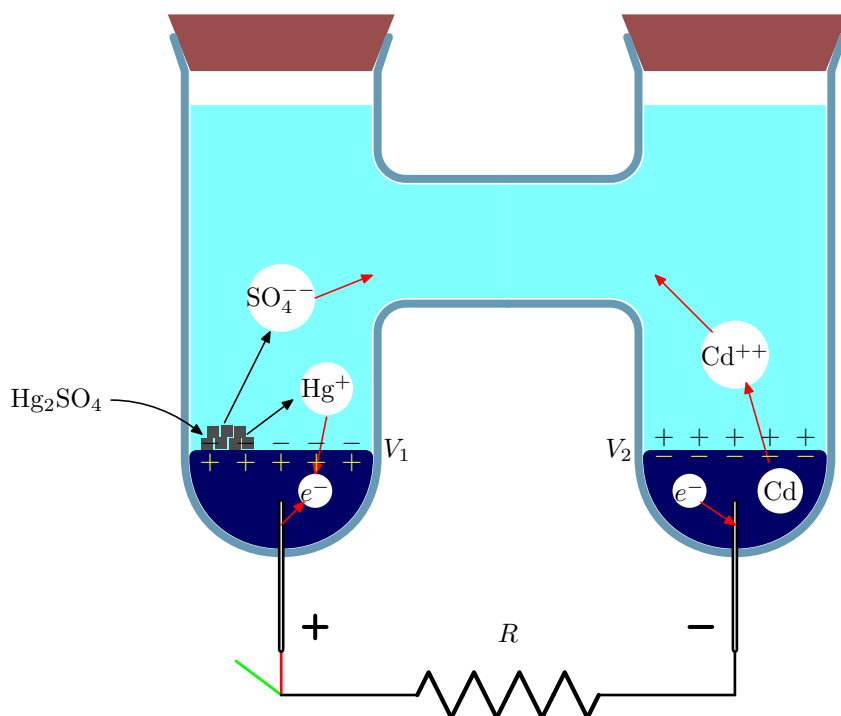


ALESSANDRO VOLTA
1745 – 1827

5.6 Generatori di corrente

Per ottenere passaggio di corrente stazionaria attraverso un resistore occorre mantenere costante la differenza di potenziale tra i terminali. I dispositivi che realizzano queste condizioni vengono chiamati '*generatori di tensione continua*'. La prima realizzazione di un generatore fu ottenuta da Alessandro Volta nel 1800 (vedi figura a lato) sovrappponendo una serie di dischi metallici alternati a dischi di feltro imbevuti di una soluzione diluita di acido solforico. L'invenzione di Volta fu una delle tappe più importanti nell'indagine sui fenomeni elettrici; la possibilità di produrre agevolmente correnti elettriche portò nei primi decenni dell'800 alle fondamentali scoperte di Oersted, Ampère e Faraday (di cui si parlerà nei prossimi capitoli) che consentirono a Maxwell di formulare una teoria completa dell'elettromagnetismo.

Come esempio di pila elettrolitica consideriamo la *pila Weston* illustrata in forma schematica nella figura sotto:



Due provette di vetro, collegate da un tubo orizzontale, portano sul fondo elettrodi di platino inseriti a caldo. In contatto con uno degli elettrodi, rappresentato a sinistra in figura, vi è del mercurio su cui sono depositati cristalli di Hg_2SO_4 , indicati dai quadratini grigi, mentre nella provetta di destra vi è un amalgame di cadmio in mercurio. Il recipiente è riempito da una soluzione acquosa satura di CdSO_4 che si dissocia in ioni Cd^{++} e SO_4^{--} ; inoltre sono presenti ioni Hg^+ rilasciati dai cristalli (poco solubili) di solfato. In assenza di corrente (interruttore in basso a sinistra nella posizione verde), tra i due elettrodi di platino si manifesta una differenza di potenziale, che indicheremo con \mathcal{E} , dovuta ai due ‘salti’ di potenziale V_1 e V_2 (vedi figura) alle interfacce mercurio-soluzione e soluzione-amalgame. La causa di questi salti di potenziale sono processi chimici di ossido-riduzione. Ioni Hg^+ si riducono neutralizzando elettroni di conduzione nell’elettrodo di mercurio che acquista un potenziale positivo rispetto alla soluzione. Sul confine si genera un doppio strato di cariche, positive nel mercurio e negative nella soluzione, come indicato in figura. V_1 è la differenza di potenziale dovuta al campo elettrico microscopico tra questi strati che ostacola il passaggio di ioni dalla soluzione al mercurio. L’equilibrio si raggiunge quando l’energia potenziale eV_1 , necessaria per superare la ‘barriera di potenziale’ elettrostatica, è pari all’energia di ionizzazione dell’atomo di Hg. Analogamente, al catodo si ha un processo di ossidazione del Cd che passa in soluzione lasciando nell’amalgame due elettroni liberi e determinando il salto di potenziale V_2 . Tenendo conto che *il campo elettrico all’interno della soluzione è nullo*, complessivamente si ha tra gli elettrodi la differenza di potenziale

$$\mathcal{E} = V_1 + V_2.$$

Il valore di \mathcal{E} viene facilmente determinato sperimentalmente. Alla temperatura ambiente di 20°C risulta

$$\mathcal{E} = 1.0183 \text{ V}.$$

Questa differenza di potenziale risulta poco sensibile alla temperatura e ciò rende la pila Weston un ottimo standard di calibrazione per le differenze di potenziale.

Vediamo ora cosa accade quando l'interruttore viene chiuso (posizione rossa in figura). Attraverso il resistore R fluiscono elettroni da destra verso sinistra che danno luogo a una corrente I positiva nel verso da sinistra a destra. La distribuzione di carica alle due interfacce viene mantenuta stazionaria dal progredire delle reazioni di ossido-riduzione: per ogni coppia di elettroni che lascia l'amalgama uno ione Cd^{++} passa in soluzione mentre ogni elettrone che arriva nella pozza di mercurio viene neutralizzato da uno ione Hg^+ che lascia la soluzione (osservare le frecce rosse in figura). La concentrazione di ioni Hg^+ a sinistra viene mantenuta costante dai cristalli di solfato che si sciolgono via via che passa corrente. L'eccesso di ioni SO_4^{--} prodotti in concomitanza (frecce nere) viene smaltito attraverso un moto di questi ioni verso destra. Analogamente la concentrazione di ioni Cd^{++} nella parte destra viene mantenuta costante da una migrazione verso sinistra. Insomma la corrente si chiude all'interno della pila per il moto di ioni SO_4^{--} e Cd^{++} . Dal momento che anche le soluzioni elettrolitiche sono conduttori ohmici ne consegue che, a differenza del caso statico, il campo elettrico all'interno della soluzione non è nullo. Indicando con r la resistenza 'interna' della pila, la caduta di potenziale tra le due interfacce, per la prima legge di Ohm, è rI dove I è la corrente erogata dalla pila. Pertanto la differenza di potenziale tra i due elettrodi si riduce a

$$V = \mathcal{E} - rI.$$

La corrente erogata dalla pila dipende dalla resistenza R inserita tra i terminali; per la legge di Ohm applicata al resistore si ha

$$\mathcal{E} - rI = RI \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{E} = (r + R)I. \quad (5.31)$$

Il comportamento di una pila è quindi caratterizzato dai due parametri macroscopici \mathcal{E} e r che possono facilmente essere determinati sperimentalmente. Basta infatti eseguire la misura della differenza di potenziale V tra i poli della pila in funzione della corrente erogata I : si ottiene un grafico lineare che interseca l'asse verticale nel punto di ordinata \mathcal{E} e ha una pendenza r . In particolare, la semplice misura della tensione tra i poli quando non viene erogata corrente (circuitto aperto) fornisce direttamente il valore di \mathcal{E} .

Nell'esempio della pila elettrolitica appena discusso la generazione di corrente stazionaria è legata alla presenza di una forza di natura non elettrostatica agente sui portatori di carica. Si può mostrare che questo vale per qualsiasi circuito resistivo indipendentemente dalla natura del

generatore. Indichiamo con \vec{F}_q la forza totale agente su un portatore di carica senza fare nessuna ipotesi sull'origine e la natura di questa forza; se è presente un campo elettrostatico, \vec{F}_q include anche $q\vec{E}$, così come eventuali forze chimiche, gravitazionali, etc. Chiamiamo poi *campo efficace* la forza per unità di carica

$$\vec{E}_{\text{eff}} = \frac{\vec{F}_q}{q}. \quad (5.32)$$

Il campo efficace ha le dimensioni di un campo elettrico ma *non ha*, come vedremo subito, le proprietà di un campo elettrostatico. Tuttavia, dal punto di vista della dinamica delle collisioni alla scala microscopica, l'effetto del campo efficace è identico a quello di un vero campo elettrico, come si può vedere ripercorrendo le argomentazioni che portano alla (5.24); in altre parole vale una legge di Ohm 'generalizzata'

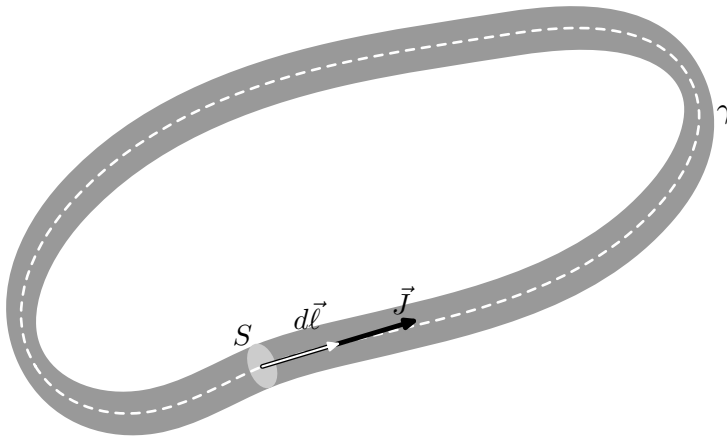
$$\vec{J} = \varsigma \vec{E}_{\text{eff}} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E}_{\text{eff}} = \varrho \vec{J}. \quad (5.33)$$

Per quanto osservato nel § 5.3 le correnti stazionarie fluiscono lungo percorsi chiusi, linee o tubi. Per semplicità consideriamo un circuito filiforme rappresentato da una curva chiusa γ (curva tratteggiata nella figura sotto). Integrando la (5.33) lungo γ si ha

$$\oint_{\gamma} \vec{E}_{\text{eff}} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\gamma} \varrho \vec{J} \cdot d\vec{\ell}. \quad (5.34)$$

Ricordando la (5.10), per un circuito filiforme si ha

$$\vec{J} \cdot d\vec{\ell} = I \frac{d\ell}{S}$$



dove S è la sezione (non necessariamente uniforme) del circuito e I l'intensità di corrente (uniforme); pertanto l'integrale a secondo membro della (5.34) vale

$$\oint_{\gamma} \varrho \vec{J} \cdot d\vec{\ell} = I \oint_{\gamma} \frac{\varrho d\ell}{S} = \mathcal{R}I,$$

dove

$$\mathcal{R} = \oint_{\gamma} \frac{\rho d\ell}{S},$$

è la resistenza⁴ ohmica del circuito. Pertanto il campo efficace *non* è conservativo; la circuitazione del campo efficace viene chiamata ‘forza elettromotrice’ (abbreviato fem) e si scrive

$$\mathcal{E} \equiv \oint_{\gamma} \vec{E}_{\text{eff}} \cdot d\vec{\ell}. \quad (5.35)$$

Si badi che, a dispetto del nome, la forza elettromotrice ha le dimensioni di un potenziale (nel SI viene misurata in volt); tuttavia essa non ha nulla a che fare con il potenziale elettrostatico. Infatti il campo elettrostatico, che è conservativo, pur contribuendo al campo efficace \vec{E}_{eff} non contribuisce alla circuitazione. In definitiva, per un circuito ohmico, abbiamo la ‘prima legge di Ohm generalizzata’

$$\mathcal{E} = \mathcal{R}I. \quad (5.36)$$

Questa relazione contiene come caso particolare la (5.31) e si applica non solo alla pila Weston ma a qualsiasi cella elettrolitica. Si osservi la figura

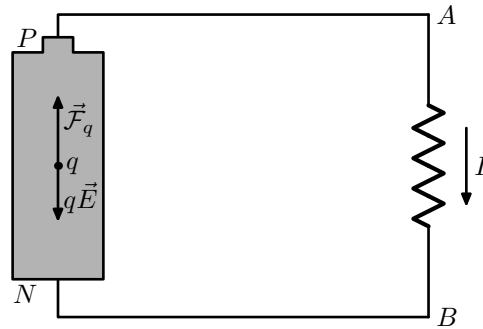


Figura 5.7: Forza agente sui portatori di carica in un generatore.

5.7 dove il generatore è rappresentato come una ‘scatola grigia’ a significare che non ci si riferisce a un dispositivo particolare; l’unica ipotesi è che un portatore di carica q , all’interno del generatore, sia soggetto, oltre alla forza $q\vec{E}$, esercitata dal campo elettrico, a una forza \vec{F}_q

$$\vec{F}_q = q\vec{E} + \vec{F}_q.$$

Nella figura si è ipotizzato un portatore positivo, per cui la forza esercitata dal campo elettrico punta dal polo positivo P a quello negativo N , mentre la forza non elettrica punta da N a P ; ovviamente, per cariche negative, ambedue i versi cambiano: in ogni caso le due forze hanno versi opposti. Nel caso delle pile \vec{F}_q trae origine da processi chimici ma, dal punto di vista che stiamo adottando, ciò è irrilevante: la forza potrebbe

⁴Si osservi che questa formula generalizza la seconda legge di Ohm al caso di circuiti filiformi di sezione e resistività non uniforme.

benissimo essere esercitata da un nastro trasportatore come quelli per il carico e lo scarico di materiali. Pertanto il campo efficace all'interno del generatore è

$$\vec{E}_{\text{eff}} = \frac{\vec{\mathcal{F}}_q}{q} + \vec{E},$$

mentre in tutto il resto del circuito coincide con il campo elettrostatico \vec{E} . Dal momento che \vec{E} è conservativo abbiamo

$$\mathcal{E} = \oint_{\gamma} \vec{E}_{\text{eff}} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{q} \oint_{\gamma} \vec{\mathcal{F}}_q \cdot d\vec{\ell}.$$

Nel caso della pila il campo non elettrostatico $\vec{\mathcal{F}}_q$, è diverso da zero solo tra i poli, e perciò

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \int_N^P \vec{\mathcal{F}}_q \cdot d\vec{\ell}. \quad (5.37)$$

Tenendo conto che all'equilibrio, quando il generatore non eroga corrente, il campo efficace all'interno del generatore è nullo si ha

$$\vec{\mathcal{F}}_q = -q\vec{E}_0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{E} = - \int_N^P \vec{E}_0 \cdot d\vec{\ell} = V_0,$$

dove il suffisso ₀ indica le grandezze elettrostatiche a corrente nulla e V_0 è la differenza di potenziale tra il polo positivo e quello negativo. Ritroviamo quindi il risultato già notato in particolare per la pila Weston. Per quanto riguarda poi la resistenza totale del circuito basta osservare che il resistore è in serie con il generatore per stabilire che

$$\mathcal{R} = R + r.$$

È interessante discutere il processo di generazione di corrente dal punto di vista dei trasferimenti di energia. Moltiplicando ambo i membri della (5.36) per I si ottiene

$$\mathcal{E}I = \mathcal{R}I^2 = rI^2 + RI^2. \quad (5.38)$$

Tenendo presente la (5.30) il secondo membro viene immediatamente riconosciuto come la potenza totale dissipata nel resistore e nel generatore stesso. Usualmente la resistenza interna del generatore è molto piccola rispetto a quella del resistore, $r \ll R$, e pertanto la maggiore parte della potenza è assorbita dal 'carico' R ; tuttavia è facile osservare un leggero aumento di temperatura per effetto Joule nelle pile utilizzate per alimentare piccoli elettrodomestici. Il primo membro della (5.38) rappresenta ovviamente la potenza erogata dal generatore e l'equazione scritta sopra costituisce perciò una relazione di bilancio tra l'energia fornita dalla pila e quella assorbita dal carico resistivo. Questo giustifica la nomenclatura di 'elemento attivo' per il generatore e 'passivo' per il resistore. Nel caso di una pila elettrolitica la quantità di energia disponibile nel generatore è limitata dalla quantità di reagenti presenti nella pila. Nella Weston⁵,

⁵In realtà la pila Weston non è usata per produrre correnti ma come campione di tensione.

quando tutti i cristalli di Hg_2SO_4 sono sciolti, tutti gli ioni Hg^+ ridotti e tutti gli atomi di Cd ossidati, le differenze di potenziale V_1 e V_2 alle interfacce si livellano e viene a mancare la forza elettromotrice: la pila è ‘scarica’. Si dicono reversibili le pile in cui, forzando il passaggio di corrente dal polo positivo a quello negativo, mediante un generatore esterno di forza elettromotrice maggiore di quella della pila, le reazioni chimiche procedono in senso inverso tornando ad accumulare energia. La pila Weston appartiene a questa categoria di pile ‘ricaricabili’ ma l’esempio più comune è quello delle batterie per automobile che funzionano da *accumulatori*: durante la marcia normale un ‘alternatore-raddrizzatore’* azionato dal motore fornisce la forza elettromotrice necessaria a caricare la batteria mentre a motore spento è la batteria a fornire la tensione necessaria al funzionamento di tutto l’impianto elettrico del veicolo.

*I principi di funzionamento di questo tipo di generatore verranno discussi più avanti.

L’energia accumulata in una batteria può essere espressa anche in termini di carica elettrica. Infatti, dalla (5.38) l’energia erogata in un tempo Δt si esprime come

$$\Delta U = \mathcal{E} I \Delta t = \mathcal{E} \Delta Q,$$

dove ΔQ è sì la carica che attraversa una qualunque sezione del circuito (per definizione di I) ma è pari anche, in accordo con la (5.37), alla carica che viene trasferita dal polo negativo a quello positivo. Vi è quindi proporzionalità diretta tra l’energia e la carica e si può esprimere l’una attraverso l’altra; per esempio l’energia di una batteria di automobile viene espressa in ‘Ah’ (amperora), unità di carica equivalente a 3600 C.

Esercitazione pratica: Scrutando all’interno del vano motore leggere quanti Ah sono accumulati in una batteria di automobile.

Sussiste anche una relazione di proporzionalità tra la carica e il numero di moli delle sostanze che reagiscono nella batteria. Per esempio, nella pila Weston per ogni ione Hg^+ che viene neutralizzato si trasporta una carica pari alla carica elementare; pertanto, indicando con \mathcal{N} il numero di Avogadro, una mole di mercurio equivale a una carica

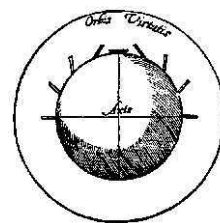
$$F = \mathcal{N}e \approx 96485 \text{ C}.$$

Questa carica viene chiamata *Faraday*, in onore del grande Michael Faraday. Ovviamente il fattore di proporzionalità dipende dalla valenza dello ione: per esempio una mole di Cadmio, che è bivalente, trasporta una carica di $2F$.

Capitolo 6

Interazione magnetica

I fenomeni magnetici sono noti fin dall'antichità: il termine 'magnetismo' deriva da Magnesia in Tessaglia dove gli antichi greci rinvennero abbondanti quantità di magnetite, un minerale ricco dell'ossido Fe_3O_4 . L'uso di aghi magnetici per individuare il Nord era noto in Cina già dall'anno 1090 e in Europa un secolo dopo con Flavio Gioia. L'inizio dell'indagine scientifica sul magnetismo risale a William Gilbert che nel suo grande trattato "DE MAGNETE", pubblicato nel 1600, fu il primo a dimostrare che la Terra è essa stessa un grande magnete. Nella figura a lato è mostrata la 'Terrella', una sfera, che rappresenta la terra, con un magnete al centro orientato secondo la direzione Sud-Nord (orizzontale nel disegno); con questo modello in scala Gilbert mostrò che l'inclinazione di un ago magnetico rispetto all'orizzonte dipende dalla latitudine esattamente nel modo osservato in natura. Successivamente, le forze magnetiche vennero interpretate in termini di 'poli' interagenti tra loro secondo una legge di tipo coulombiano; in analogia con le cariche elettriche si hanno due tipi di poli classificati Nord e Sud ma, a differenza delle cariche elettriche, non è possibile separare i poli: spezzando un ago magnetico si ottengono due aghi con entrambi i poli. In altre parole non si trovano in natura poli magnetici ma soltanto dipoli che interagiscono tra loro attraverso forze che dipendono dalla posizione relativa degli aghi magnetici in maniera del tutto analoga a quella dei dipoli elettrici. Nonostante queste somiglianze, dal momento che (in condizioni statiche) non si riscontra nessuna interazione tra le cariche elettriche e i magneti, le due categorie di fenomeni furono per lungo tempo considerate del tutto indipendenti. La svolta si ebbe nel 1820 quando Hans Christian Ørsted scoprì (secondo la vulgata per puro caso) che la corrente elettrica interagisce con i magneti. Un ago magnetico libero di ruotare intorno a un asse verticale si orienta spontaneamente nel piano meridiano; disponendo un filo conduttore parallelamente all'ago e facendo passare corrente si osserva una deflessione dell'ago rispetto alla direzione Sud-Nord. Sulla base di questa scoperta, André Marie Ampère arrivò in breve tempo a formulare una teoria del magnetismo basata sull'interazione *tra correnti*. Nella teoria di Ampère le forze tra gli aghi magnetici o tra le correnti e i magneti vengono attribuite alla presenza di correnti microscopiche nella materia e la nozione di



LA TERRELLA DI GILBERT



WILLIAM GILBERT
1544 – 1603



HANS CRISTIAN
ØRSTED
1777 – 1851

polo magnetico è abolita. Dal momento che questa teoria risulta essere corretta non ci occuperemo dell'obsoleta teoria dei poli magnetici. Come al solito, la presentazione delle leggi che descrivono le forze tra correnti non seguirà il tortuoso sviluppo storico delle idee ma sarà improntata alla concezione moderna dell'interazione elettromagnetica.

6.1 Il Campo Magnetico

Per il momento, limitiamo la discussione alle correnti stazionarie. Nel capitolo sulle correnti abbiamo visto che il campo elettrico, all'esterno di un filo metallico percorso da corrente stazionaria, è trascurabile e non produce una forza apprezzabile su cariche *in quiete*; tuttavia per le cariche *in moto* le cose vanno diversamente. Ciò può essere facilmente verificato con il seguente semplice esperimento. Una carica q viene lanciata con velocità \vec{v} parallelamente a un filo conduttore; finché nel filo non circola corrente il moto prosegue rettilineo e uniforme mostrando che non ci sono forze agenti[†]. Facendo passare una corrente nel filo si osserva una deflessione della traiettoria della carica senza variazione del modulo della velocità segnalando la presenza di una forza trasversale. In più, la traiettoria è contenuta nel semipiano meridiano avente come bordo il filo e passante per la posizione iniziale della carica: si può quindi concludere che la forza ha la direzione della perpendicolare da q al filo come mostrato in figura 6.1. Il verso della forza, come mostrato in figura, dipende dal verso del vettore $q\vec{v}$: se $q\vec{v}$ punta dalla stessa parte in cui fluisce la corrente la forza punta verso il filo altrimenti ha senso opposto (vettori tratteggiati in figura). Inoltre, conoscendo la massa della particella e misurando il raggio di curvatura della traiettoria, la (4.41) consente di determinare il modulo della forza. Vale la pena di puntualizzare che tutti questi risultati sono validi per qualsiasi velocità, anche relativisti-

[†]Ovviamente, la descrizione dell'esperimento è idealizzata perché ci sono numerose cause che perturbano il moto di una particella reale in un esperimento reale; per citarne solo qualcuna: la forza peso, la resistenza dell'aria, la forza di Coriolis, etc. Qualcuna di queste forze può essere eliminata (per es. la resistenza dell'aria), qualcuna produce accelerazioni trascurabili rispetto a quelle che l'esperimento vuole evidenziare (per es. Coriolis), e quelle che non possono essere né eliminate né trascurate vengono tenute in conto, sottraendo l'accelerazione nota che esse producono dall'accelerazione realmente osservata.

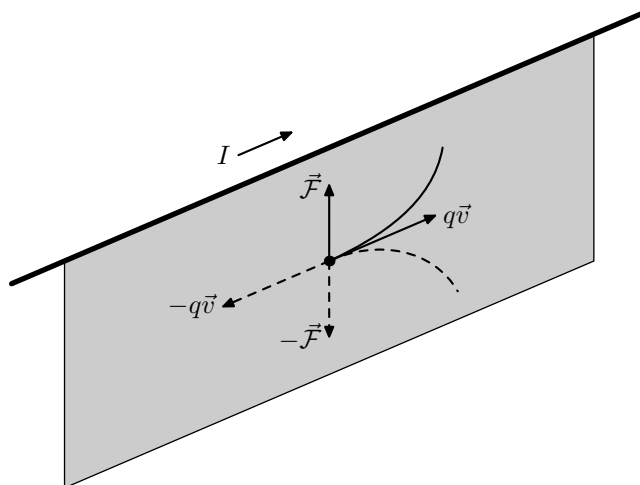


Figura 6.1: Forza su una carica in moto con velocità parallela a un filo percorso da corrente.

ca; per questo con il termine ‘forza’ si intende la \mathcal{F} definita dalla (4.40). Eseguendo vari esperimenti con cariche e velocità diversi si trova che il modulo della forza è proporzionale a qv ; definiamo allora il fattore di proporzionalità B mediante

$$\mathcal{F} = B \frac{qv}{c}. \quad (6.1)$$

Nota Bene: La formula non è scritta in forma vettoriale perché la forza e la velocità *non* hanno la stessa direzione.

L’inserimento della velocità di propagazione dei segnali c a denominatore costituisce una scelta di unità e dimensioni per B , caratteristica del sistema gaussiano; con la definizione (6.1) le dimensioni di B sono eguali a quelle del campo elettrico. Nel sistema internazionale si pone invece

$$\mathcal{F} = Bqv \quad (\text{Definizione SI}), \quad (6.2)$$

e quindi B ha le dimensioni di [campo elettrico]/[velocità]. Più avanti mostreremo che questa scelta è inopportuna dal punto di vista fisico ed è uno dei motivi principali per rifiutare il SI.

Vediamo ora cosa cambia se la velocità ha una direzione differente. La figura 6.2 mostra il risultato di un esperimento in cui la velocità giace ancora nel semipiano meridiano ma è perpendicolare al filo. Anche in

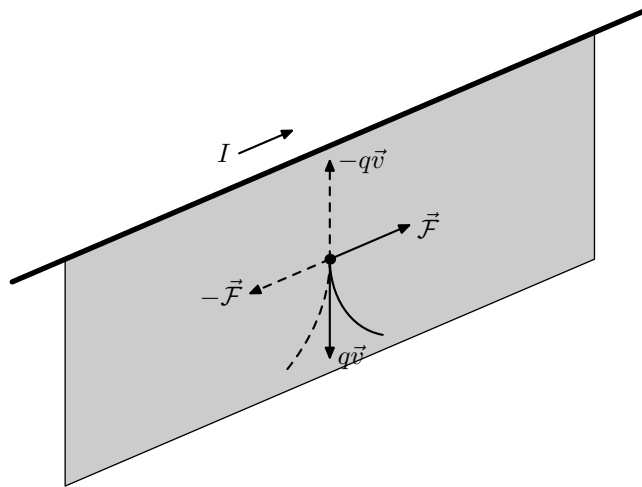


Figura 6.2: Forza su una carica in moto con velocità perpendicolare a un filo percorso da corrente.

questo caso la forza giace nel semipiano meridiano ed è perpendicolare alla velocità; inoltre il fattore di proporzionalità B , misurato *nello stesso punto* dell'esempio precedente, ha un valore uguale a quello trovato nel caso di velocità parallela al filo.

In generale, se la velocità ha una direzione qualsiasi nel semipiano meridiano, la forza agente su q è data dalla (6.1) e ha direzione perpendicolare a \vec{v} nello stesso semipiano.

Infine, se la velocità è perpendicolare al semipiano meridiano non si misura alcuna forza sulla carica in moto.

6.1.1 Magnetismo e Relatività

I risultati sperimentali presentati sopra sono in perfetto accordo con il principio di relatività e anzi possono essere dedotti dalle leggi generali discusse nel Capitolo 4. Consideriamo a titolo di esempio il caso in cui la velocità \vec{v} è parallela al filo; seguendo la procedura introdotta nel § 4.9, per determinare la forza agente sulla carica, passiamo nel riferimento in cui q è in quiete (e quindi il filo appare in moto con velocità $-\vec{v}$), come mostrato nella figura sotto. Ora accade che in questo riferimento il filo

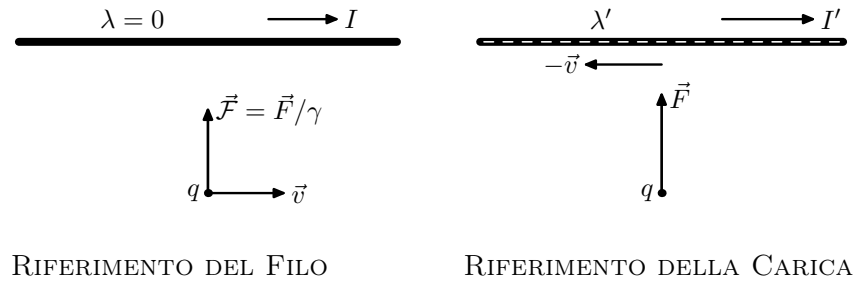


Figura 6.3: Due riferimenti per una carica in moto parallelamente a un filo percorso da corrente.

presenta una densità di carica λ' , non nulla. Con i versi di \vec{v} e I concordi la densità è negativa come indicato in figura. Il modo più semplice per calcolare λ' è di ricordare l'osservazione di pagina 158, che $(c\rho, \vec{j})$ costituiscono le componenti di un quadrivettore; per la corrente in un filo, usando la notazione della (5.8), le componenti del quadrivettore corrente si scrivono $(c\lambda, \vec{j})$. Le componenti trasversali di \vec{j} sono ovviamente nulle in entrambi i riferimenti mentre la componente longitudinale j_{\parallel} è l'intensità di corrente nel filo; perciò le coppie di componenti

$$(c\lambda, I) \equiv (c\lambda', I'),$$

rappresentano le componenti temporale e longitudinale dello stesso quadrivettore. Allora, applicando le trasformazioni di Lorentz (4.24), ricaviamo per la componente temporale

$$c\lambda' = \gamma(c\lambda - \beta I) \quad (\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}, \beta = v/c).$$

Dal momento che nel riferimento del filo $\lambda = 0$, risulta subito

$$\lambda' = -\gamma \frac{v}{c^2} I. \quad (6.3)$$

L'interpretazione di questo fenomeno è molto semplice: nel filo sono presenti distribuzioni di carica di segno opposto che si neutralizzano nel sistema di laboratorio, ma danno luogo a una corrente perché hanno velocità differenti. A causa di questa differenza di velocità, quando si passa nel riferimento della carica, esse subiscono contrazioni differenti e non si sommano più a zero. La (6.3) può essere ricavata in maniera

elementare (ma assai più complicata) calcolando queste contrazioni; per il lettore molto motivato riporto il calcolo qui appresso.

Il filo percorso da corrente può essere rappresentato schematicamente da una processione di cariche negative $-e$ che si muove verso sinistra con velocità \vec{u} e da una fila di cariche $+e$ stazionarie nel sistema di riferimento ‘di laboratorio’ (vedi figura 6.4). La

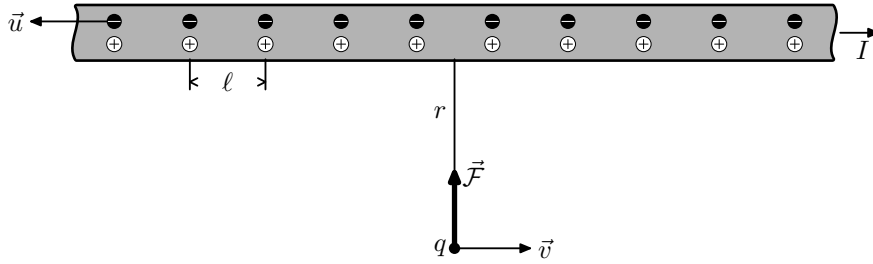


Figura 6.4: Corrente e cariche nel riferimento di laboratorio

distanza ℓ tra due cariche adiacenti, per entrambe le distribuzioni, è piccola rispetto alla scala macroscopica e pertanto le due ‘processioni’ possono essere descritte come distribuzioni continue di densità lineare

$$\lambda_+ = \frac{e}{\ell}, \quad \lambda_- = -\frac{e}{\ell} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda_+ + \lambda_- = 0,$$

mentre la corrente nel filo, ricordando la (5.9), è espressa da

$$I = \lambda_+ u_+ + \lambda_- u_- = \frac{e}{\ell} u,$$

e scorre nel verso indicato dalla freccia a destra in figura. Nel sistema di riferimento proprio di q le cariche positive nel filo appaiono in moto con velocità $-\vec{v}$ e la distanza mutua, per la (4.15), risulta contratta del fattore di Lorentz

$$\ell'_+ = \frac{\ell}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \lambda'_+ = \gamma \lambda_+. \quad (6.4)$$

Le cose vanno altrimenti per la distribuzione negativa perché la separazione tra queste cariche non si contrae semplicemente di un fattore γ dal momento che esse *sono in moto nel sistema di laboratorio*. Occorre quindi trovare innanzitutto la distanza *propria*, diciamo ℓ_0 , tra le cariche negative; ciò viene fatto molto semplicemente applicando la formula di contrazione (4.15) *all'inverso* con il fattore di Lorentz corrispondente alla velocità u

$$\ell_0 = \gamma_u \ell = \frac{\ell}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}.$$

Nel sistema a riposo di q la distanza tra le cariche negative può ora essere calcolata applicando normalmente la (4.15)

$$\ell'_- = \frac{\ell_0}{\gamma_{u'}} = \frac{\gamma_u}{\gamma_{u'}} \ell, \quad (6.5)$$

dove u' è la velocità della processione di cariche negative nel sistema proprio di q . Per calcolare il rapporto $\gamma_u/\gamma_{u'}$ osserviamo che le componenti non nulle dei quadrivettori velocità delle cariche negative e della carica q , nel sistema di laboratorio sono

$$\vec{u} \equiv (\gamma_u c, -\gamma_u u), \quad \vec{v} \equiv (\gamma v, \gamma v),$$

mentre nel sistema proprio di q sono

$$\vec{u} \equiv (\gamma_{u'} c, -\gamma_{u'} u'), \quad \vec{v} \equiv (c, 0).$$

Ora, per l'invarianza del prodotto scalare deve essere

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \gamma_u \gamma c^2 + \gamma_u \gamma u v = \gamma_{u'} c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma_u}{\gamma_{u'}} = \frac{c^2}{\gamma(c^2 + uv)} = \frac{1}{\gamma(1 + \beta_u \beta)},$$

Si tenga presente che u_- è la componente di \vec{u} lungo la direzione orientata secondo la freccia di figura 6.4 e perciò

$$u_- = -u.$$

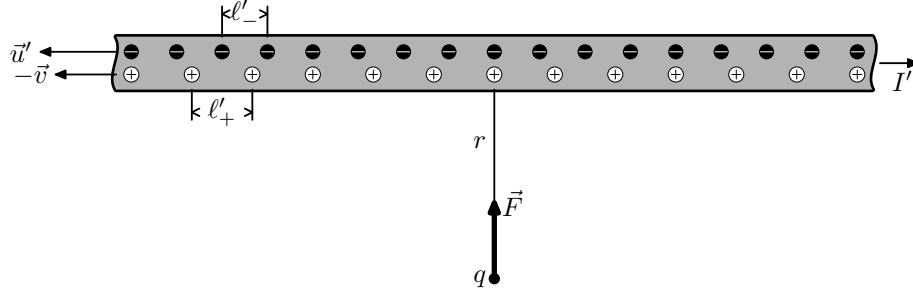


Figura 6.5: Contrazione delle distribuzioni nel filo nel riferimento della carica.

e quindi

$$\ell'_- = \frac{\ell}{\gamma(1 + \beta_u \beta)} \implies \lambda'_- = \gamma(1 + \beta_u \beta) \lambda_- . \quad (6.6)$$

La contrazione della processione di cariche negative è superiore a quella delle cariche positive e perciò risulta una carica netta

$$\lambda' = \lambda'_+ + \lambda'_- = -\gamma \beta_u \beta \frac{e}{\ell} = -\gamma \beta \frac{I}{c},$$

che coincide con la (6.3). ■

Per la presenza della distribuzione di carica, nel riferimento proprio di q si manifesta un campo elettrico. Ricordando la (1.14), la componente radiale del campo è

$$E'_r = \frac{2\lambda'}{r} = -\frac{\gamma}{rc} 2 \frac{ue}{\ell} \frac{v}{c} = -\gamma \frac{2I}{rc} \frac{v}{c},$$

dove r è la distanza della carica dal filo. Il segno meno indica ovviamente che il campo elettrico punta verso il filo. La forza agente sulla carica nel sistema a riposo è quindi

$$F_r = qE'_r = -\gamma \frac{2I}{rc} \frac{qv}{c}, \quad (6.7)$$

e punta ancora verso il filo se q è positiva (figura 6.3), e cioè se $q\vec{v}$ ha verso concorde a quello della corrente. Adesso si può tornare al sistema di laboratorio utilizzando le leggi di trasformazione della forza; tenendo presente che \vec{F} è perpendicolare a \vec{v} , dalla (4.39) si ha

$$\mathcal{F}_r = \frac{1}{\gamma} F_r = -\left(\frac{2I}{rc}\right) \frac{qv}{c} = -B \frac{qv}{c}, \quad \left(B \equiv \frac{2I}{rc}\right) \quad (6.8)$$

in accordo con il risultato sperimentale (6.1) sia per quanto riguarda il modulo sia per il verso. Il lettore può compiere un utile esercizio verificando che, che nel caso in cui \vec{v} ha verso discorde con quello della corrente, nel sistema a riposo della particella il filo appare carico positivamente e quindi una carica q positiva viene respinta, in accordo con i versi delle frecce tratteggiate nella figura 6.1.

L'applicazione del principio di relatività¹ consente di ricavare la legge di forza anche nel caso di velocità perpendicolare al filo ma con calcoli più

¹**Nota:** Nel calcolo svolto, sono state usate le formule relativistiche esatte, senza assumere velocità piccole rispetto a c . Perciò, la (6.8) è valida senza alcuna restrizione sul valore di v .

Nota. Si ricordi che nel sistema proprio agisce la forza newtoniana; da qui l'uso del simbolo F invece che \mathcal{F} .

complicati che non vale la pena di fare. Conviene piuttosto soffermarsi a riflettere sulle implicazioni dell'analisi svolta sopra. La forza agente su una carica in moto trae origine, in fin dei conti, dal campo elettrico \vec{E}' , che esiste nel sistema di riferimento in cui q è in quiete, e però nel sistema di laboratorio questo campo elettrico sparisce! Ciò può sembrare in contraddizione con le leggi di trasformazione del campo (4.17): dal momento che, per tornare al sistema di laboratorio, si effettua una trasformazione con velocità perpendicolare al campo, non si dovrebbe trovare $\vec{E} = \gamma \vec{E}'$? Abbiamo qui un buon esempio degli errori che si possono commettere 'pensando' le formule che esprimono leggi fisiche alla stregua di identità matematiche: le eguaglianze (4.17) sono state ricavate e sono valide solo per trasformazioni che partono da un riferimento in cui *tutte le cariche sorgente sono in quiete*. Questo non è il caso dell'esempio discusso sopra per il quale non esiste *nessun* sistema di riferimento inerziale nel quale tutte le cariche sono in quiete. La morale è che, in queste situazioni più generali, non basta conoscere la forza che una collezione di cariche esercita su una carica in quiete (e cioè il campo elettrico) per poter ricavare la forza agente su una carica in moto. Occorre quindi ampliare la nozione di 'Campo Elettrico' e individuare una grandezza fisica più generale che consenta di determinare la forza agente su una carica di prova in moto con velocità arbitraria. Questa grandezza fisica è il campo elettromagnetico che verrà introdotto nel capitolo 8.

6.1.2 Il vettore Campo Magnetico

I risultati sperimentali relativi a una corrente in un filo rettilineo, illustrati nel primo paragrafo, possono essere generalizzati a una distribuzione arbitraria di correnti. Sperimentando con cariche *diverse* che transitano con velocità *diverse* in un punto *fissato* P dello spazio si trova che le forze agenti sono proporzionali a qv e hanno direzione in tutti i casi perpendicolari a \vec{v} ; più precisamente, in ogni punto dello spazio esiste un vettore \vec{B} , che prende il nome di '*campo magnetico*' tale che

$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}. \quad (6.9)$$

Questa equazione *definisce* il campo magnetico \vec{B} come fattore di proporzionalità, allo stesso modo in cui la (1.7) definisce il campo elettrico \vec{E} . Per la definizione di prodotto vettore, la formula (6.9) contiene implicitamente sia la perpendicolarità tra $\vec{\mathcal{F}}$ e \vec{v} , che la proporzionalità tra \mathcal{F} e qv .

Questo modo di definire una grandezza fisica risulta probabilmente non familiare: perché non dare una formula che esprima \vec{B} in funzione di $\vec{\mathcal{F}}$ e \vec{v} ? La risposta è molto semplice: questa formula non esiste perché non esiste l'operazione inversa del prodotto vettore. E non può esistere. Infatti, dato *un solo* valore \vec{v}_0 della velocità e la forza corrispondente $\vec{\mathcal{F}}_0$, l'equazione

$$\vec{\mathcal{F}}_0 = \frac{q}{c} \vec{v}_0 \times \vec{B},$$

non determina univocamente il vettore \vec{B} ; infatti, se \vec{C} è un qualsiasi vettore parallelo a \vec{v}_0 , si ha

$$\vec{v}_0 \times \vec{B} = \vec{v}_0 \times (\vec{B} + \vec{C}). \quad (6.10)$$

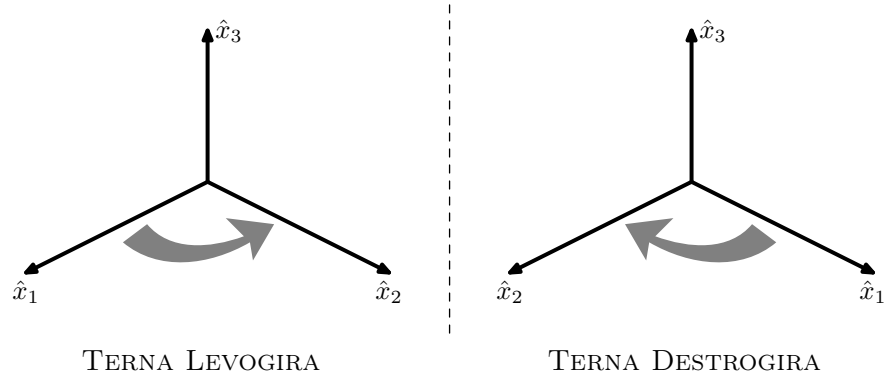
Per questo motivo la determinazione del campo magnetico richiede più misure con direzioni diverse della velocità. Volendo dare una procedura algebrica per la determinazione di \vec{B} scegliamo tre assi ortogonali[†] $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ e indichiamo con (v_1, v_2, v_3) e (B_1, B_2, B_3) le componenti di \vec{v} e \vec{B} ; per una nota formula di calcolo vettoriale si ha

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix},$$

dove il determinante al secondo membro va sviluppato secondo gli elementi della prima riga applicando le usuali regole di segno:

$$(\vec{v} \times \vec{B})_1 = v_2 B_3 - v_3 B_2, \quad (\vec{v} \times \vec{B})_2 = v_3 B_1 - v_1 B_3, \quad (\vec{v} \times \vec{B})_3 = v_1 B_2 - v_2 B_1.$$

Si ricordi che la validità di queste espressioni è subordinata alla scelta di una terna *levogira*, vale a dire che gli assi sono numerati in modo tale che la rotazione di $\pi/2$ che porta l'asse \hat{x}_1 a sovrapporsi all'asse \hat{x}_2 appare antioraria se osservata dalla parte dove punta \hat{x}_3 :



Osservando la figura, ci si rende conto che la terna levogira si trasforma in destrogira per riflessione rispetto al piano indicato dalla linea tratteggiata (e viceversa) ma che non è possibile sovrapporre le due terne mediante traslazioni e rotazioni[†]. D'ora in avanti, in conformità a una convenzione universalmente adottata, verranno usate esclusivamente terne levogire.

In termini di componenti, la definizione (6.9) del campo magnetico si scrive

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1 &= \frac{q}{c} (B_3 v_2 - B_2 v_3) \\ \mathcal{F}_2 &= \frac{q}{c} (B_1 v_3 - B_3 v_1) \\ \mathcal{F}_3 &= \frac{q}{c} (B_2 v_1 - B_1 v_2) \end{cases} \quad (6.11)$$

[†] Non necessariamente un sistema di coordinate cartesiane: gli assi possono avere orientazioni diverse in punti diversi dello spazio come gli assi $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ di un sistema di coordinate sferiche che sono anch'essi ortogonali.

[†] **Esercitazione pratica:** Disporre il pollice, l'indice e il medio della mano destra in modo che siano perpendicolari tra loro; fare la stessa cosa con la mano sinistra e verificare l'impossibilità di sovrapporre contemporaneamente tutte e tre le dita delle due mani.

Volendo invertire la (6.9) occorrerebbe risolvere il sistema di tre equazioni nelle tre incognite (B_1, B_2, B_3) , la cui la matrice dei coefficienti e il *vettore*[‡] dei termini noti sono

$$\frac{q}{c} \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_3 \end{bmatrix}.$$

[‡] Il termine ‘*vettore*’ è usato qui, eccezionalmente, nel senso di tripla ordinata di numeri reali.

Ora si verifica facilmente che il determinante della matrice dei coefficienti è identicamente nullo: infatti moltiplicando la prima riga per v_1 , la seconda per v_2 , la terza per v_3 e sommando si ottiene una riga di zeri. Tuttavia il sistema non è incompatibile perché la stessa relazione sussiste tra i termini noti; infatti, l’ortogonalità tra \vec{v} e $\vec{\mathcal{F}}$, in termini di componenti si esprime come $v_1\mathcal{F}_1 + v_2\mathcal{F}_2 + v_3\mathcal{F}_3 = 0$. Pertanto le equazioni (6.11) sono linearmente *dependenti* e il sistema risulta indeterminato in accordo la (6.10). La difficoltà nasce dall’aver considerato le (6.11) come un sistema di equazioni in cui la velocità e la forza sono *costanti*. In realtà l’unica costante in queste relazioni è il campo magnetico: le (6.11) esprimono una relazione funzionale tra la *variabile* indipendente \vec{v} e la *variabile* dipendente $\vec{\mathcal{F}}$. Ciò viene evidenziato scrivendo le (6.11) in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_3 \end{bmatrix} = \frac{q}{c} \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad (6.12)$$

dove il prodotto a secondo membro, come d’uso, si intende eseguito righe per colonne. Posta in questi termini, la questione della determinazione di \vec{B} risulta banale: per determinare la componente B_1 si imprime alla particella una velocità diretta lungo l’asse \hat{x}_3 e si misura la componente della forza lungo l’asse \hat{x}_2 ; dalla (6.12) si ha immediatamente:

$$\vec{v} \equiv (0, 0, v_3) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F}_2 = \frac{q}{c} B_1 v_3 \quad \Longrightarrow \quad B_1 = \frac{c\mathcal{F}_2}{qv_3}.$$

In maniera analoga, permutando gli indici 1, 2 e 3 si ottengono le altre due componenti.

Il campo magnetico non è l’unico esempio di grandezza fisica che può essere definita esclusivamente come fattore di proporzionalità tra due vettori ortogonali. In meccanica classica si incontra una legge di forza del tutto simile alla (6.9). Si tratta della forza di Coriolis che si manifesta quando il moto di un punto materiale viene riferito alla Terra; indicando con $\vec{\Omega}$ il ‘vettore’ avente direzione dell’asse di rotazione terrestre, verso da Sud a Nord, e modulo pari alla velocità angolare rispetto alle stelle fisse, la forza di Coriolis agente su un punto materiale di massa m è espressa da

$$\vec{F}_c = 2m\vec{v} \times \vec{\Omega}.$$

Le corrispondenze

$$2m \leftrightarrow \frac{q}{c}, \quad \vec{\Omega} \leftrightarrow \vec{B},$$

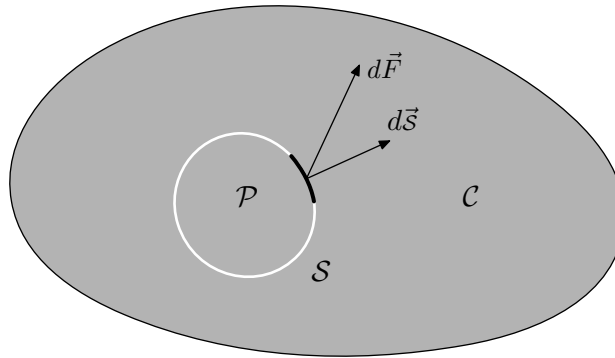
trasformano la forza magnetica in quella di Coriolis, e viceversa. Le considerazioni svolte per il campo magnetico si applicano anche a $\vec{\Omega}$, che in realtà non risulta essere un vero vettore, ma soltanto un modo comodo di esprimere la proporzionalità tra i (veri) vettori \vec{v} e \vec{F}_c .

Il ‘peccato originale’ è lo stesso in entrambi i casi: sia \vec{B} che $\vec{\Omega}$ sono stati definiti assumendo *convenzionalmente* una direzione un modulo e un verso. Ora, se è vero che un vettore ha direzione modulo e verso, *non è vero* che tutte le grandezze caratterizzate da direzione modulo e verso sono vettori: in Fisica, i veri vettori sono soltanto quelli che discendono dai segmenti orientati attraverso moltiplicazione per uno scalare.

Gli esempi di leggi fisiche che stabiliscono una proporzionalità tra vettori con direzioni *differenti*, non necessariamente ortogonali tra loro, sono numerosi. In tutti questi casi occorre introdurre la nozione di *tensore* che viene presentata sinteticamente nel prossimo paragrafo.

6.1.3 Tensori

Il termine ‘tensore’ trae origine dal fatto che questo tipo di grandezze fisiche è stato introdotto per la prima volta nello studio delle tensioni meccaniche che si trasmettono in un solido elastico. Quando un corpo viene schematizzato come un sistema continuo, le forze che si esplicano tra molecole adiacenti vengono descritte, a livello macroscopico, come *forze di superficie*.



Nella figura sopra un solido continuo \mathcal{C} è rappresentato dalla regione ombreggiata; una porzione generica \mathcal{P} del corpo è delimitata dalla superficie chiusa \mathcal{S} , disegnata in colore bianco. Dal momento che le forze tra le molecole si esplicano soltanto su distanze microscopiche, le sole molecole della regione \mathcal{P} che interagiscono con le molecole appartenenti al resto del corpo \mathcal{C} sono quelle che si trovano nelle immediate vicinanze della superficie \mathcal{S} . Per un elemento infinitesimo $d\mathcal{S}$ della superficie la forza esercitata sarà proporzionale al numero delle molecole e quindi proporzionale all'area della superficie. La direzione della forza dipende dall'orientazione dell'elemento di superficie, caratterizzata dal vettore $d\vec{\mathcal{S}}$; abbiamo quindi una relazione di proporzionalità tra due vettori con

direzioni differenti che, in termini di componenti ortogonali, si scrive

$$\begin{bmatrix} dF_1 \\ dF_2 \\ dF_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dS_1 \\ dS_2 \\ dS_3 \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

La matrice $[T]$ viene detta *matrice degli sforzi*. I coefficienti T_{ij} sono funzioni della posizione e dipendono dallo stato di deformazione del corpo; la loro determinazione è oggetto di studio della Teoria dell'Elasticità che non è il caso di discutere qui[†]. Quello che interessa è che abbiamo un esempio intuitivo di una grandezza fisica, rappresentata da una matrice 3×3 , che stabilisce una relazione di proporzionalità tra vettori; tutte le grandezze fisiche di questo tipo vengono chiamate tensori o, più precisamente, tensori di rango due perché sono caratterizzate da $9 = 3^2$ componenti. I vettori vengono anche chiamati tensori di rango uno perché hanno 3^1 componenti e gli scalari tensori di rango zero perché hanno 3^0 componenti. Esistono anche tensori di rango tre (con $3^3 = 27$ componenti) o superiore ma non avremo bisogno di parlarne a questo livello di esposizione e quindi manterremo la terminologia di scalari, vettori e tensori.

La nozione di tensore viene introdotta in Fisica per lo stesso motivo per cui si è introdotta la nozione di vettore: essa consente di formulare le leggi fisiche in maniera *intrinseca*, indipendente dalla scelta di un particolare sistema di coordinate; le (6.12) e (6.13) vengono scritte nella forma compatta

$$\vec{F} = \frac{q}{c} [B] \cdot \vec{v}, \quad d\vec{F} = [T] \cdot d\vec{S},$$

utilizzando una coppia di parentesi quadre per indicare i tensori; il puntino di prodotto scalare indica il fatto che, in termini di componenti, la moltiplicazione righe per colonne ‘contrae’ il secondo indice del tensore con l'indice del vettore a destra lasciando una grandezza con un solo indice che è il vettore prodotto. Le componenti, \mathcal{F}_i , B_{ij} , v_j etc., dipendono dalla scelta della terna di assi ortogonali, mentre i vettori, i tensori e le relazioni tra di essi non dipendono dalla particolare terna.

Gli esempi di grandezze tensoriali sono numerosi in Fisica; il momento angolare \vec{L} di un corpo rigido non ha in generale la stessa direzione della velocità angolare $\vec{\omega}$:

$$\vec{L} = [I] \cdot \vec{\omega},$$

dove $[I]$ è il tensore momento di inerzia; ancora, il momento di dipolo \vec{p} indotto per deformazione in una molecola che non ha simmetria sferica, non ha necessariamente la direzione del campo elettrico

$$\vec{p} = [\alpha] \cdot \vec{E}.$$

In generale, la polarizzabilità molecolare non è uno scalare ma un tensore.

Si può dimostrare che tutti i tensori degli esempi citati sopra sono ‘simmetrici’: $T_{ij} = T_{ji}$, $I_{ij} = I_{ji}$, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$. Il tensore campo magnetico

[†]Vale comunque la pena di notare che T ha le dimensioni di una pressione. Nel caso dei liquidi e dei gas (che non hanno elasticità di forma) gli elementi T_{ij} al di fuori della diagonale principale ($i \neq j$) sono nulli mentre gli elementi diagonali sono eguali alla pressione idrostatica p . Allora la (6.13) si riduce alla familiare

$$d\vec{F} = p d\vec{S}.$$

Il lettore attento potrà obiettare che $\vec{\omega}$, non è un vero vettore. In effetti neanche \vec{L} lo è, e la relazione scritta a fianco, a rigore, è un'equazione tra tre tensori. Tuttavia, come si vedrà più avanti nel paragrafo, $\vec{\omega}$ e \vec{L} appartengono a una categoria di tensori che, con un opportuno accorgimento possono essere trattati come vettori.

(così come $\vec{\omega}$ e \vec{L}) fa eccezione perché è *anti-simmetrico*

$$B_{ij} = -B_{ji} ,$$

come si vede immediatamente ispezionando la (6.12). Un tensore simmetrico ha solo sei componenti indipendenti, mentre uno antisimmetrico ne ha soltanto tre. È questa caratteristica che consente di definire il ‘vettore’ campo magnetico come la terna ordinata di numeri

$$B_1 \equiv B_{23} , \quad B_2 \equiv B_{31} , \quad B_3 \equiv B_{12} .$$

Notare che le tre definizioni a lato si ottengono l’una dall’altra permutando circolarmente gli indici.

In effetti non basta una terna di numeri reali per fare un vettore e di questo possiamo accorgerci se cambiamo la terna di assi coordinati. Consideriamo il caso semplicissimo di una trasformazione che inverte il verso di \hat{x}_1 lasciando invariati \hat{x}_2 e \hat{x}_3 ; un attimo di riflessione basta per rendersi conto che in questa trasformazione B_{23} resta invariato mentre B_{31} e B_{12} cambiano segno. Questo è giusto l’opposto di quanto accade per un vero vettore: la componente B_1 dovrebbe cambiare di segno mentre le B_2 e B_3 dovrebbero restare invariate. Questa difficoltà viene eliminata imponendo la restrizione (arbitraria) che devono essere adottate soltanto terne levogire.

In conclusione, la vera natura del campo magnetico è quella di tensore di rango due ma è possibile trattarlo come un vettore, secondo la definizione data alla fine del paragrafo precedente, a patto di limitare la scelta dei sistemi di coordinate. La teoria classica dell’elettromagnetismo è stata sviluppata adottando questa convenzione che oramai è consacrata dall’uso e che rende più semplice lo studio delle proprietà del campo. La presente esposizione si conforma alla consuetudine ma, in qualche occasione, sarà necessario tenere presente il carattere tensoriale dell’interazione magnetica per chiarire dei punti che resterebbero altrimenti oscuri.

6.2 Forze sulle correnti

Le forze che il campo magnetico esercita su singole cariche in moto danno luogo a una forza risultante su una corrente; questa forza può essere espressa in termini del vettore \vec{J} . Ricordiamo l’espressione generale (5.5) del vettore densità di corrente

$$\vec{J} = q_+ n_+ \vec{u}_+ + q_- n_- \vec{u}_- .$$

In una cella dello spazio di volume $d\nu$ sono presenti

$$dN_+ = n_+ d\nu ,$$

portatori aventi carica q_+ ; su ciascuno di essi un campo magnetico \vec{B} esercita una forza

$$\vec{\mathcal{F}}_+ = \frac{q_+}{c} \vec{u}_+ \times \vec{B} ,$$

e quindi la forza totale esercitata sul sistema di tutti i portatori di carica positivi presenti nella cella è

$$d\vec{\mathcal{F}}_+ = dN_+ \vec{\mathcal{F}}_+ = \frac{1}{c} q_+ n_+ \vec{u}_+ \times \vec{B} dv.$$

Un risultato del tutto analogo vale per i portatori di carica negativi:

$$d\vec{\mathcal{F}}_- = \frac{1}{c} q_- n_- \vec{u}_- \times \vec{B} dv.$$

Pertanto la forza totale agente sulla cella si scrive come

$$d\vec{\mathcal{F}} = d\vec{\mathcal{F}}_+ + d\vec{\mathcal{F}}_- = \frac{1}{c} (q_+ n_+ \vec{u}_+ + q_- n_- \vec{u}_-) \times \vec{B} dv = \left(\frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B} \right) dv. \quad (6.14)$$

In presenza di campo magnetico, una corrente con densità di volume \vec{J} è soggetta a una densità di ‘forza di volume’

$$\vec{f} = \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B}, \quad (6.15)$$

e quindi su una porzione qualsiasi \mathcal{V} della distribuzione agisce una forza totale

$$\vec{\mathcal{F}} = \int_{\mathcal{V}} \vec{f} dv = \frac{1}{c} \int_{\mathcal{V}} \vec{J} \times \vec{B} dv.$$

Abbiamo la conferma che, anche ai fini della determinazione delle azioni meccaniche, non interessa conoscere il dettaglio del moto di ogni singola particella ma soltanto la variabile euleriana \vec{J} .

In generale, il calcolo dell’integrale scritto sopra non è semplice ma, nel caso di un campo magnetico uniforme, si ottiene facilmente un risultato di grande importanza. Se \vec{B} non dipende dalla posizione, si può mettere in evidenza nell’integrale

$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{1}{c} \left(\int_{\mathcal{V}} \vec{J} dv \right) \times \vec{B}.$$

Si noti che nella formula si è avuto cura di lasciare \vec{B} a destra del segno \times perché il prodotto vettore non è commutativo. Ora, se \mathcal{V} è la regione occupata dall’intera distribuzione di corrente stazionaria, per la (5.18) l’integrale tra le parentesi è nullo. Pertanto la forza totale esercitata da un campo magnetico *uniforme* sull’intera distribuzione di corrente è nulla. In virtù di questa proprietà la forza esercitata da un campo uniforme su un atomo o una molecola è zero. Tutto ciò è in analogia con l’annullarsi della forza totale che il campo elettrico esercita su una distribuzione avente carica totale nulla.

Per le applicazioni pratiche è utile riformulare tutti questi risultati per le correnti che scorrono nei fili. Tenendo presente la formula di equivalenza (5.10), dalla (6.14) si ottiene subito

$$d\vec{\mathcal{F}} = \frac{I}{c} d\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad (6.16) \quad \begin{array}{l} \text{SECONDA FORMULA DI} \\ \text{LAPLACE} \end{array}$$

per la forza che agisce su un segmento $d\vec{\ell}$ di filo conduttore percorso da una corrente I . Questa legge viene detta ‘*seconda formula di Laplace*’. Per un circuito assimilabile a una curva chiusa γ la forza totale è espressa da

$$\vec{F} = \frac{I}{c} \oint_{\gamma} d\vec{\ell} \times \vec{B}. \quad (6.17)$$

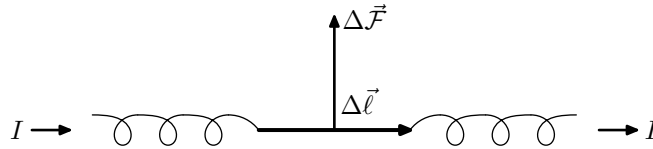
Nel caso di campo magnetico uniforme, l’annullamento della forza totale agente su un circuito chiuso segue immediatamente dall’ovvia identità

$$\oint_{\gamma} d\vec{\ell} = 0.$$

Sulla seconda formula di Laplace si basa un semplice dispositivo di misura del campo magnetico detto ‘circuito esploratore’. Un’asticciola conduttrice, di lunghezza $\Delta\ell$, viene inserita in un circuito elettrico mediante sottili fili di collegamento che consentono il passaggio di corrente ma non trasmettono sforzi meccanici. In questo modo è possibile misurare la forza che agisce sull’asticciola indipendentemente dalle forze agenti sul resto del circuito. Per la seconda formula di Laplace, si ha[†]

$$\Delta\vec{F} = \frac{I}{c} \Delta\vec{\ell} \times \vec{B},$$

dove $\Delta\vec{\ell}$ è orientato concordemente a I (vedi figura sotto).



CIRCUITO ESPLORATORE.

La forza è perpendicolare a $\Delta\vec{\ell}$ e viene misurata facilmente con un dinamometro (non rappresentato in figura). Orientando l’asticciola lungo tre direzioni ortogonali e misurando le forze corrispondenti, si possono ottenere le componenti di \vec{B} seguendo il procedimento illustrato a pag. 195. In pratica, lo strumento viene usato in un altro modo. Grazie alla maneggevolezza del sistema è facile, ruotando l’asticciola, trovare la direzione per cui la forza è nulla e cioè la direzione di \vec{B} . Una volta ottenuta questa direzione, si ruota l’asticciola di $\pi/2$, si misura la forza, diciamo $\vec{F}(\pi/2)$, e si ricava subito il modulo del campo

$$B = \frac{cF(\pi/2)}{I\Delta\ell}.$$

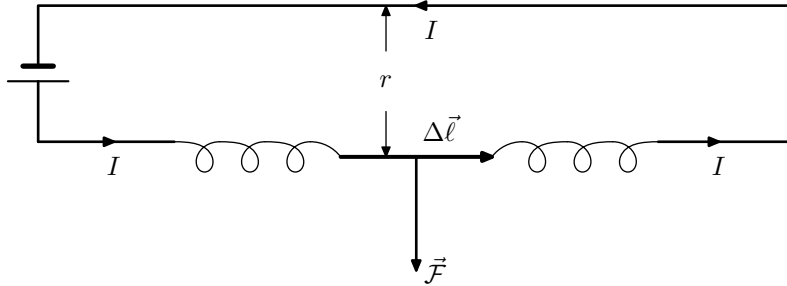
[†]Ovviamente, stiamo supponendo che il campo magnetico non vari in maniera significativa su distanze dell’ordine di $\Delta\ell$.

Infine, propongo al lettore di verificare che, se si dispone l'indice della mano destra parallelo e concorde a $\vec{\mathcal{F}}(\pi/2)$ e il medio parallelo e concorde a $\Delta\vec{\ell}$, il pollice indicherà il verso di \vec{B} . Per esempio nella figura sopra il campo punta dal lettore verso la pagina.

Un dispositivo del tipo illustrato sopra viene utilizzato nel Sistema Internazionale di unità di misura per definire lo standard di corrente elettrica denominato Ampère. Se non si è ancora fatta una scelta di unità di misura per le grandezze elettromagnetiche, le formule scritte sopra in unità gaussiane possono essere generalizzate come relazioni di proporzionalità piuttosto che come uguaglianze; per esempio la relazione tra la forza agente sul circuito esploratore e il campo magnetico diventa

$$\mathcal{F}(\pi/2) \propto BI\Delta\ell, \quad (6.18)$$

dove il simbolo \propto si legge “proporzionale a”. La costante c è stata soppressa perché, in una relazione di proporzionalità le costanti sono irrilevanti; d'altronde, i primi indagatori non avevano alcun sospetto dell'esistenza di una costante di velocità finita di propagazione dei segnali. La (6.18) esprime il dato empirico ‘grezzo’ di una proporzionalità della forza alla intensità di corrente e alla lunghezza del circuito esploratore. Supponiamo ora che il campo magnetico sia prodotto da una corrente uguale a quella che passa nel circuito esploratore; ciò può essere facilmente ottenuto mediante il circuito mostrato qui sotto:



La batteria a sinistra produce una corrente I che passa attraverso il circuito esploratore e poi si chiude attraverso il lungo filo rettilineo in alto in figura. Indicando con r la distanza della sbarretta dal filo rettilineo, e ricordando la (6.8) si ha

$$B \propto \frac{2I}{r}. \quad (6.19)$$

Il fattore ‘2’ è stato mantenuto in questa relazione di proporzionalità per un motivo che verrà spiegato in seguito. Sostituendo nella (6.18) abbiamo

$$\mathcal{F} \propto \frac{2I^2\Delta\ell}{r}.$$

In questa formula la sola grandezza non meccanica è la corrente I ; la scelta di una unità di misura per la corrente viene fatta scegliendo il valore della costante k che trasforma la relazione precedente in una eguaglianza

$$\mathcal{F} = k \frac{2I^2\Delta\ell}{r}. \quad (6.20)$$

Nel sistema gaussiano non si introduce un nuovo standard ma si adotta il valore $k = 1/c^2$ che, per così dire, è fissato dalla natura. Nel SI invece, si introduce l'Ampère (simbolo 'A') come nuova unità fondamentale di corrente da aggiungere agli standard meccanici metro, chilogrammo e secondo; per questo si parla di sistema MKSA. Il valore di k può essere scelto ad arbitrio ed è fissato per convenzione in

$$k = 10^{-7}.$$

Si dice allora che in una sbarretta di lunghezza $\Delta\ell$ circola una corrente di 1 Ampère, se, disponendo la sbarretta parallelamente a un lungo filo rettilineo in cui circola la stessa corrente e a una distanza $r = \Delta\ell$, si misura una forza di 2×10^{-7} N.

Piuttosto che k nel SI si utilizza la *permeabilità magnetica del vuoto* μ_0 definita come

$$\mu_0 = 4\pi k \approx 1.2566 \times 10^{-6} \text{N/A}^2. \quad (6.21)$$

Questa costante è analoga alla costante ε_0 che compare nella legge di Coulomb (in unità del SI) e, a dispetto del nome suggestivo, non ha alcun significato fisico. Il nome dell'unità SI del campo magnetico è *Tesla* in onore di NIKOLA TESLA (1856-1943), studioso e inventore serbo-americano. Come osservato in precedenza, le dimensioni di B nel sistema gaussiano sono le stesse di E ma, per tradizione, l'unità di misura viene chiamata '*Gauss*'. Il lettore può facilmente verificare che

$$1 \text{ Tesla} = 10^4 \text{ Gauss}.$$

La semplicità del fattore di conversione fa sì che il Gauss, o più spesso il multiplo (kG) venga usato anche nelle applicazioni pratiche. Per dare un'idea degli ordini di grandezza: il campo magnetico terrestre alla latitudine di Napoli vale circa mezzo gauss, il campo nelle immediate vicinanze dei fili di un impianto domestico raggiunge qualche decina di gauss, i campi più grandi che si possono produrre in laboratorio, alla scala macroscopica, sono dell'ordine di alcune centinaia di kG.

6.3 Il Campo di Biot-Savart

I primi esperimenti sul campo magnetico generato da correnti furono condotti da Ampère e, indipendentemente, da Jean-Baptiste Biot e Félix Savart; essi eseguirono la misura del campo magnetico prodotto da un lungo filo rettilineo. Nella zona centrale del filo, lontano dalle estremità, il campo magnetico risulta indipendente dalla lunghezza del filo (filo rettilineo indefinito) e ha una geometria molto semplice. La figura

mostra alcune linee di flusso di \vec{B} ; si tratta di circonferenze giacenti in piani ortogonali al filo e con il centro sul filo. Assumendo un sistema di coordinate cilindriche con asse \hat{z} coincidente con il filo, le coordinate di un punto campo P sono (r, ϕ, z) , dove r è la distanza dal filo e ϕ l'angolo tra il semipiano di bordo \hat{z} passante per P e un semipiano fisso di riferimento. Il vettore \vec{B} ha la direzione del versore di ϕ e la componente lungo quest'asse è

$$B_\phi = \frac{2I}{cr}, \quad (6.22)$$

dove I è l'intensità di corrente *nel verso di \hat{z}* (se la corrente è concorde a \hat{z} , allora $I > 0$ e viceversa); il campo magnetico punta in senso antiorario rispetto al verso della corrente.

Si noti che questo risultato sperimentale è in perfetto accordo con il calcolo relativistico (6.8); senza esserne consapevoli, Biot-Savart e Ampère sono stati i primi a eseguire una misura quantitativa di un effetto relativistico. È anche suggestivo considerare che in questi esperimenti le velocità in gioco sono minuscole rispetto a c (si ricordi la stima (5.1) della velocità dei portatori di carica in un filo di rame). Il rapporto I/c nella (6.22) contiene la velocità u dei portatori di carica nella I a numeratore: $I = \lambda u$. Il rapporto I/c ha un valore apprezzabile grazie al fattore λ che a sua volta è grande in virtù dell'immensa grandezza del numero di Avogadro.

Tornando alla discussione della struttura del campo magnetico, enunciamo le proprietà di flusso e circuitazione del vettore \vec{B} :

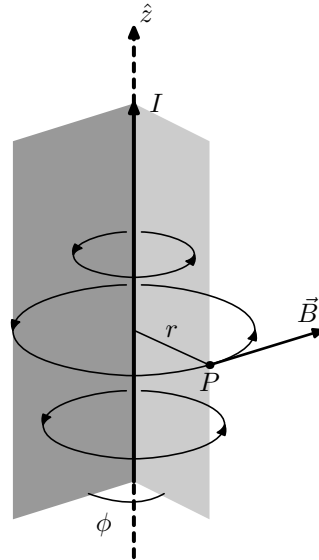
1. il campo di Biot-Savart è solenoidale. Se S è una superficie chiusa:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0;$$

2. il campo di Biot-Savart **non** è conservativo. Se γ è una curva chiusa:

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \neq 0.$$

Ambedue le affermazioni seguono dalla geometria delle linee di flusso. Per quanto riguarda la solenoidalità, osserviamo che una superficie chiusa S delimita una regione dello spazio a tre dimensioni; ora immaginiamo di percorrere una circonferenza, o più in generale una linea chiusa, partendo da un punto qualsiasi e tornando a quello stesso punto; supponiamo, per



CAMPO DI BIOT-SAVART

Nel SI: $B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

[†]Eventuali punti di tangenza tra una curva e una superficie devono essere considerati come punti ‘doppi’ in cui l’ingresso e l’uscita coincidono. Peraltro, in questi punti \vec{B} è tangente alla superficie e quindi $\vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$.

fissare le idee, che il punto di partenza sia esterno alla superficie e che, percorrendo la circonferenza, si intersechi la superficie \mathcal{S} *entrando* nella regione da questa delimitata; dal momento che il percorso deve tornare al punto di partenza dovrà necessariamente esserci un’intersezione in *uscita*. Da questo argomento è immediato trarre la conclusione che tra una superficie chiusa e una curva chiusa ci sono in generale un numero pari[†] di intersezioni associabili a due a due come coppie ingresso–uscita con contributi al flusso che si elidono. Questa argomentazione informale non costituisce una prova ‘rigorosa’ ma, come è nello spirito di un testo di Fisica, cerca di cogliere la ragione sostanziale della validità della proposizione 1. La forma locale della solenoidalità del campo

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

può essere ricavata facilmente utilizzando l’espressione (1.25) dell’operatore divergenza in coordinate cilindriche. Occorre comunque notare che nei punti del filo la divergenza non è definita perchè il campo diverge.

Nota matematica. Metto in guardia il lettore contro un possibile errore: il fatto che la divergenza di un vettore si annulla non implica, in generale, che il vettore sia solenoidale; in termini più espliciti, mentre l’implicazione

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{s} \implies \operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

è sempre valida, l’implicazione inversa

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \stackrel{?}{\implies} \oint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{s},$$

è valida *soltanto* per le superfici al cui interno la divergenza è dappertutto definita. Infatti, la seconda implicazione può essere dimostrata applicando il teorema della divergenza (1.28), che richiede appunto che $\operatorname{div} \vec{B}$ sia definito in tutti i punti della regione \mathcal{V} delimitata da \mathcal{S} . Per esempio, il campo coulombiano (che è il prototipo di campo *non* solenoidale) ha divergenza nulla in tutti i punti dello spazio escluso il punto dove è situata la carica (in cui il campo diverge). Ciò comporta che il flusso di \vec{E} è nullo per le superfici chiuse che non contengono il punto carico, mentre vale $4\pi q$ per quelle che lo contengono. Dal momento che il campo di Biot-Savart è singolare nei punti del filo, l’annullarsi della divergenza in tutti gli altri punti dello spazio non è sufficiente a provare la solenoidalità. L’argomento basato sulle intersezioni tra linee chiuse e superfici chiuse, se pur svolto in maniera informale, ha invece validità generale. Di conseguenza la divergenza di \vec{B} può essere *definita* nulla, per continuità, anche nei punti del filo. ■

Per quanto riguarda il punto 2, calcoliamo la circuitazione di \vec{B} lungo una delle circonferenze che costituiscono le linee di flusso. Assumendo come verso di percorrenza quello lungo cui ϕ cresce, si ha immediatamente

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\mathcal{C}} B_{\phi} d\ell = B_{\phi} \oint_{\mathcal{C}} d\ell = \frac{2I}{cr} 2\pi r = \frac{4\pi}{c} I. \quad (6.23)$$

La circuitazione del campo di Biot-Savart lungo qualsiasi linea di flusso, a meno del fattore $4\pi/c$ è pari alla corrente nel filo. Il calcolo per una curva

chiusa generica è quasi altrettanto semplice. Osserviamo innanzitutto che in coordinate cilindriche si ha

$$\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_r d\ell_r + B_z d\ell_z + B_\phi d\ell_\phi = \frac{2I}{cr} d\ell_\phi.$$

Ora si osservi la figura accanto, disegnata in proiezione su un piano ortogonale al filo; così facendo si rinuncia a rappresentare la componente lungo \hat{z} di $d\vec{\ell}$ che non interviene nel calcolo. Ovviamente, la corrente scorre perpendicolarmente alla pagina (verso il lettore) ed è rappresentata dal punto I . Dall'esame della figura si ha immediatamente

$$\frac{d\ell_\phi}{r} = d\phi,$$

dove $d\phi$ è la differenza di longitudine tra gli estremi di $d\vec{\ell}$. Allora, per una curva chiusa generica γ risulta

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{2I}{c} \oint_\gamma d\phi.$$

L'integrale dipende dalla posizione della curva rispetto al filo. Si osser-

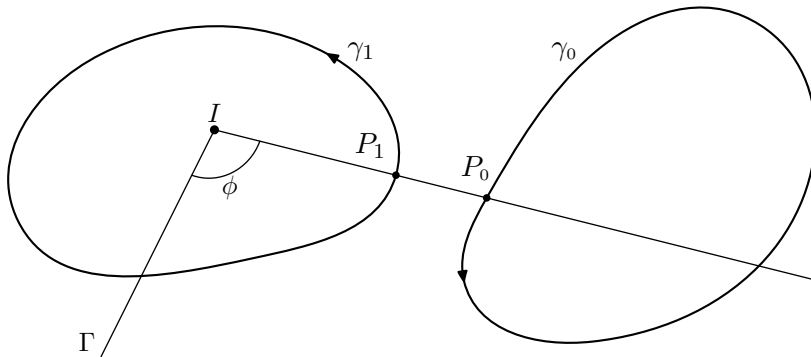


Figura 6.6: Due curve per il calcolo della circuitazione di \vec{B} .

vino le due curve γ_0 e γ_1 in figura 6.6 dove Γ rappresenta la traccia del semipiano meridiano rispetto al quale si misura la longitudine; tra le due vi è una differenza topologica essenziale: se si percorre γ_0 , partendo per esempio da P_0 , la longitudine ϕ dapprima diminuisce, poi cresce e infine torna a decrescere fino a tornare al valore iniziale, mentre lungo la curva γ_1 la longitudine cresce sempre. Allora l'integrale lungo γ_0 vale zero mentre quello lungo γ_1 vale $2\pi^\dagger$. Perciò si ha

$$\oint_{\gamma_0} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0, \quad \oint_{\gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{4\pi}{c} I. \quad (6.24)$$

La differenza tra le due curve sta nel fatto che il filo 'passa dentro' γ_1 mentre è 'esterno' a γ_0 . L'analogia con il flusso del campo coulombiano

[†]In proposito si ricordi come fu che il signor Phileas Fogg vinse la scommessa di compiere il giro del mondo in ottanta giorni. A chi non conosce il famoso romanzo di Jules Verne ne consiglio la lettura: è una delizia.

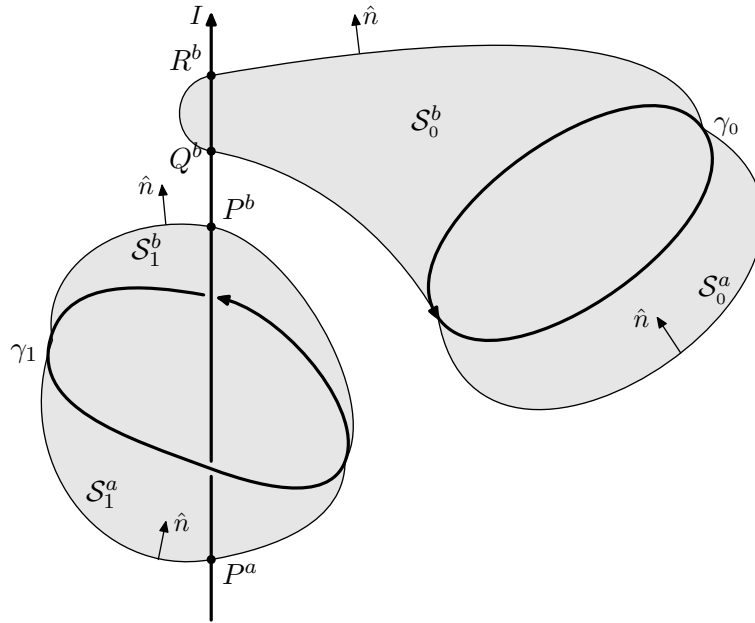


Figura 6.7: La corrente I è concatenata a γ_1 ma non a γ_0 .

uscite da una superficie chiusa è evidente. Per rendere geometricamente precisa nello spazio a tre dimensioni, l'idea intuitiva di una retta che passa dentro una curva chiusa γ , si ricorre alla nozione di superficie *orlata* da γ . Con questa locuzione si intende una superficie *aperta* il cui bordo coincide con γ , come ad esempio un bicchiere e il suo orlo. Ovviamente, di superfici orlate da una curva chiusa assegnata ce ne sono infinite; nella figura 6.7, sono disegnate con una leggera ombreggiatura due superfici, S_1^a e S_1^b , orlate da γ_1 (il lettore si sforzi di 'vedere' il disegno con rilievo tridimensionale). La retta che rappresenta il filo percorso da corrente interseca queste superfici nei punti P^a e P^b rispettivamente. Ora è evidente che qualsiasi superficie orlata da γ_1 viene intersecata dal filo; allora l'idea intuitiva del 'passare dentro' viene formalizzata dalla nozione di 'concatenazione': una retta si dice *concatenata* a una curva chiusa γ se interseca *qualsiasi* superficie orlata da γ .

L'intersezione del filo conduttore con una superficie implica che quest'ultima è attraversata dalla corrente che circola nel filo. Ricordiamo che il segno della corrente che fluisce attraverso una superficie dipende dalla scelta del verso della normale; ora, la normale a una superficie orlata da una curva chiusa e orientata, viene scelta secondo la '*convenzione levogira*': osservando dalla parte verso cui punta la normale, il verso di percorrenza della curva deve apparire antiorario. Osservare attentamente la figura 6.7: le normali alle superfici contrassegnate con \hat{n} sono tutte orientate con questo criterio.

Definizione: Si dice *corrente concatenata* a una curva chiusa γ , la corrente che attraversa una superficie orlata da γ nel senso stabilito dalla convenzione levogira.

Si noti che la convenzione levogira stabilisce solo il verso relativo tra la normale alla superficie e la tangente alla curva: uno dei due può essere scelto a piacere, l'altro viene determinato dalla convenzione.

Nella figura 6.7 la corrente concatenata a γ_1 è proprio la corrente I che circola nel filo; si noti che se si inverte il verso di percorrenza della curva, la corrente concatenata è $-I$, in accordo con il cambiamento di segno della circuitazione di \vec{B} . La corrente concatenata a γ_0 è invece nulla; per quanto riguarda la superficie S_0^a , la cosa è ovvia perché questa non viene intersecata dal filo; con S_0^b vi sono due intersezioni nei punti Q^b e R^b che danno contributi opposti e perciò una corrente nulla.

In conclusione le (6.24) possono essere sintetizzate in un'unica legge di circuitazione per il campo di Biot-Savart

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{4\pi}{c} I_{\gamma}, \quad (6.25)$$

dove γ è una generica curva chiusa e I_{γ} è la corrente concatenata alla curva.

6.4 Leggi generali del campo magnetico statico

In primo luogo, per il campo magnetico vale un principio di sovrapposizione del tutto analogo a quello trovato per il campo elettrico: il campo prodotto da due o più distribuzioni di corrente è la somma dei campi che ciascuna distribuzione produce da sola. Inoltre, le proprietà di flusso e circuitazione del campo di Biot-Savart possono essere generalizzate ai campi magnetici prodotti da distribuzioni arbitrarie di correnti. Le misure sperimentali sui campi magnetici prodotti da circuiti delle forme più disparate e anche da distribuzioni di corrente di volume o di superficie mostrano che non esistono punti da cui emergono (o convergono) le linee di flusso di \vec{B} ; pertanto si può asserire che **il campo magnetico è solenoidale**:

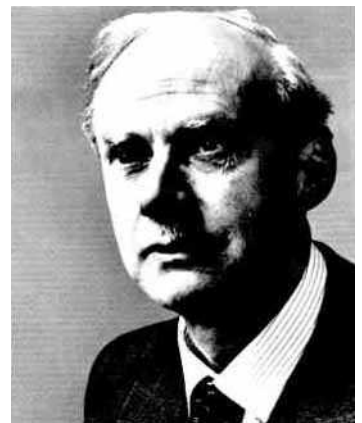
$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (6.26)$$

per qualsiasi superficie chiusa S . Questa legge vale non solo per i campi macroscopici ma anche per i campi prodotti dai costituenti elementari della materia, protoni, elettroni, neutroni. Tutte queste particelle, incluso il neutrone, producono campi magnetici di struttura dipolare.

Tuttavia non si può escludere (e anzi alcune moderne teorie unificate lo richiedono) che un 'esperimento della calamita spezzata' alla scala subnucleare possa alla fine produrre la separazione di due poli magnetici di segno opposto. Dirac ha dimostrato² che gli eventuali 'monopoli magnetici' devono aver una carica multipla di una carica magnetica elementare

$$g = \frac{e}{2\alpha},$$

²L'argomento di Dirac è semplice (oltre che geniale) ma richiede la conoscenza dei principi della meccanica quantistica.



PAUL A. M. DIRAC
1902 – 1984

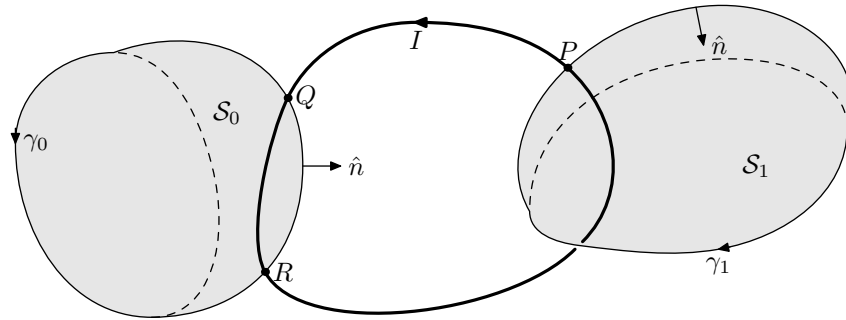
dove e è la carica elettrica elementare e $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ è una costante adimensionale nota come ‘costante di strutture fine’. Finora la ricerca del monopolo magnetico non ha dato risultati e perciò, allo stato attuale, l’assunzione che \vec{B} è solenoidale è da considerare una delle leggi di base dell’elettromagnetismo.

Ricordiamo, dalla discussione svolta per le correnti stazionarie nel § 5.3, che la solenoidalità di \vec{B} implica che le linee di flusso sono chiuse oppure si avvolgono senza fine in regioni toroidali come quella mostrata in figura 5.3. Il caso di linee di flusso chiuse si realizza in geometrie altamente simmetriche come quella di Biot-Savart e nei pochi esempi che verranno discussi in dettaglio più avanti. Ciò potrebbe dare l’impressione che il caso di linee di flusso infinite sia un’eccezione che si presenta solo in configurazioni esotiche o estremamente complicate; avverto il lettore che non è così: per il campo magnetico, la struttura a tubi di flusso è quella ‘generica’ e si presenta anche in geometrie semplicissime. Questa caratteristica ha grande importanza in Astrofisica e in Fisica dei Plasmi.

Anche per quanto riguarda la legge di circuitazione, l’indagine sperimentale mostra che si può estendere la legge trovata per il campo di Biot-Savart: in caso di correnti stazionarie vale la *legge di circuitazione di Ampère*

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{4\pi}{c} I_{\gamma}, \quad (6.27)$$

dove I_{γ} è la corrente concatenata alla curva γ . Osserviamo che la nozione di concatenazione, introdotta per il filo rettilineo indefinito, si applica a circuiti filiformi di forma qualsiasi come mostrato in maniera eloquente dalla figura sotto.



La curva a tratto spesso rappresenta un filo conduttore percorso da una corrente I nel senso indicato dalla freccia, mentre γ_0 e γ_1 sono due curve chiuse e orientate. Qualsiasi superficie orlata da γ_1 è intersecata dal conduttore (punto P in figura); si noti che con la scelta del verso indicato in figura, la corrente concatenata a γ_1 vale $-I$. La corrente concatenata a γ_0 è nulla perché la superficie S_0 è intersecata due volte in senso opposto nei punti Q e R .

La validità della legge di Ampère non è ristretta al caso di correnti in fili metallici, che del resto sono un artefatto umano non molto diffuso

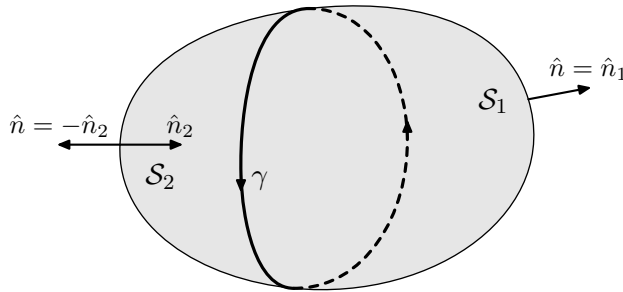


ANDRÉ MARIE AMPÈRE
1775 – 1836

nell'universo, ma si applica per qualsiasi distribuzione stazionaria. Nel caso, comune in natura, di correnti di volume si ha

$$I_\gamma \equiv \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}, \quad (6.28)$$

dove S è appunto una superficie avente come orlo la curva γ e orientata secondo la convenzione levogira. Dal momento che le linee di flusso di \vec{J} non sono necessariamente chiuse, qui occorre assicurarsi che il flusso è lo stesso per tutte le superfici orlate da γ , altrimenti la nozione di corrente concatenata alla curva perde senso. Consideriamo allora due distinte superfici S_1 e S_2 orlate dalla stessa curva chiusa γ .



Nella figura le orientazioni delle due superfici che rispettano la convenzione levogira sono indicate dalle normali \hat{n}_1 e \hat{n}_2 . Indichiamo con I_1 e I_2 le correnti che attraversano le due superfici nel senso di queste normali. La corrente concatenata a γ sarà univocamente definita se, comunque si scelgano S_1 e S_2 , risulta

$$I_1 = I_2 (= I_\gamma).$$

Si osservi ora che l'unione di due superfici aperte con lo stesso orlo, $S \equiv S_1 \cup S_2$, costituisce una superficie chiusa (esempi: una pentola e il suo coperchio, i due gusci di una noce, etc.). Dal momento che la normale \hat{n} uscente dalla regione delimitata da S coincide con \hat{n}_1 su S_1 mentre è opposta a \hat{n}_2 su S_2 , si ha subito che la corrente totale uscente da S è espressa da

$$I_S = I_1 - I_2 = -\frac{dQ}{dt}, \quad (6.29)$$

dove Q è la carica totale nella regione dello spazio delimitata da S (legge di conservazione della carica (5.11)). Abbiamo perciò che la corrente concatenata a una curva chiusa è univocamente definita *in condizioni stazionarie*, quando non solo le correnti, ma anche le distribuzioni di carica sono indipendenti dal tempo. La legge di Ampère ha quindi validità limitata e dovrà essere modificata quando ci occuperemo di processi dipendenti dal tempo. Comunque, in tutto questo capitolo e nel successivo ci occuperemo solo di correnti stazionarie, e la legge di Ampère costituisce la base per tutta la discussione.

6.4.1 Distribuzioni a simmetria cilindrica

Una distribuzione di corrente si dice ‘a simmetria cilindrica’ quando il vettore \vec{J} , in ogni punto dello spazio ha direzione parallela a un asse \hat{z} fissato e dipende soltanto dalla distanza r da quest’asse. Questo tipo di distribuzione è di interesse quando si vuole studiare il campo magnetico prodotto da un filo rettilineo lungo, come nel caso di Biot-Savart, *all’interno* del filo stesso. In questo caso è evidente che non si può trascurare la sezione del filo ma la legge di Ampère consente di ottenere facilmente l’espressione del campo.

Osserviamo in primo luogo che una distribuzione di corrente cilindrica può essere decomposta in un ‘fascio’ di correnti filiformi tutte parallele tra loro; per la legge di Biot-Savart e il principio di sovrapposizione ciò comporta che il campo ha componente nulla nella direzione \hat{z} . Per la simmetria le componenti B_r e B_ϕ possono dipendere esclusivamente da r . La presenza di una componente radiale darebbe luogo a un flusso non nullo, uscente dalle superfici cilindriche aventi asse coincidente con \hat{z} , in contraddizione con la solenoidalità di \vec{B} . Se ne conclude che l’unica componente non nulla è B_ϕ e perciò le linee di flusso sono circonferenze di asse \hat{z} . Nella figura accanto è mostrata una di queste circonferenze, denominata γ , di raggio r . Si ha ovviamente

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r B_\phi.$$

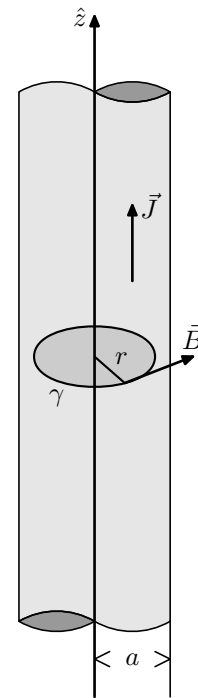
Per la legge di circuitazione di Ampère si ha subito

$$B_\phi = \frac{2I(r)}{cr}, \quad (6.30)$$

dove $I(r)$ è la corrente che attraversa il cerchio di raggio r delimitato dalla circonferenza γ , rappresentato in figura con un’ombreggiatura scura. Si noti l’analogia di questa legge con la (1.21) per le distribuzioni di carica a simmetria sferica.

Se la densità di corrente è uniforme in un cilindro di raggio a , dalla (6.30) si ha subito

$$B_\phi = \begin{cases} \frac{2\pi J}{c} r & \text{per } r \leq a \\ \frac{2\pi a^2 J}{cr} & \text{per } r \geq a \end{cases}$$



Per una densità di superficie \mathcal{J} sul cilindro di raggio a si ha invece

$$B_\phi = \begin{cases} 0 & \text{per } r < a \\ \frac{4\pi a \mathcal{J}}{cr} & \text{per } r > a \end{cases}$$

Si noti la discontinuità del campo, all'attraversamento della superficie, analoga a quella trovata nel caso elettrostatico. In questo caso però la componente discontinua del campo è quella parallela alla superficie e non quella normale. La discontinuità di \vec{B} verrà discussa in generale nel prossimo paragrafo.

Un esempio comune della geometria cilindrica si ha per i 'cavi coassiali', costituiti da un filo conduttore circondato da una guaina cilindrica, nella quale scorre una corrente 'di ritorno' di intensità pari a quella del filo ma in senso inverso. Tra il filo e la guaina si ha un campo magnetico eguale al campo di Biot-Savart mentre all'esterno il campo è nullo.

6.5 Forme locali delle leggi della magnetostatica

L'annullarsi del flusso di \vec{B} uscente da qualsiasi superficie chiusa ha come immediata conseguenza

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (6.31)$$

in tutti i punti dello spazio in cui l'operatore divergenza è definito. Il significato dell'equazione è evidente: in mancanza di cariche magnetiche anche la densità di carica magnetica di volume è nulla.

6.5.1 Correnti di superficie

Come nel caso del campo elettrico, le possibili superfici di discontinuità (per esempio superfici su cui scorre una corrente) richiedono una considerazione a parte. Per quanto riguarda la componente del campo normale alla superficie, un ragionamento identico a quello svolto per ricavare la (1.29) porta a stabilire che per la componente normale non vi è discontinuità

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad (6.32)$$

come è ovvio per il fatto che non esistono cariche magnetiche di superficie.

La componente tangenziale di \vec{B} presenta invece una discontinuità sulle superfici dove scorre una corrente. Indicando con $\vec{\mathcal{J}}$ la densità di corrente e con \vec{B}_1 , \vec{B}_2 i valori limite del campo sulle due pagine della superficie (vedi la figura 6.8), si dimostra che dalla legge di Ampère e dalla (6.32) segue la relazione

$$\vec{B}_1 - \vec{B}_2 = \frac{4\pi}{c} \vec{\mathcal{J}} \times \hat{n}, \quad (6.33)$$

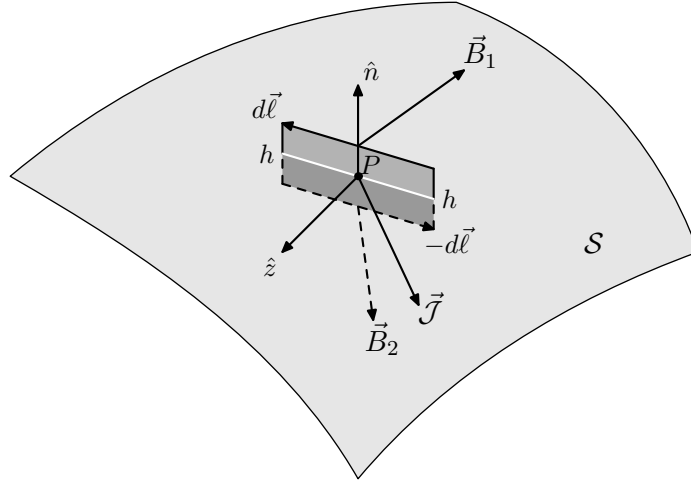


Figura 6.8: Discontinuità della componente tangenziale di \vec{B}

dove \hat{n} è la normale alla superficie orientata verso la pagina 1. Tenendo presenti le proprietà del prodotto vettore si ha che, non solo la componente normale alla superficie, ma anche quella parallela al vettore \vec{J} è continua nell'attraversamento della superficie. La discontinuità riguarda soltanto la componente nella direzione perpendicolare sia a \hat{n} che a \vec{J} , e vale $4\pi\mathcal{J}/c$.

Dimostrazione della (6.33). Nella figura 6.8 è rappresentata una superficie S su cui fluisce una corrente \vec{J} . In un punto P di S consideriamo un qualsiasi versore \hat{z} nel piano tangente alla superficie; ovviamente, \hat{z} è perpendicolare alla normale \hat{n} a S . Nel piano perpendicolare a \hat{z} , costruiamo intorno a P un percorso rettangolare γ , con due lati, $d\vec{\ell}$ e $-d\vec{\ell}$, perpendicolari a \hat{n} e da parti opposte rispetto a S , e due lati paralleli a \hat{n} di lunghezza h . In figura, gli elementi che si trovano dalla parte dove punta \hat{n} (il 'sopra') sono disegnati a tratto continuo, quelli dalla parte opposta (il 'sotto') con linee tratteggiate. Assumendo $h \ll d\ell$, la circuitazione di \vec{B} lungo il rettangolo, nel verso indicato da $d\vec{\ell}$ è espressa da

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \approx \vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell} - \vec{B}_2 \cdot d\vec{\ell},$$

dove \vec{B}_1 e \vec{B}_2 indicano i valori del campo magnetico al centro di $d\vec{\ell}$ e al centro di $-d\vec{\ell}$ rispettivamente. Come superficie orlata da γ prendiamo la regione del piano perpendicolare a \hat{z} interna al rettangolo; in figura, le due ombreggiature con diverse gradazioni di grigio distinguono la parte che si trova al di sopra dalla parte che è al di sotto di S . La corrente passa nella linea di intersezione tra il rettangolo e la superficie S (la linea bianca di confine tra le due diverse ombreggiature del rettangolo) che ha ovviamente lunghezza $d\ell$; pertanto la corrente concatenata a γ è indipendente da h e vale

$$I_{\gamma} = \vec{J} \cdot \hat{z} d\ell.$$

Dalla legge di Ampère (6.27) abbiamo allora

$$\vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell} - \vec{B}_2 \cdot d\vec{\ell} \approx \frac{4\pi}{c} \vec{J} \cdot \hat{z} d\ell.$$

Questa eguaglianza diventa esatta facendo tendere a zero i lati del rettangolo. Osservando la figura, si vede subito che

$$d\vec{\ell} = (\hat{z} \times \hat{n}) d\ell,$$

e perciò, semplificando $d\ell$ a primo e secondo membro

$$\vec{B}_1 \cdot (\hat{z} \times \hat{n}) - \vec{B}_2 \cdot (\hat{z} \times \hat{n}) = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \cdot \hat{z},$$

dove ora \vec{B}_1 e \vec{B}_2 rappresentano i limiti del campo magnetico in P dalla parte dove punta \hat{n} e dalla parte opposta. Questa formula può essere scritta in maniera molto più espressiva con qualche semplice trasformazione algebrica. Ricordiamo dal calcolo vettoriale che in un prodotto misto si possono permutare circolarmente i tre fattori: se \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} sono tre vettori vale l'identità

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}). \quad (6.34)$$

Applicando questa identità ai due termini a primo membro della formula di discontinuità del campo abbiamo

$$\hat{z} \cdot (\hat{n} \times \vec{B}_1 - \hat{n} \times \vec{B}_2) = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \cdot \hat{z}.$$

Dal momento che \hat{z} è un versore arbitrario nel piano tangente questa uguaglianza implica

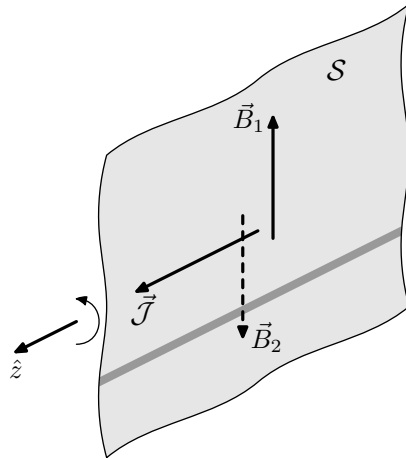
$$\hat{n} \times \vec{B}_1 - \hat{n} \times \vec{B}_2 = \frac{4\pi}{c} \vec{J}.$$

Infine, moltiplicando vettorialmente a destra ambo i membri per \hat{n} e ricordando la definizione (2.5) di componente tangenziale di un vettore, abbiamo la forma locale della legge di Ampère

$$\vec{B}_{\perp 1} - \vec{B}_{\perp 2} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \times \hat{n}.$$

Da quì, tenendo presente la formula di decomposizione (2.6) e il fatto che la componente normale è continua si ottiene subito la (6.33). ■

Vediamo un'applicazione semplice ed importante di questa legge locale. Consideriamo uno 'strato piano indefinito' di corrente uniforme; con questo si intende che vogliamo studiare il campo prodotto da una corrente uniforme in una lamina sottile in una zona vicina al centro della lamina. La geometria è illustrata nella figura sotto dove il bordo irregolare della porzione di superficie piana ombreggiata serve a indicare che soltanto un frammento della distribuzione di corrente è rappresentato.



Questa distribuzione di corrente può essere decomposta in un insieme di strisce infinitesime, come quella disegnata con un'ombreggiatura più scura, ognuna delle quali genera un campo di Biot-Savart. Per il principio di sovrapposizione si può allora asserire che il campo magnetico deve

essere perpendicolare a $\vec{\mathcal{J}}$. Osserviamo poi che una rotazione di π intorno all'asse \hat{z} mostrato in figura, lascia la distribuzione di corrente invariata; dal momento che in questa rotazione un punto dove il campo vale \vec{B}_1 (freccia a tratto intero) viene trasportato in un punto *dall'altra parte di* S , dove il campo è \vec{B}_2 (freccia tratteggiata) deve essere

$$\vec{B}_2 = -\vec{B}_1.$$

Sostituendo nella legge locale di Ampère (6.33) si ottiene allora

$$\vec{B}_1 = \frac{2\pi}{c} \vec{\mathcal{J}} \times \hat{n}, \quad \vec{B}_2 = -\frac{2\pi}{c} \vec{\mathcal{J}} \times \hat{n}. \quad (6.35)$$

Si noti l'analogia con l'inversione del campo elettrico nell'attraversamento di uno strato piano di cariche (1.13). Vi è però una differenza da sottolineare: mentre il campo elettrico (un vero vettore) è invariante anche per riflessione rispetto alla superficie carica, il campo magnetico *non* è invariante per riflessione rispetto alla superficie in cui circola la corrente. In questo si manifesta la natura pseudo-vettoriale di \vec{B} .

6.5.2 Correnti di volume.

Passiamo ora a considerare la forma locale della legge di Ampère nel caso di correnti di volume. Sulla falsariga del ragionamento svolto per ottenere la forma locale della legge di Gauss, andiamo a considerare una famiglia di curve chiuse che 'si stringono' intorno a un punto P fissato. In questo caso occorre però tener presente che, nello spazio a tre dimensioni una curva chiusa γ non delimita una regione, e quindi non ha senso dire che P è interno a γ . Per recuperare questa nozione è necessario eliminare una dimensione, restringendosi a un piano passante per P , come illustrato nella figura 6.9. Il piano contrassegnato con α

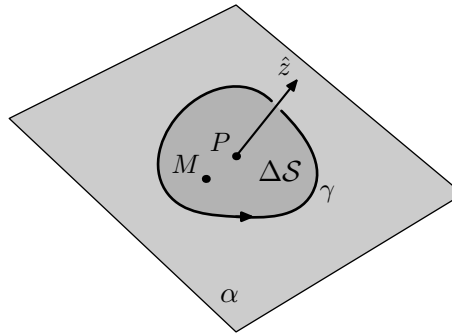


Figura 6.9: Definizione di rotore

in figura, viene individuato come il piano ortogonale a una arbitraria direzione orientata \hat{z} ; con ciò abbiamo anche un criterio per orientare γ , seguendo l'usuale convenzione levogira. Nel piano una curva chiusa delimita una regione ΔS (vedi figura) e ha senso dire che P è interno

a γ . Scegliendo $\Delta\mathcal{S}$ come superficie orlata da γ , dalla legge di Ampère e dal teorema della media si ha

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{4\pi}{c} \int_{\Delta\mathcal{S}} \vec{J} \cdot \hat{z} dS = \frac{4\pi}{c} \vec{J}(M) \cdot \hat{z} \Delta\mathcal{S},$$

dove M è un punto interno a $\Delta\mathcal{S}$. Quando la curva chiusa si contrae in P , M confluisce in P , e perciò, dividendo per $\Delta\mathcal{S}$, risulta che in ciascun punto dello spazio e per qualsiasi direzione orientata deve essere

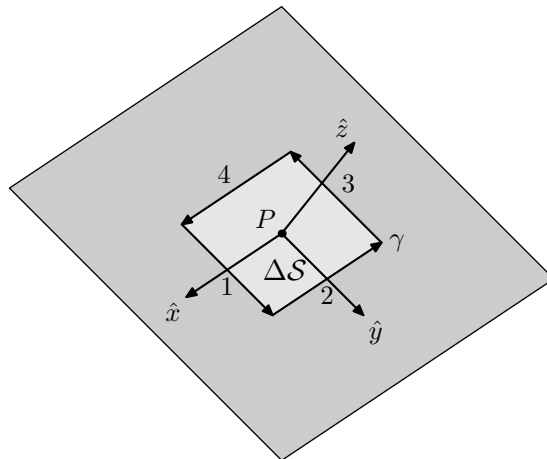
$$\lim_{\Delta\mathcal{S} \rightarrow 0} \frac{\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}}{\Delta\mathcal{S}} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \cdot \hat{z}.$$

Dal momento che il secondo membro di questa uguaglianza è la componente lungo \hat{z} di un vettore, anche il primo membro definisce un vettore; perciò si pone per definizione:

$$(\text{rot } \vec{B}) \cdot \hat{z} \equiv \lim_{\Delta\mathcal{S} \rightarrow 0} \frac{\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}}{\Delta\mathcal{S}}, \quad (6.36)$$

dove $\text{rot } \vec{B}$ è un vettore che prende il nome di ‘rotore di \vec{B} ’.

Se si adotta un sistema di coordinate, il rotore può essere espresso mediante la derivate delle componenti di \vec{B} . Assumiamo per semplicità un sistema di assi cartesiani e prendiamo come curva γ un rettangolo di lati Δx , Δy , paralleli agli assi \hat{x} e \hat{y} . L’asse \hat{z} normale al piano di γ è orientato in modo che la terna risulti levogira (vedi figura sotto).



La circuitazione lungo il rettangolo si esprime come la somma dei contributi dei quattro lati contrassegnati dai numeri da 1 a 4:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \approx \vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 + \vec{B}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 + \vec{B}_3 \cdot d\vec{\ell}_3 + \vec{B}_4 \cdot d\vec{\ell}_4,$$

dove $\vec{B}_1, \dots, \vec{B}_4$ sono i valori di \vec{B} al centro dei segmenti $1, \dots, 4$. Ora il centro del segmento 1 ha coordinate $(x + \Delta x/2, y, z)$, quello del segmento 2 coordinate $(x, y + \Delta y/2, z)$, etc.; inoltre, osservando la figura si vede subito che

$$\vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 = B_{1y} \Delta y, \quad \vec{B}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 = -B_{2x} \Delta x, \quad \vec{B}_3 \cdot d\vec{\ell}_3 = -B_{3y} \Delta y, \quad \vec{B}_4 \cdot d\vec{\ell}_4 = B_{4x} \Delta x.$$

Pertanto si ha

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \approx [B_y(x + \Delta x/2, y, z) - B_y(x - \Delta x/2, y, z)] \Delta y \\ - [B_x(x, y + \Delta y/2, z) - B_x(x, y - \Delta y/2, z)] \Delta x.$$

Tenendo conto che $\Delta \mathcal{S} = \Delta x \Delta y$ e sostituendo nella definizione di rotore (6.36), nel limite $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ si ottiene infine

$$(\text{rot } \vec{B})_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}, \quad (6.37)$$

dove, ovviamente, le derivate sono calcolate nel punto P . Formule analoghe si ottengono facilmente per le componenti lungo \hat{x} e lungo \hat{y} permutando circolarmente gli indici x, y, z :

$$(\text{rot } \vec{B})_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad (\text{rot } \vec{B})_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}. \quad (6.37)$$

Osserviamo che tutta questa discussione sulla nozione di rotore ha un contenuto puramente analitico che non dipende in alcun modo da specifiche proprietà del vettore campo magnetico; per tenere chiara la distinzione tra matematica e fisica conviene esprimere le formule in termini di un generico vettore, diciamo \vec{A} , sulla cui natura non facciamo alcuna assunzione tranne quella della derivabilità. In termini di \vec{A} , una semplice regola mnemonica per le formule delle componenti cartesiane del rotore (senza sbagliare i segni!) è espressa dalla relazione simbolica

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} \quad (6.38)$$

dove ∂_x, ∂_y e ∂_z indicano le derivate parziali rispetto a x, y, z . Invito il lettore a verificare che sviluppando il determinante lungo gli elementi della prima riga si ottengono le (6.37). In termini del simbolo ∇ introdotto a pagina 33 la formula (6.38) equivale a scrivere

$$\text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A}.$$

Questa notazione viene spesso usata in letteratura ma non verrà adottata qui.

Nei sistemi di coordinate cilindrico e sferico, scegliendo opportunamente la curva γ si possono ottenere le espressioni del rotore con un procedimento analogo a quello esposto per il sistema cartesiano. Il dettaglio dei calcoli non è interessante; basterà riportare solo le formule.

Coordinate cilindriche (r, ϕ, z) :

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{A})_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \\ (\text{rot } \vec{A})_\phi &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ (\text{rot } \vec{A})_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (6.39)$$

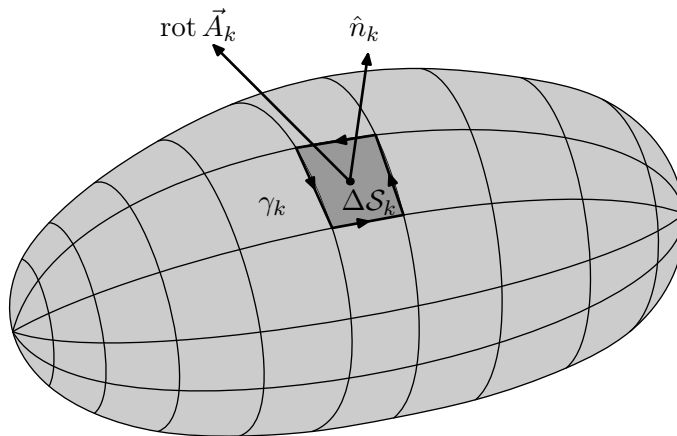
Coordinate sferiche (r, θ, ϕ) :

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{A})_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(A_\phi \sin \theta) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \\ (\text{rot } \vec{A})_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_\phi) \\ (\text{rot } \vec{A})_\phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (6.40)$$

Le espressioni del rotore nei vari sistemi di coordinate sono assai utili nei casi in cui occorra eseguire dei calcoli per la soluzione di problemi specifici e qualche esempio lo vedremo in seguito. Per lo sviluppo delle idee o per ricavare risultati generali è preferibile invece tenere presente la definizione intrinseca (6.36). Per vedere come si applica questa definizione dimostriamo che il rotore di un vettore è un vettore solenoideale. Ricordiamo che per definizione di flusso uscente da una superficie chiusa \mathcal{S}

$$\oint_{\mathcal{S}} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} \approx \sum_k \text{rot } \vec{A}_k \cdot \hat{n}_k \Delta \mathcal{S}_k,$$

dove la somma a secondo membro è estesa a un ‘ricoprimento’ della superficie con elementi piani come quello mostrato nella figura sotto.



Per la definizione di rotore (6.36) ciascun termine della somma è approssimato dalla circuitazione del campo lungo il bordo dell'elemento di

Esercizio: Il vettore velocità di un punto appartenente a un corpo rigido che ruota intorno a un asse è

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

dove \vec{r} è riferito a un'origine posta sull'asse di rotazione. Dimostrare che

$$\text{rot } \vec{v} = 2\vec{\omega},$$

usando sia coordinate cartesiane che cilindriche.

superficie

$$\text{rot } \vec{A}_k \cdot \hat{n}_k \Delta \mathcal{S}_k \approx \oint_{\gamma_k} \vec{A} \cdot d\vec{\ell},$$

e perciò

$$\oint_{\mathcal{S}} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{\mathcal{S}} \approx \sum_k \oint_{\gamma_k} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}.$$

Ora si osservi che ciascun segmento di γ_k separa due elementi di superficie adiacenti ed interviene quindi nella somma a secondo membro *due volte con versi di percorrenza opposti*. Pertanto la somma delle circuitazioni a secondo membro è nulla e nullo sarà il limite per un ricoprimento con elementi di dimensioni che tendono a zero

$$\oint_{\mathcal{S}} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{\mathcal{S}} = 0. \quad (6.41)$$

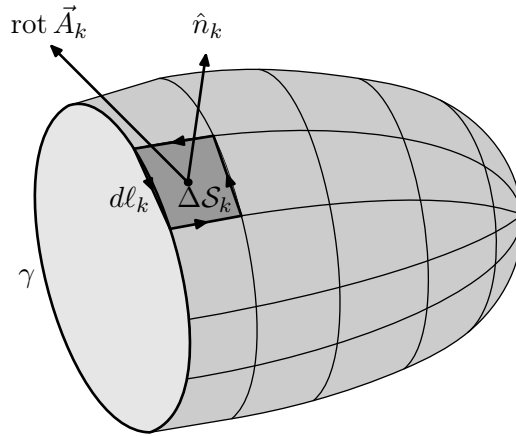
Conviene enfatizzare che nella dimostrazione non si è fatta alcuna ipotesi³ sulle proprietà del vettore \vec{A} e quindi la (6.41) è *un'identità geometrica*.

La solenoidalità del rotore implica, per il teorema della divergenza, l'identità

$$\text{div}(\text{rot } \vec{A}) \equiv 0, \quad (6.42)$$

che invito il lettore a verificare utilizzando l'espressione cartesiana degli operatori differenziali. Questa identità è molto utile e verrà ripetutamente utilizzata in seguito.

Consideriamo ora il flusso del rotore attraverso una superficie *aperta* \mathcal{S} di bordo γ .



Dalla figura è evidente che ora il contributo alla circuitazione dei segmenti come $d\ell_k$ che fanno parte di γ non è più compensato. La somma di questi contributi rappresenta appunto la circuitazione lungo il bordo di \mathcal{S} e si ha il seguente

³A patto, naturalmente, che il campo abbia una dipendenza dalla posizione sufficientemente regolare da garantire la convergenza dei processi di limite; per esempio si deve escludere che esistano discontinuità come quella prodotta da correnti di superficie.

Teorema di Stokes: Il flusso del rotore di un vettore \vec{A} attraverso una superficie aperta \mathcal{S} è pari alla circuitazione di \vec{A} lungo il bordo γ della superficie orientato secondo la convenzione levogira rispetto alla normale \hat{n} a \mathcal{S} :

$$\int_{\mathcal{S}} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}. \quad (6.43)$$

Tenendo presente la nozione di flusso di un vettore concatenato a una curva chiusa, questo teorema si può anche formulare al seguente modo:

La circuitazione di un vettore lungo una curva chiusa è uguale al flusso del rotore del vettore concatenato alla curva.

Un'ultima osservazione geometrica sulla definizione di rotore. Dalla (6.36) è evidente che il segno della componente di $\text{rot } \vec{A}$ secondo un versore \hat{z} è determinato dalla scelta della convenzione levogira e perciò un cambiamento di convenzione comporta un cambiamento del verso di $\text{rot } \vec{A}$: il rotore, come il campo magnetico, non è un vero vettore ma uno pseudo-vettore che cambia verso per riflessione. Le componenti del rotore si trasformano come quelle di un vettore per rotazione del sistema di coordinate ma per riflessione hanno il segno opposto a quello di un vero vettore. È interessante tuttavia notare che il rotore del campo magnetico \vec{B} è un vero vettore perché, per riflessione, vi è un doppio cambiamento di segno (uno per \vec{B} e uno per il rotore) che ripristina il segno corretto.

Possiamo ora ottenere l'espressione locale della legge di Ampère per le correnti di volume. Per una curva piana come quella della figura 6.9 la legge di circuitazione del campo magnetico fornisce

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \approx \frac{4\pi}{c} \vec{J} \cdot \hat{z} \Delta \mathcal{S}.$$

Dalla definizione di rotore abbiamo allora

$$\text{rot } \vec{B} \cdot \hat{z} \approx \frac{4\pi}{c} \vec{J} \cdot \hat{z}.$$

L'uguaglianza diventa esatta nel limite in cui la curva si stringe intorno al punto P ; inoltre, dato che il versore \hat{z} è arbitrario, l'uguaglianza delle componenti implica l'uguaglianza dei vettori:

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \quad (6.44) \quad \text{FORMA LOCALE DELLA LEGGE DI AMPÈRE}$$

Questa espressione locale della legge di Ampère è di grande utilità in magnetostatica come si vedrà nei paragrafi seguenti.

È interessante notare che il campo elettrostatico, come del resto qualsiasi campo irrotazionale, ha rotore nullo

$$\text{rot } \vec{E} = 0.$$

Nel secondo capitolo abbiamo visto come un campo statico e irrotazionale, cioè conservativo, può essere espresso come il gradiente di una funzione potenziale

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

e viceversa, un campo vettoriale esprimibile come il gradiente di una funzione potenziale è conservativo. Ciò implica che vale l'identità

$$\text{rot}(\text{grad } \varphi) \equiv 0. \quad (6.45)$$

Il lettore può compiere un utile esercizio verificando la validità di questa formula sia attraverso le espressioni cartesiane che sferiche e cilindriche degli operatori gradiente e rotore.

Una implicazione immediata della (6.45) è che per il campo magnetico, che non è irrotazionale, non è possibile definire una funzione potenziale.

6.6 La prima formula di Laplace

Fino a questo momento non è stata ancora data per il campo magnetico una legge equivalente alla legge di Coulomb; cioè, non abbiamo ancora una formula che consenta di calcolare il campo magnetico prodotto da un elemento di corrente infinitesimo, assimilabile a una sorgente puntiforme. Il motivo è che una corrente stazionaria è sempre un *intero* circuito e perciò non è possibile eseguire un esperimento per misurare il campo prodotto da un solo elemento di corrente. In linea di principio, una legge del genere non è neanche indispensabile perché le leggi locali consentono di impostare il problema della determinazione del campo magnetico, prodotto da una distribuzione assegnata di correnti stazionarie, come la ricerca della soluzione di un sistema di equazioni differenziali, con condizioni al contorno, del tutto simile al problema di Dirichlet discusso in elettrostatica. Tuttavia è assai utile disporre di una formula di tipo coulombiano e questa può essere trovata risolvendo 'una volta per tutte' il problema della magnetostatica con correnti note:

$$\begin{cases} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \end{cases} \quad (6.46)$$

Assumendo, per il momento, che non vi siano correnti di superficie o filiformi, questo sistema di equazioni deve essere soddisfatto dal vettore incognito \vec{B} in tutti i punti dello spazio. In più, se la distribuzione di correnti \vec{J} è limitata nello spazio, abbiamo la condizione al contorno che il campo deve tendere a zero nei punti all'infinito. In queste ipotesi non è difficile trovare una soluzione generale del sistema (6.46). Procediamo in modo euristico, supponendo che esista un vettore \vec{A} tale che

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (6.47)$$

Questa posizione è suggerita dalla identità (6.42) la quale garantisce che la prima delle equazioni del sistema (6.46) è automaticamente soddisfatta. Il vettore \vec{A} svolge un ruolo analogo a quello della funzione potenziale φ del campo elettrostatico (che qui non è possibile introdurre perché \vec{B} non è conservativo) e per questo motivo viene chiamato ‘*potenziale vettore*’. Analogamente a φ , il potenziale vettore non è determinato in maniera univoca; infatti, in virtù della (6.45), indicando con ψ una funzione scalare qualsiasi (ovviamente continua e derivabile quanto necessario), si ha

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \psi, \quad \implies \quad \text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A}. \quad (6.48)$$

Perciò, se \vec{A} è un potenziale vettore di \vec{B} anche \vec{A}' lo è. La famiglia dei potenziali vettore è molto grande: due diversi potenziali \vec{A} e \vec{A}' differiscono per un campo conservativo. La trasformazione (6.48) viene chiamata trasformazione di ‘*gauge*’ e la scelta di uno dei potenziali della famiglia si chiama scelta di gauge.

Dalla seconda delle (6.46), per il potenziale vettore si ricava l’equazione vettoriale

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}, \quad (6.49)$$

che equivale a tre equazioni scalari per le tre componenti di \vec{A} . Utilizzando l’espressione cartesiana del rotore, si verifica con calcoli elementari l’identità

$$\left[\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) \right]_z \equiv \frac{\partial}{\partial z}(\text{div } \vec{A}) - \nabla^2 A_z, \quad (6.50)$$

per cui, la componente lungo \hat{z} della (6.49) si scrive

$$\frac{\partial}{\partial z}(\text{div } \vec{A}) - \nabla^2 A_z = \frac{4\pi}{c} J_z.$$

Ora, la libertà nella scelta di gauge consente di *fixare a piacere* la divergenza del potenziale vettore, di modo che in questa equazione l’unica incognita che resta è A_z .

Prova. Ovviamente, basta dimostrare che si può fissare a piacere la differenza tra le divergenze di due potenziali; ora, dalla (6.48) si ha subito

$$\text{div } \vec{A}' - \text{div } \vec{A} = \nabla^2 \psi.$$

Se il primo membro è assegnato, questa è un’equazione di Poisson per la funzione ψ , che, come abbiamo visto nel Capitolo 2 ammette infinite soluzioni che differiscono per una funzione armonica. Perciò, anche imponendo il valore della divergenza resta ancora un’ampia indeterminazione sul potenziale vettore. ■

Esercizio: Trovare un potenziale vettore del campo di Biot-Savart tale che

$$\text{div } \vec{A} = \frac{2I}{ca},$$

dove a è una lunghezza arbitraria.

La scelta usuale in magnetostatica è di porre

$$\text{div } \vec{A} = 0,$$

Esercizio: Verificare che un potenziale vettore del campo di Biot-Savart è

$$\vec{A} = -\hat{z} \frac{2I}{c} \ln r.$$

che viene chiamata ‘gauge di Coulomb’, per un motivo che apparirà chiaro poco più avanti. Con ciò l’equazione da risolvere diventa

$$\nabla^2 A_z = -\frac{4\pi}{c} J_z. \quad (6.51)$$

Confrontando con la (2.25) vediamo che A_z soddisfa la stessa equazione del potenziale elettrostatico di una distribuzione di carica $\rho = J_z/c$. Con la condizione al contorno che A_z si annulla all’infinito, la soluzione (6.51) è fornita dalla (2.17)

$$A_z(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{J_z(\vec{r}')/c}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu,$$

dove \mathcal{V} è la regione (limitata) in cui circola la corrente e \vec{r} , \vec{r}' indicano, come d’uso, il punto campo e il punto sorgente.

Dal momento che la direzione di \hat{z} è arbitraria si può immediatamente⁴ asserire che la soluzione dell’equazione vettoriale (6.49) è

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\nu. \quad (6.52)$$

Questa formula si estende immediatamente a correnti di superficie e di linea:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_S \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS, \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \oint_C \frac{d\vec{\ell}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Per ottenere il campo magnetico occorre ora calcolare il rotore dell’integrale a secondo membro. Osserviamo che il rotore comporta derivate rispetto al punto campo \vec{r} mentre l’integrazione è sulla variabile sorgente \vec{r}' . Si può quindi invertire l’ordine di integrazione e derivazione:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{c} \int_{\mathcal{V}} \text{rot} \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d\nu.$$

Ora, se f è una funzione scalare e \vec{A} una funzione vettoriale, è semplice dimostrare, usando per esempio l’espressione cartesiana del rotore, la seguente identità

$$\text{rot} (f \vec{A}) \equiv f \text{rot } \vec{A} + (\text{grad } f) \times \vec{A}. \quad (6.53)$$

che, con $f = 1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ e $\vec{A} = \vec{J}$, fornisce

$$\text{rot} \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{rot } \vec{J} + \text{grad} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{J}.$$

⁴In effetti occorrerebbe verificare che il vettore \vec{A} dato dalla (6.52) è solenoidale. Per non eccedere con la matematica ometto la prova, ma è importante puntualizzare che la condizione è verificata *solo* per correnti stazionarie.

Dal momento che la corrente dipende da \vec{r}' ma non dal punto campo \vec{r} , il rotore di \vec{J} nel primo termine a secondo membro è nullo, mentre per il secondo termine si ha ovviamente

$$\text{grad} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Sostituendo nell'integrale si ottiene in definitiva

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\nu, \quad (6.54) \quad \text{PRIMA FORMULA DI LAPLACE}$$

la soluzione del sistema (6.46) che prende il nome di '*Prima formula di Laplace*'. Questa formula svolge per il campo magnetico statico un ruolo del tutto analogo a quello della legge di Coulomb per il campo elettrostatico e, nonostante l'aspetto più complicato, presenta significative analogie con quest'ultima. Il campo magnetico in un punto qualsiasi dello spazio è espresso come una somma di termini, generati da singoli elementi infinitesimi 'puntiformi' $\vec{J}d\nu$, ciascuno dei quali dà un contributo

$$d\vec{B} = \frac{1}{c} \frac{(\vec{J}d\nu) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

al campo totale. In modulo, ciascuno di questi contributi cala con l'inverso del quadrato della distanza, ed è proporzionale alla carica $Jd\nu/c$ esattamente come il campo elettrostatico. La differenza sta tutta nel fatto che $d\vec{B}$ non è radiale ma è perpendicolare sia a \vec{J} che a $\vec{r} - \vec{r}'$.

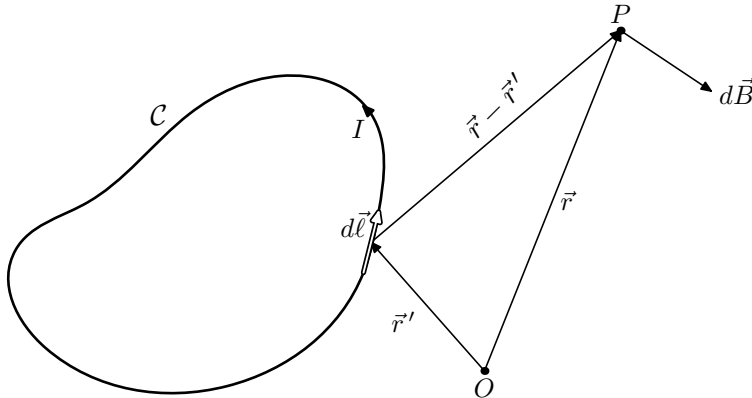
Di particolare utilità per le applicazioni pratiche è la versione della prima formula di Laplace per il caso di correnti nei conduttori filiformi. La suddivisione del volume del conduttore in elementi infinitesimi si ottiene sezionando il filo in cilindretti infinitesimi di lunghezza $d\ell$; ricordando la (5.10)

$$\vec{J}d\nu = I d\vec{\ell},$$

e tenendo presente che, in condizioni stazionarie, I è uniforme lungo il filo, si ha

$$\vec{B} = \frac{I}{c} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (6.55)$$

dove \mathcal{C} è la curva chiusa a cui si riduce \mathcal{V} quando si trascura la sezione.



Gli elementi geometrici del calcolo sono illustrati nella figura sopra con il segmento generico di filo $d\vec{\ell}$ evidenziato come una freccia. Il contributo al campo magnetico in P di questo elemento ha l'espressione

$$d\vec{B} = \frac{I}{c} \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Conviene comunque sottolineare che questa *formula* è valida esclusivamente quando esiste anche tutto il resto del circuito; la *legge* fisica corretta è un'altra ed è ben più complessa (Vedi nota a pag 124). Fortuna vuole che i termini più complicati si sommano a zero quando si integra su tutti gli elementi di una distribuzione stazionaria.

Vediamo un'applicazione semplice della prima formula di Laplace. Una spira circolare di raggio a è percorsa da una corrente I . Vogliamo calcolare il campo magnetico sull'asse[†] della spira, vale a dire nei punti della retta passante per il centro della circonferenza e perpendicolare al piano che la contiene. Semplifichiamo la notazione nella (6.55) indicando con \vec{r} il vettore che va dall'elemento generico $d\vec{\ell}$ della spira, al punto campo

$$\vec{B} = \frac{I}{c} \oint_C \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Nella figura accanto sono mostrati gli elementi geometrici del calcolo. Osserviamo in primo luogo che \vec{B} deve avere necessariamente la direzione dell'asse \hat{z} ; infatti, la corrente è invariante per rotazione intorno a \hat{z} mentre una eventuale componente del campo in direzione perpendicolare all'asse non lo sarebbe. Perciò è sufficiente determinare solo la componente di \vec{B} lungo \hat{z}

$$B_z = \frac{I}{c} \oint_C \frac{(d\vec{\ell} \times \vec{r})_z}{r^3} = \frac{I}{c} \oint_C \frac{dl}{r^2} \cos \theta.$$

Dal momento che sia θ che r hanno lo stesso valore per tutti gli elementi della spira, il calcolo dell'integrale è immediato:

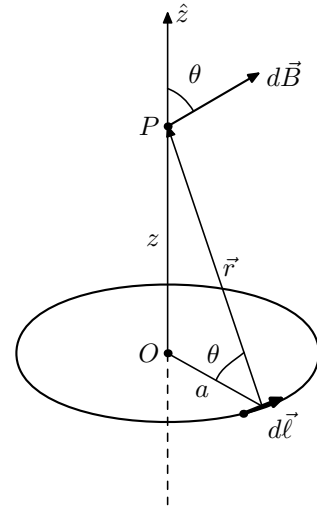
$$B_z = \frac{I \cos \theta}{c} \frac{1}{r^2} \oint_C dl = \frac{2\pi a I \cos \theta}{c} \frac{1}{r^2}.$$

Mediante considerazioni geometriche elementari si esprimono $\cos \theta$ e r in termini dell'ascissa z del punto campo e si ottiene infine

$$B_z = \frac{2\pi a^2 I}{c} \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (6.56)$$

Il campo ha il valore massimo al centro della spira $z = 0$ e decresce in maniera monotona al crescere della distanza dal centro. L'andamento

[†] Evitiamo il calcolo in un punto generico dello spazio perché richiede l'uso di funzioni di Bessel.



per i grandi valori di $|z|$ si ottiene facilmente dal termine all'ordine zero dello sviluppo della radice in serie di potenze del rapporto $a/|z|$

$$B_z \simeq \frac{2\pi a^2 I}{c} \frac{1}{|z|^3} = 2 \frac{\pi a^2 I/c}{|z|^3}. \quad (6.57)$$

Dal confronto con la (3.31) risulta evidente la somiglianza con il campo elettrico di un dipolo. Questa analogia verrà discussa più ampiamente nel prossimo paragrafo. Per il momento osserviamo che il 'momento di dipolo' della spira o *momento magnetico* vale

$$m = \frac{1}{c} \pi a^2 I = \frac{1}{c} \mathcal{S} I, \quad (6.58)$$

indicando con \mathcal{S} l'area della porzione di piano delimitata dalla spira.

L'andamento qualitativo del campo della spira circolare in tutto lo spazio è rappresentato nella figura 6.10 mediante le linee di flusso.

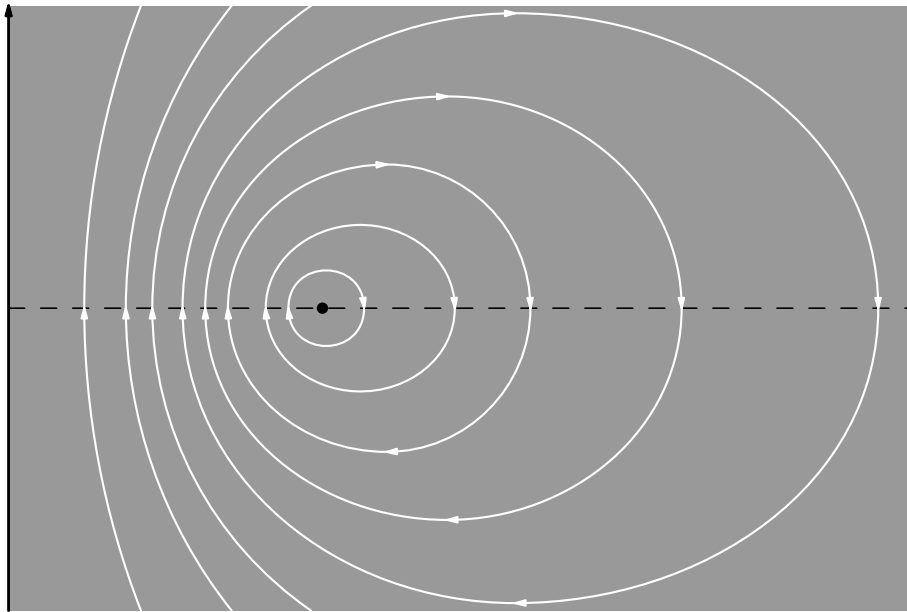


Figura 6.10: Campo di una spira circolare nel semipiano meridiano.

Per la simmetria rispetto all'asse \hat{z} , la direzione del campo, in qualsiasi punto dello spazio, è contenuta nel semipiano meridiano passante per quel punto; di conseguenza ogni linea di flusso è interamente contenuta in un semipiano. Nella figura, il cerchietto nero rappresenta il punto di intersezione della spira con il semipiano (si suppone la corrente entrante nella pagina), la linea tratteggiata l'intersezione con il piano della spira (il piano equatoriale), le linee bianche sono le linee di flusso. Le linee sono chiuse e simmetriche rispetto al piano equatoriale. Nelle immediate vicinanze della spira la forma è praticamente circolare perché il campo si approssima al campo di Biot-Savart, mentre, allontanandosi dalla spira, la forma diventa sempre più schiacciata. Nel piano equatoriale il campo

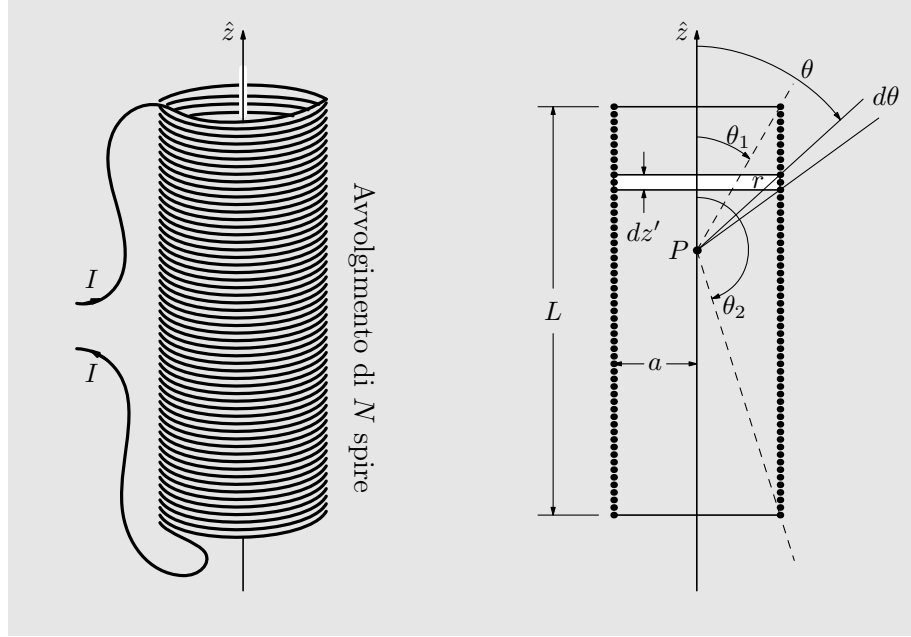


Figura 6.11: Campo magnetico sull'asse di un solenoide

è parallelo a \hat{z} , con verso concorde all'interno della spira, verso opposto nei punti esterni alla spira.

Un importante dispositivo per la produzione di campi magnetici intensi è il *solenoid*, un avvolgimento a spirale molto stretto di filo conduttore su una superficie cilindrica, come mostrato nella figura 6.11. Il campo sull'asse del solenoide può essere calcolato sommando i campi della forma (6.56) per ciascuna spira dell'avvolgimento. Il calcolo viene molto semplificato assumendo che l'avvolgimento sia abbastanza compatto da poter asserire che il numero di spire contenuto in una striscia cilindrica, disegnata in bianco nella parte destra in figura 6.11, sia proporzionale all'altezza dz' . Se la lunghezza totale del solenoide è L e il numero totale di spire è N , il numero di spire nella striscia è

$$dN = \frac{N}{L} dz' = n dz',$$

definendo

$$n \equiv \frac{N}{L},$$

la densità in numero delle spire; ciò equivale ad approssimare la distribuzione reale di corrente, con una distribuzione di superficie che scorre lungo i paralleli della superficie laterale del cilindro di raggio a , avente densità

$$\mathcal{J} = nI.$$

La corrente che circola nella striscia di altezza dz' sarà quindi

$$dI = I dN = nI dz' = \mathcal{J} dz'.$$

Il campo prodotto da questa striscia in un punto generico P dell'asse \hat{z} , per la (6.56), è dato da

$$dB_z = \frac{2\pi a^2 dI}{c} \frac{1}{r^3} = \frac{2\pi n I a^2}{c} \frac{dz'}{r^3},$$

dove r indica la distanza di un punto qualsiasi della striscia da P . Per individuare la posizione della generica striscia sorgente, conviene assumere come variabile, invece della quota z' , l'angolo θ tra il segmento r e l'asse del cilindro, come mostrato in figura. Mediante considerazioni geometriche elementari, si trova facilmente che

$$r = \frac{a}{\sin \theta}, \quad dz' = \frac{r d\theta}{\sin \theta} = \frac{a d\theta}{\sin^2 \theta},$$

e quindi

$$dB_z = \frac{2\pi n I}{c} \sin \theta d\theta.$$

Indicando con θ_1 e θ_2 gli angoli che competono, rispettivamente all'orlo superiore e inferiore del solenoide (vedi figura) si ha infine

$$B_z = \frac{2\pi n I}{c} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{2\pi n I}{c} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2). \quad (6.59)$$

Si noti che gli angoli θ_1 e θ_2 dipendono dalla scelta del punto P ; indicando con z la quota di P poniamo

$$f(z) = \frac{\cos \theta_1 - \cos \theta_2}{2},$$

e scriviamo quindi l'espressione (6.59) del campo nella forma

$$B_z(z) = \frac{4\pi n I}{c} f(z).$$

Il lettore può, senza difficoltà, verificare che il fattore $f(z)$ è positivo ed assume il valore massimo al centro del solenoide (che scegliamo come origine) dove vale

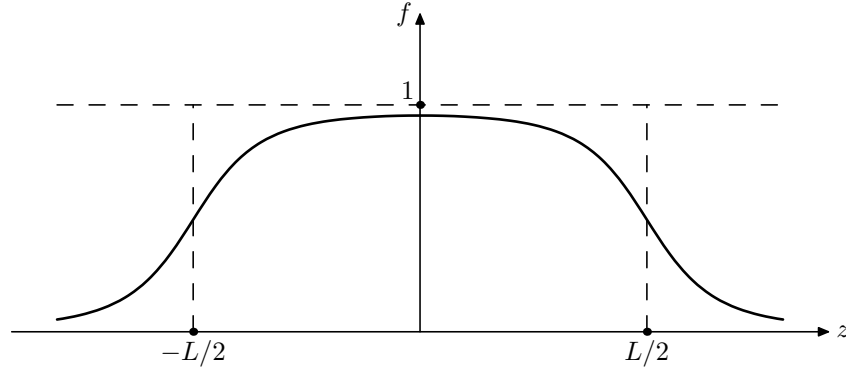
$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2a/L)^2}}.$$

Per un solenoide 'lungo' ($L \gg a$) il massimo di f differisce poco dall'unità: il campo vale all'incirca

$$B_z \approx \frac{4\pi n I}{c} = \frac{4\pi \mathcal{J}}{c}. \quad (6.60)$$

Inoltre, per un solenoide lungo, la funzione $f(z)$ ha un andamento praticamente piatto intorno al punto di massimo il che implica che in quasi tutto il solenoide il campo ha il valore (6.60). La cosa viene illustrata dalla figura sotto dove è disegnato il grafico del fattore f per il caso $L/2a = 10$.

Esercizio: Trovare l'espressione di $\cos \theta_1$ e $\cos \theta_2$ in termini di z scegliendo come origine il centro del solenoide.



Il solenoide lungo presenta un'analogia con il condensatore piano: se si trascurano gli 'effetti di bordo' il campo magnetico è uniforme all'interno del cilindro, con un valore dato dalla (6.60), e nullo all'esterno.

È interessante esaminare quali sono i valori massimi del campo magnetico che possono essere ottenuti con un solenoide del tipo descritto sopra. Osservando la (6.60) si vede che è necessaria una densità di corrente $\mathcal{J} = nI$ elevata. Uno dei problemi che si presentano nella realizzazione di magneti ad alto campo è la grande dissipazione di energia per effetto Joule; questo inconveniente viene attualmente superato con l'adozione di materiali superconduttori per i quali l'effetto Joule è assente. Il limite è dato invece dall'entità degli sforzi meccanici negli avvolgimenti che conducono la corrente. La forza agente su un elemento di corrente di superficie di area dS , sulla base di un ragionamento identico a quello svolto per le cariche di superficie, è data da

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} (\vec{\mathcal{J}} dS) \times \frac{\vec{B}_1 + \vec{B}_2}{2},$$

dove \vec{B}_1 e \vec{B}_2 sono i campi dalle due parti della superficie, come nella (6.33). Nel caso del solenoide, \vec{B}_2 è nullo mentre \vec{B}_1 è perpendicolare a $\vec{\mathcal{J}}$ e parallelo alla superficie. Tenendo conto della (6.60) si ha quindi che la forza è perpendicolare alla superficie e vale in modulo

$$dF = \frac{B^2}{8\pi} dS,$$

che equivale alla forza esercitata da un fluido avente pressione

$$p = \frac{B^2}{8\pi}.$$

Per un campo di $100 \text{ kG} = 10^5 \text{ G}$, la pressione magnetica sugli avvolgimenti vale

$$p = \frac{10^{10}}{8\pi} \text{ dyne/cm}^2 = \frac{10^9}{8\pi} \text{ Pa} \approx 4 \times 10^7 \text{ Pa},$$

che è all'incirca la pressione idrostatica nel mare alla profondità di 4000 m. Anche con una progettazione accurata del magnete, la tecnologia attuale non permette di produrre campi statici superiori a poche centinaia di kG.

Capitolo 7

Campo magnetico nella materia

La presenza di cariche in moto negli atomi e nelle molecole implica l'esistenza di distribuzioni di correnti microscopiche che possono dare luogo a un campo magnetico macroscopico. Per studiare i campi prodotti da queste correnti microscopiche si segue un procedimento analogo a quello adottato nel capitolo 3 per il campo elettrico prodotto dalle distribuzioni atomiche di carica elettrica: dal momento che il campo macroscopico è definito su una scala di lunghezze molto più grande delle dimensioni degli atomi, cerchiamo un'approssimazione della prima formula di Laplace valida a grande distanza dalla distribuzione di corrente. Anche in questo caso basta un solo parametro globale, il '*momento magnetico*', a caratterizzare la distribuzione di corrente delle molecole e il campo magnetico da essa prodotto.

7.1 Il momento magnetico

Assumiamo una distribuzione di corrente $\vec{J}(\vec{r}')$ che circola in una regione limitata dello spazio. Come al solito indichiamo con \vec{r} il vettore posizione del punto campo (vedi figura 7.1); l'ipotesi di punto a grande distanza implica che, scegliendo l'origine in prossimità della distribuzione di corrente, risulta

$$r' \ll r.$$

Allora, possiamo applicare la formula ricavata nel § 3.3.1

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3}.$$

Sostituendo nella espressione (6.52) del potenziale vettore si ha

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{J} dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{c} \int_V \vec{J} dV + \frac{1}{cr^3} \int_V (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{J} dV. \quad (7.1)$$

Questa formula è analoga allo sviluppo (3.24) del potenziale scalare, ma qui il termine di monopolo è sicuramente nullo per la proprietà

(5.18) delle correnti stazionarie e perciò il termine dominante è quello del prim'ordine

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{1}{cr^3} \int_V (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') dV. \quad (7.2)$$

L'integrale a secondo membro può essere espresso mediante un parametro globale della distribuzione di corrente, analogo al momento di dipolo di una distribuzione di carica. Però qui la situazione è più complicata perché il vettore \vec{r} che compare nel prodotto scalare $(\vec{r} \cdot \vec{r}')$, non può essere messo in evidenza e portato fuori dell'integrale; la (7.2) non si presenta come il prodotto di un fattore dipendente solo dal punto campo, per uno dipendente solo dalla sorgente. Per ottenere la fattorizzazione, consideriamo dapprima il caso di un circuito filiforme \mathcal{C} percorso da una corrente I , per il quale l'approssimazione a grande distanza (7.2) si scrive

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{I}{cr^3} \oint_{\mathcal{C}} (\vec{r} \cdot \vec{r}') d\vec{\ell}. \quad (7.3)$$

Consideriamo una superficie \mathcal{S} orlata da \mathcal{C} e un ricoprimento di questa superficie con elementi infinitesimi rettangolari, come mostrato in figura 7.1. Indicando con \mathcal{C}_k il bordo del k -esimo elemento, percorso in verso concorde con quello di \mathcal{C} , si ha

$$\oint_{\mathcal{C}} (\vec{r} \cdot \vec{r}') d\vec{\ell} = \sum_k \oint_{\mathcal{C}_k} (\vec{r} \cdot \vec{r}') d\vec{\ell}. \quad (7.4)$$

Infatti, negli integrali a secondo membro, ciascun lato che separa due rettangoli adiacenti interviene due volte con versi opposti per cui i soli contributi che non si cancellano sono quelli che appartengono a \mathcal{C} . Per un circuito rettangolare infinitesimo, l'integrale può essere calcolato esplicitamente; con riferimento alla figura 7.2, numerando i lati del rettangolo da 1 a 4 possiamo scrivere

$$\oint_{\mathcal{C}_k} (\vec{r} \cdot \vec{r}') d\vec{\ell} = (\vec{r} \cdot \vec{r}_1) \Delta \vec{\ell}_1 + (\vec{r} \cdot \vec{r}_2) \Delta \vec{\ell}_2 + (\vec{r} \cdot \vec{r}_3) \Delta \vec{\ell}_3 + (\vec{r} \cdot \vec{r}_4) \Delta \vec{\ell}_4. \quad (7.5)$$

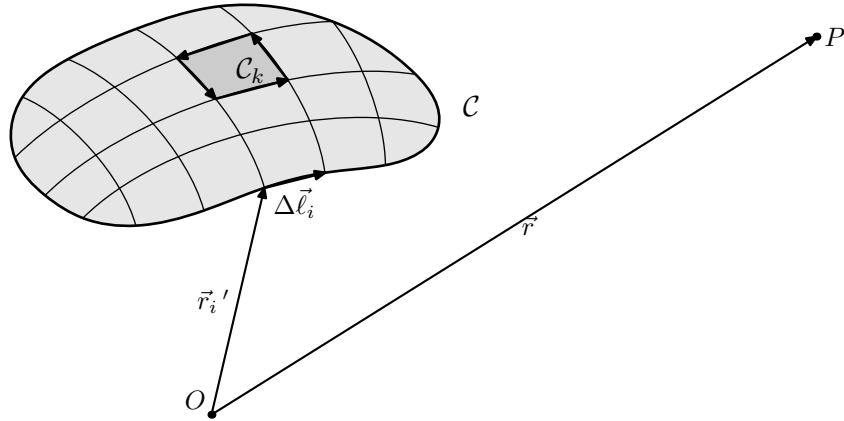


Figura 7.1: Decomposizione di una spira in circuiti rettangolari

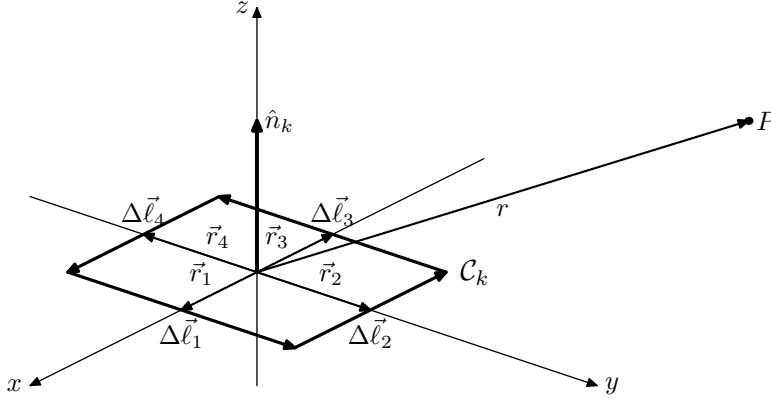


Figura 7.2: Circuitazione su una spira rettangolare.

Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane con origine nel centro del rettangolo[†] e assi x, y paralleli ai lati; l'asse z è orientato concorde-
mente alla normale \hat{n}_k che rispetta la convenzione levogira come indicato
nella figura 7.2. Le componenti di \vec{r} sono (x, y, z) e, indicando con Δx ,
 Δy le lunghezze dei lati del rettangolo, le componenti di $\vec{r}_1 \dots \vec{r}_4$ sono

[†]Si osservi che, al primo ordi-
ne in r'/r , questo cambiamen-
to di origine non altera \vec{r} ; in
altre parole \vec{r} non dipende da
 k .

$$\vec{r}_1 = (\Delta x/2, 0, 0), \dots, \vec{r}_4 = (0, -\Delta y/2, 0);$$

da quì, utilizzando la formula cartesiana del prodotto scalare si trova

$$\vec{r} \cdot \vec{r}_1 = x(\Delta x/2), \quad \vec{r} \cdot \vec{r}_2 = y(\Delta y/2), \quad \vec{r} \cdot \vec{r}_3 = -x(\Delta x/2), \quad \vec{r} \cdot \vec{r}_4 = -y(\Delta y/2).$$

Inoltre, sempre osservando la figura si ha subito

$$\Delta \vec{\ell}_1 = (\Delta y)\hat{y}, \quad \Delta \vec{\ell}_2 = -(\Delta x)\hat{x}, \quad \Delta \vec{\ell}_3 = -(\Delta y)\hat{y}, \quad \Delta \vec{\ell}_4 = (\Delta x)\hat{x}.$$

Sostituendo nella (7.5) ed eseguendo le opportune semplificazioni risulta

$$\oint_{C_k} (\vec{r} \cdot \vec{r}') d\vec{\ell} = \Delta S_k (x\hat{y} - y\hat{x}) = \Delta S_k (\hat{n}_k \times \vec{r}) = (\Delta S_k \hat{n}_k) \times \vec{r}, \quad (7.6)$$

dove $\Delta S_k = \Delta x \Delta y$ è l'area del rettangolo. Questa espressione è fatto-
rizzata, e sostituita nella (7.4) fornisce la fattorizzazione per una curva
generica

$$\oint_C (\vec{r} \cdot \vec{r}') d\vec{\ell} = \sum_k (\Delta S_k \hat{n}_k) \times \vec{r} = \left(\sum_k \Delta S_k \hat{n}_k \right) \times \vec{r}. \quad (7.7)$$

Allora, il potenziale vettore a grande distanza da un circuito filiforme
qualsiasi si può esprimere

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2} \quad (7.8)$$

con il *momento magnetico* del circuito, definito da

$$\vec{m} \equiv \frac{I}{c} \sum_k \Delta S_k \hat{n}_k, \quad (7.9)$$

dove la somma è estesa ai rettangoli infinitesimi che ricoprono una qualsiasi superficie orlata da \mathcal{C} .

Si noti che le dimensioni del momento magnetico sono le stesse di quelle del momento di dipolo elettrico, un pregio del sistema gaussiano non condiviso dal Sistema Internazionale. La definizione è anche in accordo con la posizione (6.58) introdotta nel capitolo precedente per la spira circolare.

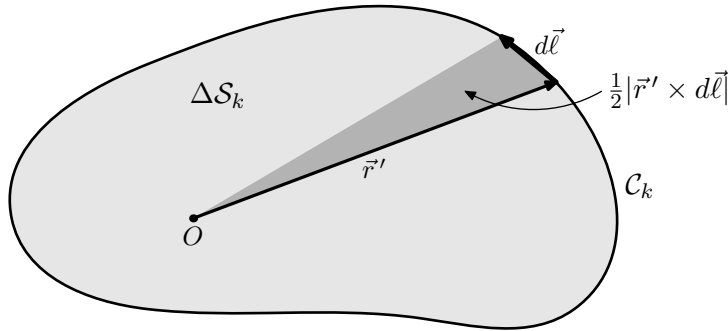
Per una spira piana, di forma generica si può prendere come superficie orlata la porzione di piano interna alla curva \mathcal{C} ; allora la normale \hat{n}_k nella somma (7.9) è la stessa per tutti gli elementi di superficie, e il momento magnetico si scrive semplicemente

$$\vec{m} = \frac{IS}{c} \hat{n}, \quad (7.10)$$

dove S è l'area della regione delimitata da \mathcal{C} , e \hat{n} è la normale al piano. Questa semplice formula è molto comoda nelle applicazioni pratiche dove spesso la corrente circola in spire piane. In più, la (7.10) può essere scritta in una forma che consente la generalizzazione a qualsiasi distribuzione di corrente. Infatti, vale l'identità

$$S\hat{n} \equiv \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} \vec{r}' \times d\vec{\ell}. \quad (7.11)$$

Se l'origine da cui viene misurato \vec{r}' appartiene alla regione delimitata da \mathcal{C} , l'eguaglianza risulta ovvia dalla osservazione della figura sotto e dalla definizione di prodotto vettore.



Inoltre, si vede subito che l'integrale a secondo membro della (7.11) non dipende dalla scelta dell'origine; infatti, se indichiamo con \vec{r}'_1 il vettore posizione riferito a un'origine O_1 separata da O di \vec{R} , risulta

$$\vec{r}' = \vec{R} + \vec{r}'_1,$$

e quindi

$$\oint_C \vec{r}' \times d\vec{\ell} = \oint_C \vec{R} \times d\vec{\ell} + \oint_C \vec{r}'_1 \times d\vec{\ell}.$$

Il primo integrale a secondo membro è nullo; infatti

$$\oint_C \vec{R} \times d\vec{\ell} = \vec{R} \times \oint_C d\vec{\ell} = 0,$$

perché C è una curva chiusa. Con ciò resta stabilita la validità della (7.11). Sostituendo ora nella (7.9) si ottiene

$$\vec{m} = \frac{I}{2c} \sum_k \oint_{C_k} \vec{r}' \times d\vec{\ell}.$$

Tenendo presente che i contributi alla circuitazione dei segmenti che non fanno parte del bordo C si elidono a due a due, otteniamo infine la definizione generale di momento magnetico di una spira qualsiasi (non contenuta in un piano)

$$\vec{m} \equiv \frac{I}{2c} \oint_C \vec{r}' \times d\vec{\ell}, \quad (7.12)$$

che, a vista, è un parametro intrinseco dipendente solo da C . Questa formula si estende anche facilmente a una distribuzione di corrente di volume. Nel paragrafo 5.3 abbiamo visto che la regione \mathcal{V} dove è presente una distribuzione stazionaria di corrente può essere suddivisa in tubi di flusso per ciascuno dei quali si applica la (7.12); tenendo presente che per un elemento di tubo di flusso $I d\vec{\ell} = \vec{J} d\mathcal{V}$ si ha subito

$$\vec{m} \equiv \frac{1}{2c} \int_{\mathcal{V}} \vec{r}' \times \vec{J} d\mathcal{V}. \quad (7.13)$$

D'ora in avanti il termine '*magnete*' designerà una qualsiasi distribuzione di corrente stazionaria, che può essere caratterizzata esclusivamente attraverso il suo momento magnetico.

Una volta noto il momento di un magnete la (7.8) consente di calcolare subito il campo magnetico. Adottiamo un sistema di coordinate sferiche (r, θ, ϕ) con origine nel 'dipolo' e asse orientato come \vec{m} . La sola componente non nulla del potenziale vettore è

$$A_\phi = \frac{m \sin \theta}{r^2}.$$

Allora, usando l'espressione (6.40) del rotore si ha subito

$$\begin{aligned} B_r &= \left(\text{rot } \vec{A} \right)_r = \frac{2m \cos \theta}{r^3}, \\ B_\theta &= \left(\text{rot } \vec{A} \right)_\theta = \frac{m \sin \theta}{r^3}, \\ B_\phi &= \left(\text{rot } \vec{A} \right)_\phi = 0. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Esercizio: 1) Una carica q è distribuita uniformemente in una sfera di raggio a che ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$. Calcolare il momento magnetico.

Risposta: $\vec{m} = \frac{1}{5}(qa^2/c)\vec{\omega}$.

Esercizio: Determinare la legge di variazione con la latitudine dell'inclinazione del campo magnetico terrestre illustrata dalla Terrella di Gilbert. Sapendo che il campo sulla superficie della terra è circa 0.5 gauss stimare il momento magnetico della Terra.

Confrontando con le (3.31) si vede che la geometria di questo campo magnetico è identica a quella del campo elettrico di un dipolo; la sola differenza è la sostituzione del momento magnetico m al momento di dipolo p . Questo campo di dipolo si presenta molto spesso nello studio del magnetismo; esempi sono: il campo magnetico della Terra, il campo di un ago magnetico, i campi degli atomi e delle molecole alla scala macroscopica, i campi dei costituenti elementari della materia, elettrone, protone e neutrone.

Il momento magnetico è anche il parametro che determina le azioni meccaniche di un campo magnetico esterno su una distribuzione di correnti, nel caso di un campo che varia 'lentamente' nella regione \mathcal{V} occupata dalla corrente. Assumendo campo esattamente uniforme abbiamo visto che la forza totale è nulla ma non altrettanto si può dire per il momento meccanico $\vec{\mathcal{M}}$ del sistema di forze. Consideriamo, per semplicità una singola spira \mathcal{C} percorsa da una corrente I ; dalla seconda formula di Laplace e dalla definizione di momento meccanico di un sistema di forze abbiamo

$$\vec{\mathcal{M}} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{r}' \times d\vec{\mathcal{F}} = \frac{I}{c} \oint_{\mathcal{C}} \vec{r}' \times (d\vec{\ell} \times \vec{B}), \quad (7.15)$$

dove \vec{r}' è il vettore posizione dell'elemento $d\vec{\ell}$ riferito a un'origine qualsiasi[†]. Utilizzando l'identità vettoriale elementare[†]

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \equiv (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}, \quad (7.16)$$

e assumendo \vec{B} uniforme, l'integrale si può scrivere

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{r}' \times (d\vec{\ell} \times \vec{B}) = \oint_{\mathcal{C}} (\vec{r}' \cdot \vec{B}) d\vec{\ell} - \vec{B} \oint_{\mathcal{C}} \vec{r}' \cdot d\vec{\ell}.$$

Il secondo termine a secondo membro è nullo perché rappresenta la circuitazione del vettore conservativo \vec{r}' . Il primo integrale differisce dall'integrale a primo membro della (7.7) solo per la sostituzione del vettore (uniforme) \vec{B} al posto del vettore (uniforme) \vec{r} ; pertanto

$$\oint_{\mathcal{C}} (\vec{B} \cdot \vec{r}') d\vec{\ell} = \left(\sum_k \Delta \mathcal{S}_k \hat{n}_k \right) \times \vec{B}.$$

Sostituendo nella (7.15) si ottiene subito

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{m} \times \vec{B}, \quad (7.17)$$

in perfetta analogia con la (3.32). Ovviamente, la stessa legge si applica a qualsiasi distribuzione di corrente che si estende su una regione in cui il campo è approssimativamente uniforme. Per esempio, la (7.17) spiega perché un ago magnetico nel campo magnetico terrestre si orienta nella direzione Sud-Nord; infatti, dalle leggi della meccanica, l'unica posizione di equilibrio *stabile* è quella per cui \vec{m} è parallelo e concorde a \vec{B} .

[†]Si ricordi, dalla meccanica, che se la risultante di un sistema di forze è nulla, il momento non dipende dalla scelta del polo.

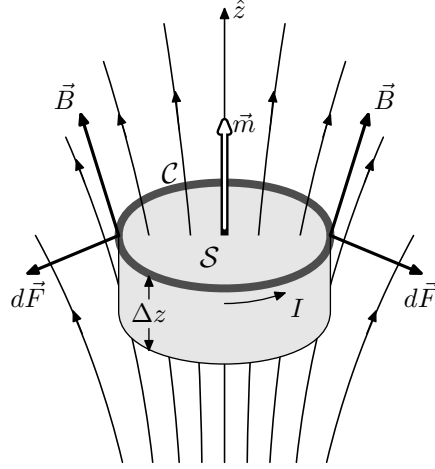
[†]Utilizzando un sistema di assi cartesiani, la dimostrazione dell'identità si ottiene con un banale calcolo algebrico.

In un campo non uniforme anche la forza risultante non è nulla. Se il campo ha una variazione ‘lenta’ lungo la distribuzione di corrente, si dimostra in generale che la componente della forza risultante lungo una qualsiasi direzione orientata \hat{z} è

$$\mathcal{F}_z = \vec{m} \cdot \text{grad } B_z, \quad (7.18)$$

ancora una volta in analogia con la legge (3.34) trovata per i dipoli elettrici. Per evitare sviluppi formali complessi, limitiamoci a verificare la validità di questa legge in un caso particolare. Consideriamo una spira circolare immersa in un campo magnetico, simmetrico rispetto a un asse \hat{z} , ma non uniforme.

Le linee di flusso del campo sono mostrate nella figura accanto. La linea spessa rappresenta la spira circolare percorsa da una corrente I nel senso indicato dalla freccia. Il momento magnetico della spira ha la direzione e il verso indicato dalla freccia \vec{m} . Il campo magnetico ha componente assiale e componente radiale ma non componente lungo $\hat{\phi}$



$$\vec{B} = B_z \hat{z} + B_r \hat{r},$$

mentre l'elemento generico di circuito ha soltanto la componente nella direzione della longitudine

$$d\vec{\ell} = d\ell \hat{\phi}.$$

La forza agente su un elemento di circuito è quindi

$$d\vec{F} = \frac{I}{c} d\vec{\ell} \times \vec{B} = -\frac{I}{c} d\ell B_r \hat{z} + \frac{I}{c} d\ell B_z \hat{r}.$$

Per l'ipotesi di simmetria assiale, B_z è uniforme lungo la spira; allora le componenti radiali delle forze agenti su elementi diametralmente opposti, come quelli mostrati in figura, sono opposti e si elidono. Dal momento che anche B_r è uniforme, si ha quindi

$$\vec{F} = \oint_C d\vec{F} = -\frac{I}{c} B_r \hat{z} \oint_C d\ell = -\frac{I}{c} (2\pi r B_r) \hat{z}.$$

Consideriamo ora il flusso di \vec{B} uscente dalla superficie cilindrica di altezza Δz mostrata nella figura; per la solenoidaltà del campo deve essere

$$B_z(z)S - B_z(z - \Delta z)S + 2\pi r \Delta z B_r = 0,$$

da cui

$$2\pi r B_r = -S \frac{B_z(z) - B_z(z - \Delta z)}{\Delta z} \approx -S \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

La forza risultante sulla spira risulta in definitiva

$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{I}{c} \mathcal{S} \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{z} = m \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{z},$$

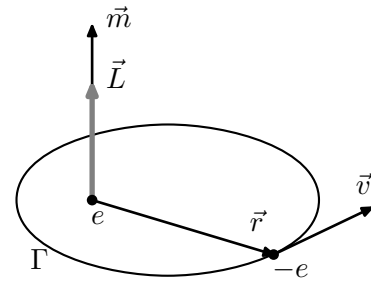
in perfetto accordo con la (7.18). Si noti che, come nel caso elettrostatico, la forza punta verso la zona di campo più intenso se \vec{m} e \vec{B} hanno verso concorde.

7.2 Momenti magnetici atomici

Gli atomi e le molecole sono dotati di momento magnetico. Una prova sperimentale di questa asserzione si ottiene per esempio facendo passare un fascio di atomi (elettricamente neutri) in un campo magnetico non uniforme; si osserva una deflessione delle traiettorie che può essere attribuita solo a una forza come la (7.18).

La descrizione degli atomi come distribuzioni statiche di carica elettrica, utilizzata nel terzo capitolo, non è evidentemente applicabile in questo caso. Una descrizione alternativa, certamente familiare al lettore, in termini di elettroni orbitanti intorno a un nucleo massivo di carica positiva, consente invece di interpretare molte delle proprietà magnetiche degli atomi. Ambedue le descrizioni sono metafore di una realtà che non ammette una rappresentazione classica, e che può essere adeguatamente trattata solo con i metodi della Teoria Quantistica. Tuttavia gli schemi classici sono indispensabili per la definizione stessa delle grandezze fisiche rilevanti, e perciò è importante sviluppare un modello elementare dei momenti magnetici atomici.

La struttura più semplice è quella di un solo elettrone che esegue un'orbita kepleriana Γ intorno a un nucleo fisso (in sostanza un atomo di idrogeno) come mostrato nella figura a lato. Indichiamo con \vec{r} il vettore posizione dell'elettrone con origine nel nucleo, con \vec{v} la velocità e con T il periodo di rivoluzione.



La corrente attraverso una qualsiasi sezione della curva Γ ha un andamento periodico di periodo T . Gli ordini di grandezza di v e T possono essere valutati molto facilmente assumendo un'orbita circolare di raggio pari al raggio di Bohr. Se μ_e^\dagger è la massa dell'elettrone, dal secondo principio della dinamica si ha

$$\mu_e \frac{v^2}{a} = \frac{e^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{e^2}{\mu_e a}} \approx 10^8 \text{ cm/s}.$$

Siamo due ordini di grandezza al di sotto di c , e ciò giustifica l'applicazione della dinamica di Newton. Con questo valore della velocità si ricava un periodo

$$T = \frac{2\pi a}{v} \approx 10^{-15} \text{ s},$$

[†]In questo paragrafo indichiamo con μ_e la massa dell'elettrone per non creare confusione con il momento magnetico m .

immensamente più piccolo dei tempi apprezzabili alla scala macroscopica. Ora, si dimostra facilmente (vedi § 10.4) che il valore medio su tempi lunghi rispetto a T , è uguale alla media su un periodo. Pertanto, possiamo assimilare il nostro modello di atomo a una spira Γ percorsa da una corrente stazionaria di intensità

$$I = -\frac{e}{T}. \quad (7.19)$$

Il momento magnetico si calcola dalla (7.12)

$$\vec{m} = \frac{I}{2c} \oint_C \vec{r} \times d\vec{\ell} = -\frac{e}{2cT} \oint_C \vec{r} \times \vec{v} dt, \quad (7.20)$$

Ricordando la definizione di momento angolare

$$\vec{L} \equiv \mu_e \vec{r} \times \vec{v}$$

si ha subito

$$\oint_C \vec{r} \times \vec{v} dt = \oint_C \frac{\vec{L}}{\mu_e} dt,$$

e, dato che il momento angolare è una costante del moto, da quì segue

$$\oint_C \vec{r} \times \vec{v} dt = \frac{\vec{L}}{\mu_e} T.$$

Sostituendo nella (7.20) ricaviamo l'importante relazione

$$\vec{m} = \frac{-e}{2\mu_e c} \vec{L}. \quad (7.21)$$

Il momento magnetico di una spira atomica è indissolubilmente legato al momento angolare dell'elettrone secondo il fattore di proporzionalità

$$\frac{-e}{2\mu_e c} = -8.794 \times 10^8 \frac{\text{statcoulomb} \cdot \text{sec}}{\text{g} \cdot \text{cm}},$$

che prende il nome di *'rapporto giromagnetico (o magneto-meccanico) orbitale'*.

Questa relazione vale anche per atomi a molti elettroni e più in generale può essere dimostrata per qualsiasi sistema di punti materiali aventi tutti lo stesso rapporto e/μ_e . Di più, essa resta valida anche in meccanica quantistica. La sola novità introdotta dalla teoria quantistica è che la componente L_z del momento angolare orbitale lungo una direzione orientata \hat{z} qualsiasi, può assumere soltanto valori discreti, multipli interi della costante di Planck \hbar . Ciò implica che la componente del momento magnetico debba essere un multiplo intero (positivo o negativo) del *'magnetone di Bohr'*:

$$m_B \equiv \frac{e\hbar}{2\mu_e c} \approx 0.93 \times 10^{-20} \text{erg/gauss}. \quad (7.22)$$

Per l'unità di misura adottata nella formula a lato si confronti la (7.44)

A ciò si deve aggiungere che l'elettrone possiede un momento angolare intrinseco, detto '*spin*', anche nel sistema di riferimento proprio; la componente dello spin, lungo una direzione orientata, può assumere soltanto i due valori $-\hbar/2$ e $\hbar/2$ cui corrisponde un momento magnetico di spin

$$m_{\text{spin}} = g_e \frac{e}{2\mu_e c} \frac{\hbar}{2} = g_e \frac{m_B}{2} \quad (g_e \approx 2.0023),$$

dove la costante adimensionale g_e viene chiamata '*fattore g* ' dell'elettrone. En passant, anche il protone e il neutrone possiedono spin e momento magnetico. I fattori g valgono²

$$g_p \approx 5.5857, \quad g_n \approx -3.8261.$$

Dal momento che le masse dei nucleoni sono molto maggiori di quella dell'elettrone, i momenti magnetici risultano assai più piccoli del magnetone e possono essere trascurati rispetto a quelli elettronici. Conviene comunque puntualizzare che questa affermazione è valida solo per campi statici; in presenza di campi variabili nel tempo con opportune frequenze il momento nucleare ha grandissima importanza (Risonanza Magnetica Nucleare). Il momento angolare totale di un atomo è quindi la somma dei momenti angolari, orbitali e di spin, dei singoli elettroni. Il calcolo quantistico, che non può essere svolto qui, fornisce il seguente risultato: il momento angolare totale di un atomo è espresso da $\sqrt{J(J+1)}\hbar$ dove J è un semi-intero (metà di un intero) che dipende dal particolare stato atomico; la componente del momento magnetico lungo una direzione \hat{z} qualsiasi, è data da

$$m_z = m_J g m_B,$$

dove g è un fattore adimensionale dell'ordine dell'unità (*fattore di Landé*), e m_J un semi-intero compreso in un intervallo limitato $(-J, J)$.

Senza entrare in ulteriori dettagli, il contenuto di questo paragrafo può essere così sintetizzato: in condizioni di equilibrio e in assenza di interazioni con campi esterni (stato fondamentale), gli atomi hanno momenti magnetici dell'ordine di grandezza del magnetone di Bohr (7.22), proporzionale al momento angolare totale che a sua volta è proporzionale alla costante di Planck \hbar . Naturalmente, gli atomi il cui stato fondamentale ha momento angolare nullo, non hanno momento magnetico (così come gli atomi a simmetria sferica non possiedono momento di dipolo elettrico). Inoltre, la componente del momento magnetico lungo una qualsiasi direzione orientata è '*quantizzata*', potendo assumere soltanto valori discreti '*etichettati*' da un numero semi-intero. Queste semplici proprietà consentono di interpretare il comportamento magnetico di molti materiali.

²Il calcolo dei fattori g delle particelle elementari può essere eseguito solo con i metodi dell'Elettrodinamica Quantistica.

7.3 Campi macroscopici

Analogamente a quanto avviene per i momenti di dipolo elettrico, i momenti atomici possono essere orientati in maniera caotica, producendo un campo macroscopico nullo, oppure avere un certo grado di allineamento che si manifesta con la produzione di un campo magnetico che può essere anche piuttosto intenso. Discutiamo in primo luogo le grandezze macroscopiche che descrivono lo stato di magnetizzazione di un corpo.

Il momento magnetico totale $d\vec{m}$ di una cella di materiale, macroscopicamente piccola contenente N atomi[†], è la somma dei momenti magnetici dei singoli atomi

[†]**Nota:** N è un numero intero ‘infinitesimo’, cioè piccolo rispetto al numero di Avogadro.

$$d\vec{m} = \sum_{k=1}^N \vec{m}_k = N\langle\vec{m}\rangle, \quad (7.23)$$

dove $\langle\vec{m}\rangle$ è il momento magnetico atomico medio

$$\langle\vec{m}\rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \vec{m}_k.$$

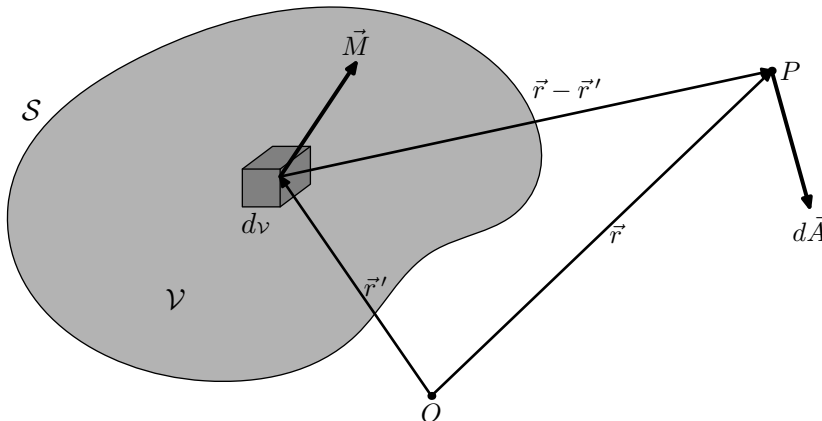
Indicando, come d’uso, con n la densità in numero degli atomi e con $d\nu$ il volume della cella si ha $N = nd\nu$ e quindi

$$d\vec{m} = nd\nu\langle\vec{m}\rangle = \vec{M}d\nu. \quad (7.24)$$

Il vettore $\vec{M} = n\langle\vec{m}\rangle$ prende il nome di ‘densità di magnetizzazione’ e, come l’analogo vettore \vec{P} nei dielettrici, caratterizza lo stato macroscopico di un materiale. Noto \vec{M} , il potenziale vettore si calcola applicando la (7.8):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{d\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\nu, \quad (7.25)$$

dove \mathcal{V} è la regione occupata dal corpo magnetizzato e \vec{r}' è il vettore posizione della cella generica di volume $d\nu$ come indicato in figura.



In analogia con quanto fatto nel paragrafo 3.3.5 per il potenziale di un corpo polarizzato elettricamente, questa espressione del potenziale vettore può essere riformulata in termini di ‘correnti di magnetizzazione’ equivalenti a \vec{M} ; in primo luogo la (7.25) può essere riscritta come

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_V \frac{\text{rot } \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv + \int_S \frac{\vec{M} \times d\vec{S}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (7.26)$$

Prova. Ricordiamo che

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \text{grad}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

dove l’apice sull’operatore gradiente indica che la derivata è calcolata rispetto a \vec{r}' . Utilizzando inoltre l’identità vettoriale, valida per qualsiasi scalare f e vettore \vec{V}

$$\text{rot}(f\vec{V}) \equiv f \text{rot } \vec{V} + \text{grad } f \times \vec{V},$$

con $f = 1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ e $\vec{V} = \vec{M}$ la funzione integranda nella (7.25) si scrive

$$\frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{M} \times \text{grad}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\text{rot } \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \text{rot} \left(\frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right).$$

Sostituendo nella (7.25) si ottiene

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_V \frac{\text{rot } \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv - \int_V \text{rot} \left(\frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv.$$

Il primo integrale è identico a quello che compare nella (7.26); per il secondo utilizziamo l’identità

$$\int_V \text{rot } \vec{V} dv = - \int_S \vec{V} \times d\vec{S},$$

che si dimostra agevolmente introducendo un sistema di coordinate cartesiane. Con $\vec{V} = \vec{M}/|\vec{r} - \vec{r}'|$, questa fornisce immediatamente la (7.26). ■

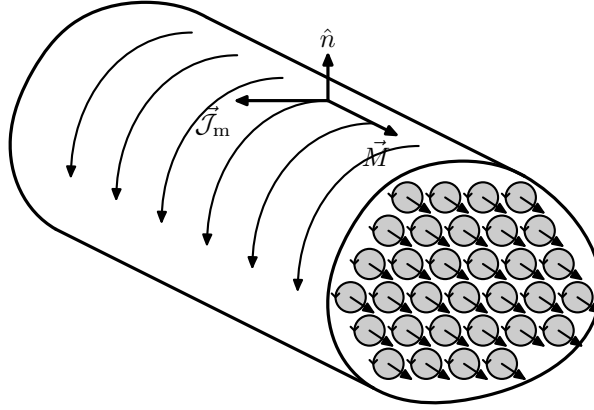
Confrontando la (7.26) con l’espressione (6.52) del potenziale vettore di una distribuzione di corrente stazionaria, il primo integrale rappresenta il contributo al potenziale di una distribuzione di corrente di volume avente densità

$$\vec{J}_m = c \text{rot } \vec{M}, \quad (7.27)$$

mentre il secondo integrale corrisponde a una corrente di superficie di densità

$$\vec{J}_m = c \vec{M} \times \hat{n}, \quad (7.28)$$

dove \hat{n} è la normale uscente da \mathcal{S} . In perfetta analogia con la polarizzazione elettrica, la magnetizzazione di un corpo può essere descritta in termini di ‘correnti di magnetizzazione’ di volume \vec{J}_m e di superficie \vec{J}_m . Le relazioni di equivalenza (7.27) e (7.28) possono essere interpretate in maniera intuitiva con un semplice schizzo.



Un corpo cilindrico è magnetizzato con il vettore \vec{M} parallelo all'asse; nella figura, i momenti magnetici delle celle infinitesime sono rappresentati, sulla base visibile del cilindro, da piccole frecce parallele a \vec{M} . Ciascun dipolo magnetico è equivalente al circuitino di corrente evidenziato con un'ombreggiatura. Sulla superficie laterale del cilindro, i circuitini danno luogo a una corrente di superficie con la direzione e il verso, mostrati in figura, che sono evidentemente in accordo con la (7.28). Se \vec{M} è uniforme la densità di corrente di volume calcolata dalla (7.27) risulta nulla. Ciò è in accordo con la cancellazione, a scala macroscopica delle correnti circolanti in circuitini adiacenti. Se invece \vec{M} , pur mantenendo direzione fissa varia lungo la sezione trasversale del cilindro, non vi sarà cancellazione, e la corrente di magnetizzazione è presente anche all'interno.

In presenza di materia, la legge di circuitazione di Ampère deve essere scritta

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{J}_\ell + \vec{J}_m), \quad (7.29)$$

dove \vec{J}_ℓ è la densità delle correnti 'libere', dovuto al moto di cariche su scala macroscopica (ad es. la corrente degli elettroni in un filo di rame), distinta dalle correnti di magnetizzazione che originano da moti interni agli atomi (o molecole). La distinzione è del tutto analoga a quella tra cariche libere e di polarizzazione, introdotta per i campi elettrici nella materia. Tenendo conto della (7.27), la legge di Ampère fornisce

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_\ell + 4\pi \text{rot } \vec{M} \quad \Longrightarrow \quad \text{rot } (\vec{B} - 4\pi \vec{M}) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_\ell.$$

Si definisce allora il '*campo magnetizzante*'

$$\vec{H} \equiv \vec{B} - 4\pi \vec{M}, \quad (7.30)$$

che ha una circuitazione dipendente solo dalle correnti libere

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_\ell. \quad (7.31)$$

Il vettore \vec{H} , nel sistema gaussiano, ha le stesse dimensioni di \vec{B} e, ovviamente, la stessa unità di misura. Tuttavia, per motivi storici, l'unità gaussiana di \vec{H} viene chiamata '*Oersted*' invece che gauss.

Il campo magnetizzante è affetto da una tara analoga a quella del vettore \vec{D} : è vero che la circuitazione di \vec{H} dipende solo dalle correnti libere, che in molte situazioni sperimentali sono anche ben determinate, ma \vec{H} non è solenoidale:

$$\operatorname{div} \vec{H} = -4\pi \operatorname{div} \vec{M} \equiv 4\pi \rho_m, \quad (7.32)$$

e, quel che è peggio, la densità di ‘carica magnetica’ ρ_m non è nota a priori, ma in generale deve essere calcolata dalla (7.32) una volta noto \vec{M} . Inoltre l’interpretazione fisica di \vec{H} è oscura perché esso non è né il mediatore delle forze (quale è invece \vec{B}) né il parametro che descrive lo stato di magnetizzazione di un corpo. Tuttavia, questo vettore gode (purtroppo) di una vasta popolarità, tanto che la denominazione ufficiale di ‘campo magnetico’ è assegnata dalla convenzione[†] SI ad \vec{H} , lasciando al campo fondamentale \vec{B} la denominazione di ‘vettore densità di flusso’ o ‘vettore induzione magnetica’. Le origini storiche di questa scelta illogica sono semplici da capire: l’esistenza e la facile reperibilità in natura di magneti permanenti, che hanno una magnetizzazione \vec{M} anche in assenza di campi magnetici esterni, ha fatto sì che la teoria delle forze tra magneti, descrivibile in termini di \vec{H} , si sviluppasse molto prima di quella delle forze tra cariche e correnti.

Un esempio può essere molto utile per illustrare analogie e differenze tra i campi \vec{B} e \vec{H} e le rispettive sorgenti. Nella figura 7.3 è rappresentato l’andamento delle linee di flusso dei campi generati da una sbarretta cilindrica a sezione circolare magnetizzata uniformemente con \vec{M} parallelo all’asse \hat{z} . Il disegno è eseguito in un semipiano meridiano con la linea tratteggiata che rappresenta l’asse e il rettangolo ombreggiato il cilindro. Dal momento che non ci sono correnti libere, le sole sorgenti di \vec{B} sono le correnti di magnetizzazione (7.28) che scorrono sulla superficie laterale del cilindro (in figura, lungo il lato lungo del rettangolo perpendicolarmente alla pagina, verso chi legge). Il campo magnetico è quindi

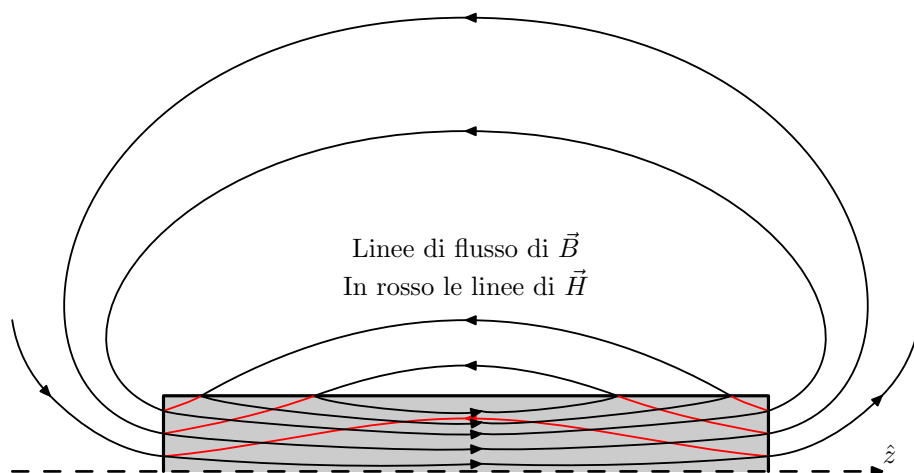


Figura 7.3: Confronto tra i campi \vec{B} e \vec{H}

[†]Ovviamente, non ci adegueremo alla convenzione SI. La designazione di campo magnetico spetta a \vec{B} .

identico a quello generato da un solenoide con linee di flusso chiuse che si addensano all'interno della sbarretta. Le sorgenti di \vec{H} sono invece le cariche di superficie

$$\sigma_m = \vec{M} \cdot \hat{n}, \quad (7.33)$$

sulle basi del cilindro dove la componente normale di \vec{M} (e di \vec{H}) è discontinua. Perciò le linee di flusso di \vec{H} partono dalla base dove σ_m è positiva (a destra in figura) e terminano sulla base opposta. Mentre il campo magnetico ha una discontinuità nella componente tangenziale sulla superficie laterale ed è continuo sulle basi del cilindro, \vec{H} è continuo sulla superficie laterale e ha discontinuità nella componente normale sulle basi. All'esterno del magnete, dove la magnetizzazione \vec{M} è assente, i campi \vec{B} e \vec{H} coincidono mentre all'interno hanno versi opposti; se la sbarretta è lunga e sottile, per la (6.60), nella zona centrale risulta

$$\vec{B} \approx \frac{4\pi\mathcal{J}}{c}\hat{z} = 4\pi\vec{M} \quad \Rightarrow \quad \vec{H} \approx 0.$$

Questo semplice esempio mostra la differenza di principio tra \vec{H} e \vec{B} : il primo deriva da una idea delle interazioni magnetiche come forze tra 'poli magnetici' analoghe alle forze tra cariche elettriche, mentre il secondo è espressione di una interazione da correnti. La prima concezione, dopo l'esperimento di Oersted e la teoria di Ampère, è obsoleta.

Tuttavia, occorre dire che, a differenza del vettore \vec{D} , il campo magnetizzante può risultare davvero utile in tutti i casi in cui \vec{H} è solenoidale e le correnti circolano in conduttori filiformi. Questo perché le correnti libere nei fili, a differenza delle cariche libere in elettrostatica, sono effettivamente controllabili dallo sperimentatore.

Le grandezze introdotte in questo paragrafo sono di uso comune nelle applicazioni tecniche. È opportuno quindi fornire le formule principali nel Sistema Internazionale. Le correnti di magnetizzazione sono espresse in termini della densità di magnetizzazione dalle formule

$$\vec{J}_m = \text{rot } \vec{M}, \quad \vec{J}_m = \vec{M} \times \hat{n}. \quad (\text{SI})$$

Perciò la legge di circuitazione di Ampère nella materia si scrive

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0(\vec{J}_\ell + \vec{J}_m) \quad \Rightarrow \quad \text{rot } (\vec{B} - \mu_0\vec{M}) = \mu_0\vec{J}_\ell. \quad (\text{SI})$$

Il vettore \vec{H} è definito come

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \quad (\text{SI})$$

e soddisfa quindi l'equazione

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_\ell. \quad (\text{SI})$$

Da questa equazione si vede subito che l'unità di misura di \vec{H} , nel sistema internazionale, è Ampère/metro.

7.4 Proprietà magnetiche dei materiali

Per determinare il campo magnetico nella materia occorre, come nel caso elettrico, una relazione costitutiva che esprima la magnetizzazione \vec{M} in funzione del campo magnetico. Rispetto alle proprietà dielettriche la fenomenologia è molto più complessa, come si può capire dal fatto che sono comuni le sostanze che posseggono momento magnetico anche in assenza di campo applicato. Di queste sostanze ‘ferromagnetiche’ parleremo brevemente alla fine del paragrafo; dapprima, esaminiamo con maggiore dettaglio le sostanze ‘non magnetiche’ per le quali la magnetizzazione è proporzionale al campo magnetico. In questo caso l’equazione costitutiva si scrive

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (7.34)$$

[†]La definizione di suscettività è la stessa anche nel SI. Si noti che in entrambi i sistemi χ_m è adimensionale.

dove la ‘suscettività magnetica’ χ_m è un parametro[†] caratteristico del materiale. Anche questa definizione risente dello sviluppo storico tortuoso delle idee intorno ai fenomeni magnetici, menzionato nel paragrafo precedente; dal momento che la grandezza fisica fondamentale è \vec{B} , il modo naturale di caratterizzare le proprietà magnetiche di una sostanza sarebbe di porre

$$\vec{M} = \chi_m \vec{B} \quad \text{non convenzionale!}$$

Infatti, la magnetizzazione è la manifestazione macroscopica del momento atomico medio $\langle \vec{m} \rangle$, che, come vedremo più avanti, è prodotto da \vec{B} e non dal campo magnetizzante \vec{H} . Fortunatamente, la definizione convenzionale (7.34) di suscettività non comporta grande differenza rispetto a quella naturale, come si vedrà poco più avanti. Tenendo presente la definizione (7.30) di \vec{H} , si ha

$$\vec{M} = \chi_m (\vec{B} - 4\pi \vec{M}) \quad \Rightarrow \quad \vec{M} = \frac{\chi_m}{\mu} \vec{B} \quad (7.35)$$

dove il parametro

$$\mu = 1 + 4\pi \chi_m, \quad (7.36)$$

prende il nome di ‘permeabilità magnetica’. Questa costante esprime la proporzionalità tra \vec{B} e \vec{H}

Nel Sistema Internazionale

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M} = \vec{H} + 4\pi \chi_m \vec{H} = \mu \vec{H}, \quad (7.37)$$

$$\mu = 1 + \chi_m$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

Inoltre μ viene chiamata permeabilità ‘relativa’, mentre il prodotto $\mu\mu_0$ permeabilità ‘assoluta’.

ed è l’analogo magnetico di $1/\epsilon$. Per le sostanze ‘non magnetiche’ la suscettività, in valore assoluto, è sempre molto piccola, e μ differisce assai poco dall’unità; perciò non fa grande differenza assumere la definizione convenzionale o quella naturale di χ_m .

La suscettività magnetica, a differenza di quella elettrica, può assumere sia valori negativi che positivi; le sostanze aventi $\chi_m < 0$ ($\mu < 1$) vengono classificate come ‘diamagnetiche’, quelle con $\chi_m > 0$ ($\mu > 1$) ‘paramagnetiche’.

7.4.1 Diamagnetismo

La suscettività delle sostanze diamagnetiche, in valore assoluto, è sempre molto piccola; di regola

$$|\chi_m| < 10^{-5},$$

e quindi

$$\mu \approx 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} \approx \vec{H}.$$

Il campo magnetico viene assai poco influenzato dalla presenza di materia diamagnetica e ciò giustifica la denominazione di materiali non magnetici. Alcuni esempi importanti di sostanze diamagnetiche sono: H_2 , N_2 , Cu , Si , Pb , H_2O .

Un comportamento diamagnetico eccezionale viene esibito dai superconduttori: al di sotto della temperatura critica, insieme alla resistività si annulla anche il campo magnetico nel materiale (purché il campo esterno non superi una soglia dipendente dalla temperatura). Questo fenomeno può essere descritto in termini di una permeabilità magnetica nulla che, per la (7.36), corrisponde a una suscettività

$$\chi_m = -\frac{1}{4\pi},$$

che rappresenta il minimo (massimo in valore assoluto) valore possibile di questo parametro.

Una suscettività negativa implica che la magnetizzazione, e quindi i momenti atomici, hanno verso opposto a quello del campo inducente \vec{B} . In base alla (7.18), in un campo non uniforme, le sostanze diamagnetiche sono soggette a una forza che punta dalla parte dove il campo è meno intenso; questa caratteristica può essere evidenziata sperimentalmente ponendo un campione del materiale in un campo intenso e fortemente disuniforme. Un'eccellente discussione di questo tipo di esperimenti si può trovare nel capitolo 10 del testo di Purcell citato nell'introduzione; qui mi limito a riportare il dato essenziale che la forza agente su un campione di sostanza scala con il quadrato del campo magnetico; dal momento che il gradiente di B_z è proporzionale al campo, dalla (7.18) si inferisce che il momento magnetico indotto nelle molecole è proporzionale a \vec{B} , in accordo con la (7.35).

Il fenomeno del diamagnetismo non è interpretabile come orientamento di momenti magnetici atomici perché, per la (7.17), l'effetto del campo è quello di favorire l'orientazione *concorde* con \vec{B} , nè si può giustificare come una deformazione della distribuzione delle correnti atomiche, perché il campo magnetico macroscopico è troppo piccolo rispetto ai campi microscopici: la distribuzione di corrente in un atomo (o molecola) è da considerare una struttura rigida nel processo di magnetizzazione. Il diamagnetismo è dovuto al fatto che i momenti atomici sono prodotti da cariche in moto e non da separazione statica di 'poli'. Il ruolo chiave nell'interpretazione del diamagnetismo è svolto dal momento angolare associato al momento magnetico a norma della (7.21). Facendo riferimento

al modello planetario introdotto nel § 7.2, dimostriamo che, pur non deformando l'orbita di un elettrone in maniera significativa, l'applicazione del debole campo magnetico macroscopico produce una rotazione rigida dell'intero atomo intorno alla direzione di \vec{B} . Infatti, per la seconda equazione cardinale della dinamica

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}},$$

dove il momento meccanico $\vec{\mathcal{M}}$, per la (7.17) e la (7.21) è espresso da

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{m} \times \vec{B} = \frac{-e}{2\mu_e c} \vec{L} \times \vec{B} = \frac{e}{2\mu_e c} \vec{B} \times \vec{L}.$$

Sostituendo nell'equazione della dinamica, si ottiene

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega}_L \times \vec{L}, \quad (7.38)$$

dove si è posto

$$\vec{\Omega}_L \equiv \frac{e}{2\mu_e c} \vec{B} \quad (7.39)$$

Il vettore $\vec{\Omega}_L$, che ha dimensione di $(\text{tempo})^{-1}$, prende il nome di '*velocità angolare di Larmor*'.

La (7.38) è la familiare equazione di un moto circolare uniforme: il vettore \vec{L} , e di conseguenza il piano dell'orbita, effettua una precessione di velocità angolare $\vec{\Omega}_L$ come illustrato nella figura a lato. Dal momento che la velocità angolare di precessione dipende solo dal campo magnetico inducente, le orbite di tutti gli elettroni eseguono la stessa rotazione intorno a \vec{B} con pari velocità: l'intero atomo (o molecola) ruota rigidamente con velocità $\vec{\Omega}_L$. Ciascun elettrone, in presenza del campo inducente, acquista una velocità addizionale pari a

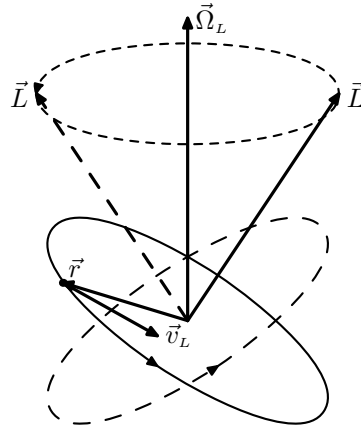
$$\vec{v}_L = \vec{\Omega}_L \times \vec{r},$$

dove \vec{r} è il vettore posizione dell'elettrone misurato a partire dal nucleo. Indicando con $\langle r \rangle$ la distanza media dell'elettrone dall'asse di rotazione si ha un momento angolare aggiuntivo

$$\Delta \vec{L} = \mu_e \langle r \rangle^2 \vec{\Omega}_L = \frac{e \langle r \rangle^2}{2c} \vec{B},$$

e di conseguenza, per la (7.21), un momento magnetico indotto

$$\Delta \vec{m} = \frac{-e}{2\mu_e c} \Delta \vec{L} = -\frac{e^2 \langle r \rangle^2}{4\mu_e c^2} \vec{B}. \quad (7.40)$$



Per un atomo con Z elettroni, abbiamo in definitiva che la precessione di Larmor produce un momento magnetico

$$\Delta \vec{m} = -\frac{Ze^2 \langle r \rangle^2}{4\mu_e c^2} = -\alpha_L \vec{B}, \quad (7.41)$$

proporzionale al campo applicato secondo un fattore di ‘polarizzabilità diamagnetica’[†]

$$\alpha_L = \frac{Ze^2 \langle r \rangle^2}{4\mu_e c^2}. \quad (7.42)$$

Si noti che la polarizzabilità diamagnetica dipende dal quadrato della carica, e quindi è indifferente al segno delle cariche orbitanti. La (7.42) relazione consente di fare una stima dell’ordine di grandezza della suscettività diamagnetica; indicando, come d’uso, con n il numero di atomi per unità di volume possiamo scrivere

$$|\chi_L| \approx n\alpha_L = \frac{nZe^2 \langle r \rangle^2}{4\mu_e c^2} \sim 10^{-6}. \quad (7.43)$$

Quest’ordine di grandezza è stato valutato assumendo $n \sim 10^{22} \text{ cm}^{-3}$, $Z \sim 20$ e $\langle r \rangle \sim 10^{-8} \text{ cm}$.

7.4.2 Paramagnetismo

L’effetto diamagnetico è presente in tutte le sostanze, ma si manifesta alla scala macroscopica soltanto quando gli atomi non hanno un momento magnetico proprio; altrimenti, come nel caso dei dielettrici, prevale l’effetto di orientamento, dovuto al momento (7.17), che da luogo a una suscettività positiva. In queste circostanze si parla di comportamento paramagnetico. Esempi di sostanze paramagnetiche sono O_2 , Al , Pt . I valori della suscettività, a temperatura ambiente, si aggirano per i solidi intorno a 10^{-3} - 10^{-4} e perciò, anche per queste sostanze si può trascurare la distinzione tra \vec{H} e \vec{B} .

L’espressione del momento meccanico \vec{M} , delle forze agenti su un atomo di momento magnetico \vec{m} in un campo esterno \vec{B} , è del tutto analoga a quella valida per un dipolo elettrico in campo elettrico; pertanto, l’energia potenziale associata all’orientazione del momento magnetico è data da

$$U(\theta) = -\vec{m} \cdot \vec{B} \equiv -mB \cos \theta. \quad (7.44)$$

La magnetizzazione per orientamento può quindi essere calcolata secondo lo stesso procedimento di Langevin presentato nel § 3.3.4 per la polarizzazione dei dielettrici; si tratta soltanto di sostituire al momento di dipolo intrinseco p_m il momento magnetico atomico, diciamo m_a . Per la polarizzabilità paramagnetica si ha quindi

$$\alpha_m = \frac{m_a^2}{3kT}, \quad (7.45)$$

[†]Il lettore è invitato a verificare, come esercizio, che anche la polarizzabilità diamagnetica ha le dimensioni di cm^3 .

e per la suscettività

$$\chi_m = \frac{nm_a^2}{3kT} = \frac{C}{T}, \quad \left(C \equiv \frac{nm_a^2}{3k} \right) \quad (7.46)$$

raccogliendo tutti i parametri in una sola costante C che prende il nome di ‘*costante di Curie*’. La dipendenza della suscettività dalla temperatura è in eccellente accordo con i dati sperimentali, ma la determinazione classica della costante di Curie deve essere corretta per tenere conto di un importante effetto quantistico che vale la pena di menzionare.

Calcolo quantistico. In presenza di campo magnetico, la probabilità che la componente del momento magnetico lungo la direzione di \vec{B} abbia il valore m_z , è proporzionale al fattore di Boltzmann

$$e^{m_z B/kT} = e^{m_j \xi} \quad \left(\xi \equiv \frac{gm_B B}{kT} \right), \quad (7.47)$$

e perciò il momento magnetico medio lungo la direzione del campo è dato da

$$\langle m_z \rangle = gm_B \frac{\sum_{m_j=-J}^{m_j=J} m_j e^{m_j \xi}}{\sum_{m_j=-J}^{m_j=J} e^{m_j \xi}} = gm_B \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \xi}, \quad (7.48)$$

[†]In Meccanica Statistica, la somma dei fattori di Boltzmann su tutti gli stati del sistema, che prende il nome di ‘*funzione di partizione*’, svolge un ruolo centrale perché determina completamente le proprietà termodinamiche di un sistema macroscopico. Il calcolo a lato è un esempio di questo teorema statistico.

dove si è posto[†]

$$Z \equiv \sum_{m_j=-J}^{m_j=J} e^{m_j \xi}.$$

Osserviamo che Z è la somma dei primi $2J+1$ termini di una progressione geometrica con primo termine $e^{J\xi}$ e ragione

$$q = e^{-\xi}.$$

Dalle formule elementari sulle progressioni si ha subito

$$Z = e^{J\xi} \frac{1 - q^{2J+1}}{1 - q} = e^{J\xi} \frac{1 - e^{-(2J+1)\xi}}{1 - e^{-\xi}} = \frac{\sinh(J + \frac{1}{2})\xi}{\sinh \frac{1}{2}\xi},$$

da cui, sostituendo nella (7.48), con calcoli elementari si ottiene

$$\langle m_z \rangle = gm_B \mathcal{B}_J(\xi), \quad (7.49)$$

con la ‘*funzione di Brillouin*’ \mathcal{B}_J data da

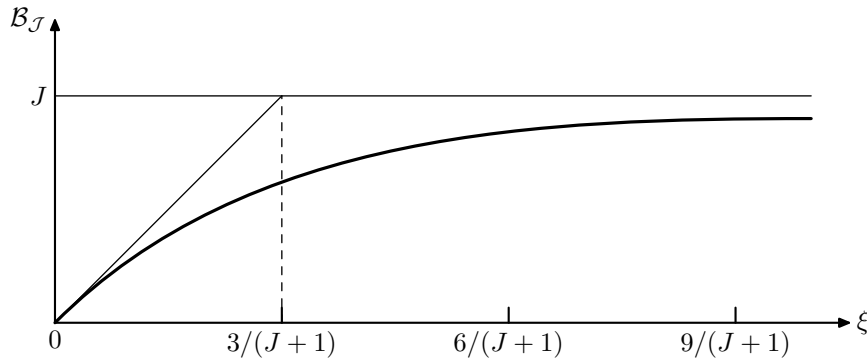
$$\mathcal{B}_J(\xi) \equiv \left(J + \frac{1}{2} \right) \coth \left(J + \frac{1}{2} \right) \xi - \frac{1}{2} \coth \frac{1}{2} \xi. \quad (7.50)$$

L’andamento della funzione di Brillouin è simile a quello della funzione di Langevin di figura 3.10 ed è mostrato in figura 7.4. Si osservi che il valore asintotico di \mathcal{B}_J è J che corrisponde a allineamento completo dei magneti atomici; ciò può verificarsi solo a temperature molto basse mentre a temperatura ambiente, anche per campi piuttosto intensi, risulta $\xi \ll 1$, e quindi si può approssimare la funzione di Brillouin con lo sviluppo al primo ordine intorno all’origine:

$$\mathcal{B}_J \approx J(J+1)\xi/3.$$

Tenendo presente che il momento magnetico è parallelo al campo applicato possiamo scrivere in definitiva

$$\vec{M} \approx n \langle \vec{m} \rangle \approx \frac{nJ(J+1)g^2 m_B^2}{3kT} \vec{B}.$$

Figura 7.4: Grafico della funzione di Brillouin $\mathcal{B}_J(\xi)$.

Il coefficiente di proporzionalità rappresenta la suscettività paramagnetica

$$\chi_m = \frac{nJ(J+1)g^2 m_B^2}{3kT}. \quad (7.51)$$

Confrontando con la (7.46) si ottiene per il modulo del momento magnetico

$$m_a = \sqrt{J(J+1)} g m_B,$$

in accordo con l'espressione del momento magnetico totale riferita nel § 7.2. ■

7.4.3 Ferromagnetismo

Alcune sostanze, come Fe, Co, Ni e molti loro composti e leghe, in un campo magnetico non uniforme sono soggette a forze ragguardevoli (vari ordini di grandezza maggiori delle sostanze non magnetiche) che puntano verso la zona di maggiore intensità, segnalando un momento indotto nel senso del campo applicato; ma la caratteristica più notevole di questi materiali ‘ferromagnetici’ è che la densità di magnetizzazione \vec{M} , non dipende soltanto dal campo applicato, ma anche dalla ‘storia’, vale a dire dai processi cui è stato assoggettato un determinato campione. Perciò, non è possibile caratterizzare una sostanza ferromagnetica mediante un'equazione costitutiva che esprime \vec{M} come funzione di \vec{H} . Si può invece dare una caratterizzazione ‘dinamica’ al seguente modo: dato uno stato iniziale individuato *sia* da \vec{H} *sia* da \vec{M} , una piccola variazione $\Delta\vec{H}$ del campo applicato produce una ben determinata variazione $\Delta\vec{M}$ della magnetizzazione.

Per illustrare questo concetto conviene riferirsi a un esempio concreto. Supponiamo di partire da un campione ferromagnetico non magnetizzato ($\vec{M} = 0$) in assenza di campo applicato ($\vec{H} = 0$),³ e incrementiamo gradualmente \vec{H} . Per semplicità supponiamo che il materiale sia isotropo e la geometria tanto semplice (per esempio una lunga sbarretta cilindrica che riempie completamente un solenoide) che \vec{M} e \vec{H} abbiano la stessa direzione, per cui uno stato viene individuato attraverso le componenti

³Lo stato di magnetizzazione nulla si può ottenere portando il materiale a temperatura elevata (vedi più avanti la temperatura di Curie); raffreddando in assenza di campo applicato la magnetizzazione resta nulla.

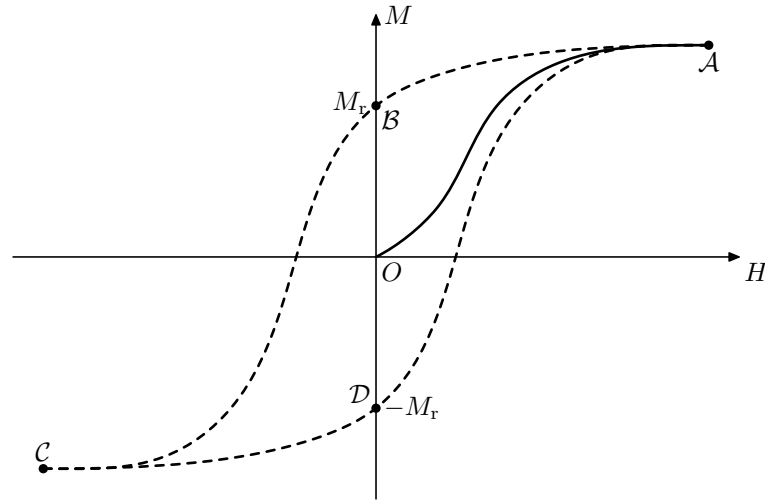


Figura 7.5: Curva di magnetizzazione di un ferromagnete.

dei vettori lungo la direzione comune. La curva a tratto continuo in figura 7.5 mostra l'andamento tipico della magnetizzazione in funzione del campo, in un esperimento di questo genere. Il tratto iniziale, per valori piccoli di H , è all'incirca rettilineo e perciò si può ancora parlare di suscettività; la differenza essenziale con i paramagneti è il valore di χ_m che può essere dell'ordine di 10^3 . In proposito, si deve puntualizzare che nella figura 7.5, la scala sull'asse verticale è molto più grande di quella sull'asse orizzontale; in altre parole lungo la curva di magnetizzazione risulta sempre

$$M \gg H \quad \Rightarrow \quad B \gg H \quad \Rightarrow \quad B \simeq 4\pi M.$$

Al crescere di H , la pendenza della curva dapprima cresce per poi spianare fino a raggiungere la 'saturazione' con M costante. Evidentemente in queste condizioni si è raggiunto il completo allineamento dei magneti atomici. In effetti una saturazione è prevista anche per i paramagneti, come mostrato in figura 7.4, ma in pratica (perlomeno a temperatura ambiente) non si possono produrre i campi macroscopici necessari; per i materiali ferromagnetici sono invece sufficienti campi relativamente modesti. Il motivo di questa differenza è che, nei ferromagneti, i momenti atomici *sono già allineati*: in regioni microscopiche, ma abbastanza grandi da contenere molti atomi (e visibili con un normale microscopio ottico), dette '*domini di Weiss*', tutti i momenti sono paralleli e concordi tra loro. Una cella macroscopica di materiale contiene molti domini ciascuno dei quali ha un diverso orientamento e perciò, in assenza di campo esterno la densità di magnetizzazione può risultare nulla. L'applicazione di un campo esterno provoca una espansione dei domini con orientamento favorevole a scapito di tutti gli altri dando luogo così a una elevata magnetizzazione su scala macroscopica.

La tendenza dei magneti atomici a cooperare è sorprendente se si considera che, per una coppia di magneti, la configurazione con i momenti

concordi ($\uparrow\uparrow$) ha la massima energia rispetto a tutte le altre; ci si aspetterebbe che fosse favorita piuttosto la configurazione con i momenti opposti ($\uparrow\downarrow$) che ha l'energia minima. Ancora una volta ci troviamo di fronte a un fenomeno che può essere spiegato solo dalla Teoria Quantistica.

Proseguendo nella esposizione dei risultati sperimentali, vediamo ora cosa accade se, una volta raggiunto lo stato di saturazione \mathcal{A} , si comincia a ridurre H ; la magnetizzazione, invece di percorrere all'inverso la curva $O\mathcal{A}$, segue l'arco \mathcal{AB} tratteggiato in figura. Arrivati a $H = 0$ il campione resta magnetizzato con una magnetizzazione 'residua' M_r che può essere anche molto grande per certe sostanze: si è prodotto un magnete permanente. Ovviamente, se si comincia a ridurre il campo inducente prima di raggiungere la saturazione, la magnetizzazione residua a $H = 0$ avrà un valore intermedio tra 0 e M_r . Ecco cosa significa 'dipendenza dalla storia': la magnetizzazione dipende dal processo cui è stato sottoposto il campione. Questa proprietà viene sfruttata nei sistemi di memorizzazione magnetica (hard disk, nastri, carte di credito).

In questa sede non è possibile dare una spiegazione dettagliata di questa caratteristica dei ferromagneti. Vale però la pena di osservare che, da un punto di vista termodinamico, l'irreversibilità del processo di magnetizzazione implica la presenza di dissipazione. Che questo è il caso, si può vedere eseguendo un ciclo. Invertendo il verso di H , si può prima annullare la magnetizzazione residua, e poi giungere alla saturazione in senso inverso (arco \mathcal{BC} in figura). Successivamente, incrementando di nuovo il campo inducente si chiude il ciclo in \mathcal{A} , passando per l'arco tratteggiato inferiore nella figura. In questo '*ciclo di isteresi magnetica*' si manifesta un aumento di temperatura del campione.

Infine, proprio riguardo al ruolo della temperatura, occorre segnalare un'altra peculiarità dei materiali ferromagnetici; per ogni sostanza esiste una temperatura critica Θ , detta temperatura di Curie, al di sopra della quale il comportamento diventa paramagnetico (per il ferro è $\Theta = 1043\text{ K}$). Il fatto che l'agitazione termica ostacoli l'allineamento dei magneti atomici è ovvio ed è stato già osservato; però che le proprietà di una sostanza cambino drasticamente a una ben precisa temperatura, è il segno di una vera e propria 'transizione di fase' (come il passaggio solido-liquido) che va analizzato con i metodi della Meccanica Statistica. Qui mi limito a riportare il risultato empirico che, al di sopra della temperatura di Curie, la suscettività dei ferromagneti, a differenza dei paramagneti, è data da

$$\chi_m = \frac{C}{T - \Theta}.$$

Capitolo 8

Moto di cariche in campo elettromagnetico

In presenza di entrambi i campi, elettrico e magnetico, l'espressione della forza agente su una particella carica q è

$$\vec{\mathcal{F}} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right), \quad (8.1)$$

che viene chiamata '*Forza di Lorentz*'. A causa della dipendenza dalla velocità, il moto prodotto da questa forza ha caratteristiche peculiari che vale la pena di esaminare. In questo capitolo vengono discussi alcuni esempi semplici che mettono però in luce gli aspetti essenziali e consentono applicazioni di notevole interesse. Continueremo ad assumere, come nei capitoli precedenti, che \vec{E} e \vec{B} siano indipendenti dal tempo; ciò implica che adottiamo in ogni caso un particolare riferimento 'di laboratorio' in cui le sorgenti dei campi sono in quiete e stazionarie. La trattazione è prevalentemente limitata alle velocità non relativistiche, $v \ll c$, ma, quando è possibile farlo senza addentrarsi in complicazioni, verrà discussa la generalizzazione a velocità arbitrarie.

8.1 Moto di cariche in campo magnetico

Consideriamo dapprima il caso in cui il campo elettrico è assente

$$\vec{\mathcal{F}} = q \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}.$$

Per velocità non relativistiche la legge della dinamica (4.41) si scrive allora

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}. \quad (8.2)$$

Il prodotto scalare di ambo i membri per \vec{v} fornisce una prima informazione importante

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{q}{c} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0 \quad \implies \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = 0. \quad (8.3)$$

L'energia cinetica, e con essa il modulo della velocità, di una particella carica, in moto in un campo magnetico *statico*, è una costante del moto: soltanto la direzione della velocità varia nel tempo. Purtroppo questa è l'unica costante del moto che esiste in generale, e ciò comporta che lo studio del moto di una carica in campo magnetico può risultare molto complicato.

Un caso semplice ma molto importante è quello di un campo uniforme; indicando con \hat{z} il versore avente la direzione e il verso di \vec{B} possiamo scrivere

$$\vec{B} = B\hat{z},$$

dove B è il modulo del campo. L'equazione del moto assume allora la forma

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{qB}{mc} \vec{v} \times \hat{z} = \omega \vec{v} \times \hat{z}, \quad (8.4)$$

dove

$$\omega \equiv \frac{qB}{mc}, \quad (8.5)$$

è una costante indipendente dalla velocità che prende il nome di '*frequenza di ciclotrone*'; il motivo di questa denominazione sarà spiegato più avanti, per il momento osserviamo che ω ha le dimensioni dell'inverso di un tempo come deve essere per una frequenza. Ora, ricordando la (2.6), possiamo decomporre la velocità in una componente longitudinale v_{\parallel} , parallela al campo magnetico, e una 'componente' trasversale \vec{v}_{\perp} , proiezione di \vec{v} in un piano perpendicolare a \hat{z}

$$\vec{v} = v_{\parallel}\hat{z} + \vec{v}_{\perp}. \quad (8.6)$$

Sostituendo nella (8.4) si ha

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt}\hat{z} + \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \omega(v_{\parallel}\hat{z} + \vec{v}_{\perp}) \times \hat{z} = \omega \vec{v}_{\perp} \times \hat{z}. \quad (8.7)$$

Da qui risulta subito

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = 0,$$

che implica la costanza della componente longitudinale della velocità. Per quanto riguarda la componente trasversale dobbiamo studiare il moto piano descritto dall'equazione

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \omega \vec{v}_{\perp} \times \hat{z}.$$

I vettori che compaiono in questa relazione sono disegnati nella figura 8.1 dove il piano di proiezione è evidenziato con un'ombreggiatura. Ora, dalla cinematica elementare sappiamo che il moto piano con accelerazione perpendicolare alla velocità è un moto circolare uniforme, e dal momento che

$$a = \omega v_{\perp},$$

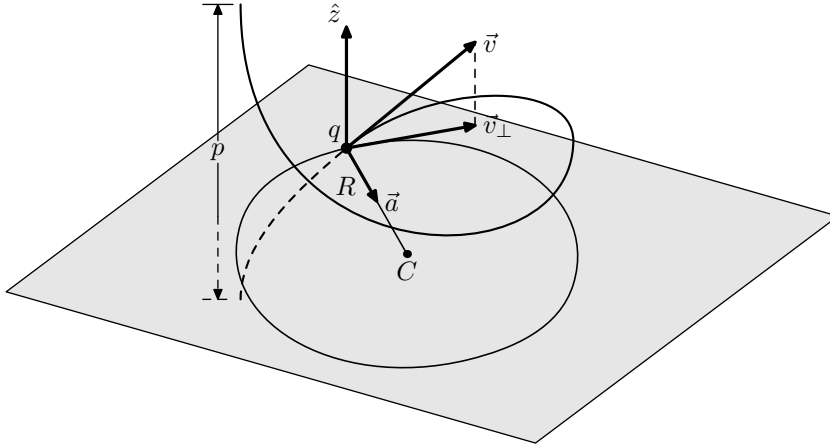


Figura 8.1: Traiettoria di una particella carica in campo magnetico uniforme

la velocità angolare di questo moto è proprio la ω data dalla (8.5). Da ciò segue immediatamente che il periodo è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{mc}{qB}.$$

Il moto avviene in senso orario rispetto a \vec{B} per le cariche positive e in senso antiorario per le negative. La frequenza di ciclotrone ha quindi il significato di numero di giri (espressi in radianti) al secondo effettuati nel moto trasversale dalla particella. Si noti che ω non dipende dalla velocità ma solo dal rapporto q/m tra la carica e la massa della particella (oltre che dal campo magnetico). Ad esempio, un elettrone nel debole campo magnetico terrestre ha una frequenza di ciclotrone dell'ordine di 10^7 rad/sec mentre in campi intensi può facilmente superare i 10^{10} rad/sec. Il raggio R della circonferenza dipende invece dalla velocità; dalla cinematica elementare si ha infatti

$$R = \frac{v_{\perp}}{\omega} = \frac{mc}{qB} v_{\perp}. \quad (8.8)$$

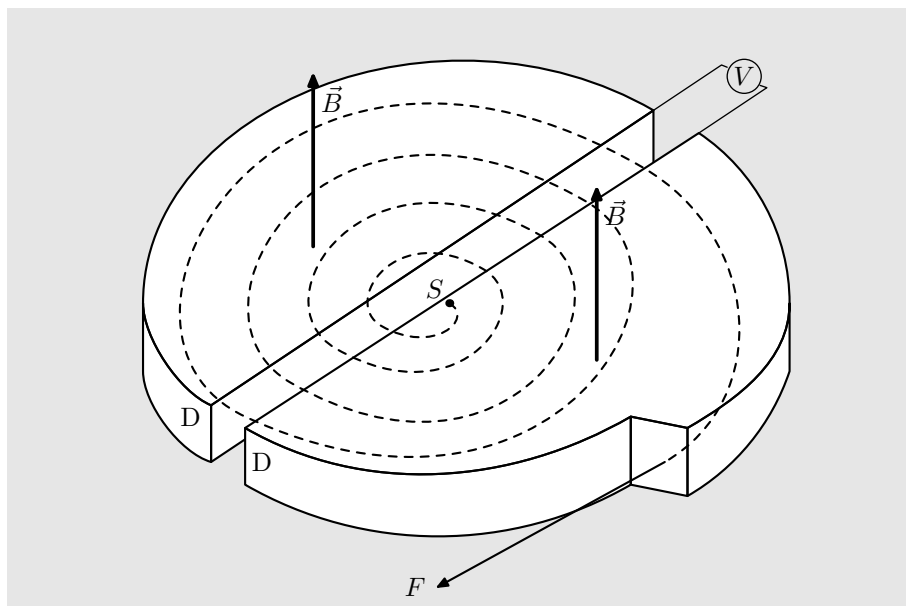
Il centro C della circonferenza descritta nel moto trasversale, che dipende ovviamente dalle condizioni iniziali, viene chiamato '*centro guida*'; il moto complessivo della particella carica in campo uniforme può essere descritto come la composizione di un moto uniforme del centro guida con velocità v_{\parallel} nella direzione del campo e di un moto circolare uniforme intorno al centro guida. Ne risulta una traiettoria elicoidale della quale un arco è disegnato nella figura 8.1 (la parte tratteggiata in figura rappresenta una porzione di traiettoria 'al di sotto' del piano). Il passo p dell'elica (vedi figura) si calcola facilmente come la distanza percorsa lungo la direzione del campo nel tempo in cui viene compiuto un giro completo intorno al centro guida

$$p = v_{\parallel} T = 2\pi \frac{v_{\parallel}}{\omega} = 2\pi R \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}}. \quad (8.9)$$

Come si vede, anche questo parametro dipende dalla velocità, e cioè dalle condizioni iniziali.

Una importante applicazione delle leggi del moto di una particella carica in campo magnetico è il ciclotrone[†] mostrato schematicamente nella figura sotto

[†]Ideato e realizzato nel 1939 da Ernest O. Lawrence che per questo meritò il premio Nobel.



Una sorgente S di ioni è posta tra due scatole metalliche a forma semicilindrica che vengono chiamate 'D'. Tra le D viene applicata, mediante un generatore, una differenza di potenziale V elevata e gli ioni, supposti positivi nella figura, vengono accelerati verso la D a potenziale inferiore. Una volta all'interno della scatola, che è un conduttore 'quasi' chiuso, la forza esercitata dal campo elettrico è trascurabile e il moto avviene sotto l'azione del campo magnetico diretto lungo l'asse delle D (vedi figura). Gli ioni percorrono una semicirconferenza in un tempo

$$T/2 = \pi \frac{mc}{qB},$$

che non dipende dalla velocità, e tornano nella regione in cui è presente il campo elettrico. Se nel frattempo la differenza di potenziale tra le D si è invertita, gli ioni vengono nuovamente accelerati, questa volta verso l'altra scatola. Usando un generatore che produce una differenza di potenziale variabile nel tempo con il periodo T si può ottenere che gli ioni attraversino la fenditura tra le scatole trovando sempre un campo accelerante. Per ogni attraversamento si ha un aumento di energia cinetica pari a qV e un conseguente aumento della velocità; in base alla (8.8) il raggio dell'orbita cresce e ne risulta una traiettoria a spirale come quella disegnata in figura con una linea tratteggiata. Quando viene raggiunto il bordo esterno di una delle D, un campo elettrico (non rappresentato in figura) porta il fascio di ioni al di fuori del campo (freccia F in figura). In questo modo si può disporre di particelle di energia elevata che

vengono utilizzate per l'indagine sperimentale sui processi microscopici. In base ai principi della Meccanica Quantistica i dettagli che si possono 'osservare' sono tanto più fini quanto maggiore è l'energia delle particelle utilizzate. Il ciclotrone di Lawrence è il progenitore di una famiglia di acceleratori di particelle che vengono chiamati 'sincrotroni'. Essi sfruttano l'idea essenziale di accelerare le cariche mediante ripetute applicazioni di un campo elettrico sincrono al passaggio delle particelle in determinate regioni. L'ufficio del campo magnetico è quello di curvare la traiettoria in modo da 'riportare indietro' le particelle senza perdita di energia cinetica. A causa del limite tecnologico sull'intensità dei campi magnetici citato prima, per raggiungere energie elevate si è arrivati a costruire macchine con raggio di vari chilometri.

Nelle moderne macchine acceleratrici e in molti processi osservati in astrofisica, le velocità sono relativistiche. Per la (4.41), l'equazione del moto è

$$\frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B} = m \frac{d\gamma \vec{v}}{dt}. \quad (8.10)$$

Anche in questo caso il modulo della velocità resta costante nel tempo, come si vede subito dalla (4.42). La traiettoria è ancora un'elica ottenuta dalla sovrapposizione di un moto uniforme in direzione del campo magnetico e di un moto circolare uniforme nel piano ortogonale alla direzione di \vec{B} . La differenza essenziale con il caso non relativistico è che la frequenza di ciclotrone dipende dalla velocità

$$\omega \equiv \frac{qB}{mc\gamma}. \quad (8.11)$$

Questo è un problema per gli acceleratori di particelle: via via che cresce la velocità, occorre aumentare il campo magnetico se si vuole mantenere ω costante, oppure occorre aumentare la frequenza di oscillazione del campo elettrico per mantenerla sincrona con il moto delle particelle (sincrotrone).

8.1.1 Campo lentamente variabile con la posizione

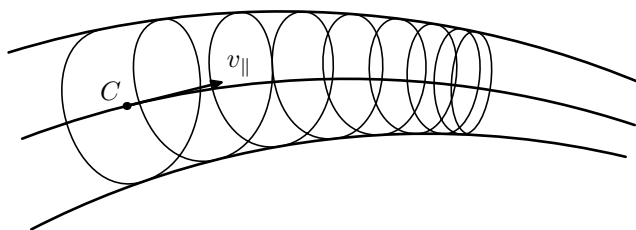
Se il campo magnetico non è uniforme, ma tuttavia varia su una scala di lunghezze grandi rispetto al raggio R e al passo p , la traiettoria è ancora approssimativamente un'elica e può essere descritta come un moto circolare con velocità \vec{v}_\perp intorno a un centro guida che si muove con velocità v_\parallel lungo una linea di flusso di \vec{B} . Via via che cambia l'intensità del campo, pur restando invariato il modulo della velocità, varieranno le due componenti trasversale e longitudinale. Nel prossimo capitolo vedremo che, nell'ipotesi di variazione spaziale 'lenta', il flusso di \vec{B} concatenato alla circonferenza descritta nel moto trasversale, diciamo ϕ , si mantiene costante. In altre parole il moto della particella si svolge sulla superficie di un tubo di flusso. Utilizzando la (8.8) abbiamo allora

$$\phi = \pi R^2 B = \pi \frac{m^2 c^2}{q^2 B} v_\perp^2 \quad \implies \quad v_\perp^2 = \left(\frac{q^2 \phi}{\pi m^2 c^2} \right) B = k B,$$

raccogliendo tutte le costanti in un fattore k . Dal momento che il modulo della velocità v resta costante durante il moto risulta

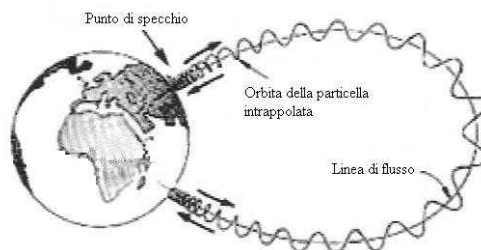
$$v_{\parallel}^2 = v^2 - v_{\perp}^2 = v^2 - kB.$$

La figura sotto mostra la traiettoria di una particella carica (linea sottile) in un campo magnetico non uniforme.



Il centro guida si sposta lungo la linea di flusso centrale mentre la traiettoria giace sul tubo di flusso delineato dalle due linee laterali. Nello spostamento verso destra, il campo magnetico, e quindi la velocità trasversale v_{\perp} , crescono mentre la velocità longitudinale v_{\parallel} , e con essa il passo dell'elica, decresce e può arrivare ad annullarsi. In questo caso si ha un rimbalzo del centro guida che torna indietro lungo la stessa linea di flusso. Questo fenomeno è chiamato *'effetto di specchio'* e viene usato in laboratorio per confinare particelle cariche o gas ionizzati in regioni limitate dello spazio, ma è soprattutto di interesse in geofisica e astrofisica.

Come esempio, la figura sotto mostra qualitativamente l'orbita di una particella carica nel campo magnetico terrestre. Come abbiamo visto nel Capitolo 6, la geometria del campo è quella di un dipolo con linee di flusso che emergono dall'emisfero Nord (boreale) e rientrano nell'emisfero Sud (australe). Quando il centro guida si avvicina alla superficie della Terra (sia a Nord che a Sud) il campo diventa abbastanza intenso da annullare la componente longitudinale della velocità: la particella rimbalza avanti e indietro tra un punto di specchio boreale e un punto di specchio australe.

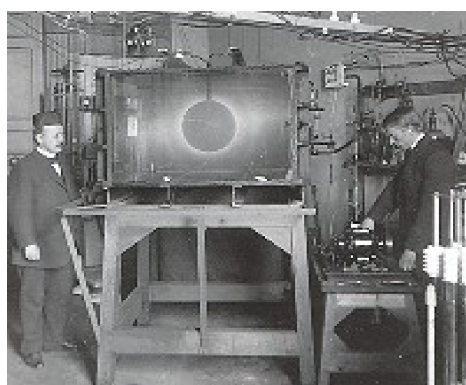


A causa di questo effetto, particelle cariche (essenzialmente protoni ed elettroni) provenienti dal Sole (*'vento solare'*) restano intrappolate nel

campo terrestre accumulandosi in regioni anulari che circondano la Terra, dette fasce di Van Allen. I protoni penetrano maggiormente nel campo della Terra formando una fascia che si estende a quote intorno ai 3000 Km mentre gli elettroni si accumulano in una seconda fascia intorno ai 15000 Km. Le prime osservazioni dirette di queste fasce di radiazione risalgono al 1958, all'inizio delle esplorazioni spaziali, ma l'esistenza di particelle cariche intrappolate nel campo magnetico terrestre era già stata ipotizzata ai primi del '900 da Kristian Birkeland per interpretare lo spettacolare fenomeno delle aurore polari. Normalmente, i punti di specchio delle particelle intrappolate si trovano ben al di sopra degli strati più densi dell'atmosfera e non vi è quindi un'interazione apprezzabile tra queste particelle e i costituenti dell'atmosfera stessa. Tuttavia, in occasione delle tempeste solari, giungono sulla Terra particelle cariche con energia sufficiente a penetrare negli strati più densi dove collidono con le molecole dell'atmosfera trasferendo loro parte della propria energia. Queste molecole *'eccitate'* danno luogo (vedi Capitolo 10) all'emissione di luce che, dalla superficie della Terra, è visibile come una serie di spettacolari drappaggi colorati. Il fenomeno è osservabile alle grandi latitudini perché i punti di specchio si trovano in prossimità dei poli ma, nei tempi in cui il cielo non era stato ancora reso opaco da vari tipi di inquinamento, le aurore polari si potevano osservare anche nelle regioni mediterranee. Ispirato dalla *'terrella'* di Gilbert, Birkeland, a sostegno della propria teoria costruì un modello in scala per la produzione delle aurore in laboratorio mostrato qui sotto¹ (Birkeland è il personaggio sulla sinistra con lo strano copricapo).



Kristian Birkeland
1867 – 1917



Per l'ostilità di grandi potentati accademici internazionali, Birkeland non ebbe i riconoscimenti che avrebbe meritato e, tuttora, è praticamente sconosciuto al di fuori della Norvegia. Oltretutto, egli ebbe la sfortuna di morire quando l'Accademia Svedese era sul punto di compensarlo di molte amarezze assegnandogli il premio Nobel.

¹La figura è tratta dal sito web:

<http://www.museumsnett.no/ntm/no/forskning/birkeland/birkeland.htm>

8.2 Moto in campo elettrico e magnetico

Nel caso di campi uniformi e velocità non relativistiche si può dare una descrizione generale del moto. Indicando con \hat{z} il versore parallelo e concorde a \vec{B} , osserviamo in primo luogo che la componente della forza di Lorentz lungo questa direzione è semplicemente

$$\mathcal{F}_z = qE_z,$$

e perciò il moto lungo \hat{z} è un moto con accelerazione costante di scarso interesse. Assumiamo quindi che \vec{E} sia perpendicolare a \vec{B} (campi incrociati) e indichiamo con \hat{y} il versore parallelo e concorde al campo elettrico. Completiamo infine la terna ortogonale levogira con il versore \hat{x} orientato come nella Figura 8.2. Una particella con velocità iniziale

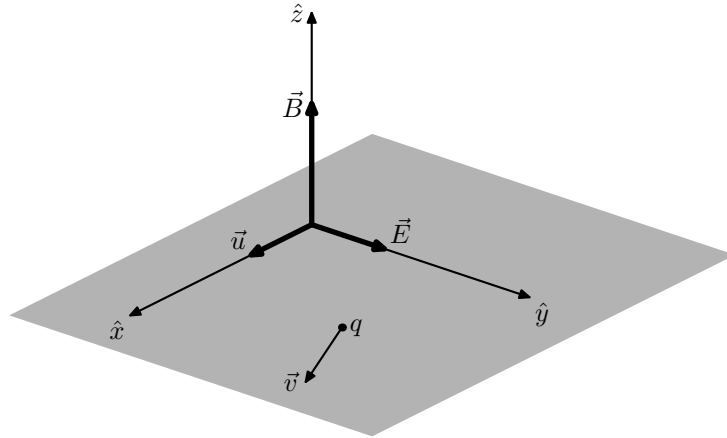


Figura 8.2: Particella carica soggetta all'azione di campi incrociati

parallela al piano $\hat{x}\hat{y}$, ombreggiato in figura, descrive una traiettoria interamente contenuta nel piano. Nell'approssimazione non relativistica, l'equazione della dinamica si scrive

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} + q\vec{E}, \quad (8.12)$$

che differisce dalla (8.2) per il termine noto $q\vec{E}$. Dalla teoria delle equazioni differenziali² sappiamo che l'integrale generale di questa equazione si esprime come la somma dell'integrale generale dell'omogenea associata (8.2), che indicheremo con \vec{v}_c , e di un integrale particolare, diciamo \vec{u} dell'equazione completa (8.12):

$$\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{u}. \quad (8.13)$$

Per l'ipotesi di uniformità del campo e di assenza di componente \hat{z} della velocità iniziale, \vec{v}_c è la velocità di un moto circolare uniforme con la

²Vedi: N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone - ELEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II, Liguori, Napoli (2001), §22

frequenza di ciclotrone $\omega = (qB)/(mc)$ e raggio $R = v_c/\omega$. La soluzione particolare \vec{u} viene trovata facilmente cercando una soluzione costante nel tempo della (8.12); dal momento che, per \vec{u} costante, si annulla il primo membro della (8.12) occorre risolvere l'equazione algebrica

$$\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} + \vec{E} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} = -\vec{E}.$$

Il lettore può facilmente verificare, come esercizio, che la soluzione³ di questa equazione è

$$\vec{u} = c \frac{E}{B} \hat{x} \equiv c \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}, \quad (8.14)$$

dove la seconda espressione, intrinseca, mette in evidenza che \vec{u} punta dalla parte che vede antioraria la rotazione che sovrappone \vec{E} a \vec{B} come mostrato in Figura 8.2. Per la (8.13) il moto è ancora una volta la sovrapposizione di un moto circolare uniforme e di un moto traslatorio uniforme ma, a differenza del caso discusso nel paragrafo precedente, i due moti sono complanari; inoltre, mentre \vec{v}_c dipende dalle condizioni iniziali, la velocità ‘di deriva’ \vec{u} dipende esclusivamente dai campi risultando indipendente sia dalle condizioni iniziali sia dalla carica e dalla massa della particella. Si noti anche che l'ipotesi di velocità non relativistica è ammissibile solo se

$$E \ll B.$$

Assumendo per comodità una velocità iniziale diretta secondo l'asse \hat{x} ,

$$\vec{v}_0 = v_0 \hat{x},$$

si verifica facilmente che la soluzione dell'equazione del moto (8.12) che soddisfa la condizione iniziale $\vec{v}(0) = v_0 \hat{x}$ è

$$v_x(t) = u - (u - v_0) \cos \omega t, \quad v_y(t) = (u - v_0) \sin \omega t. \quad (8.15)$$

La legge oraria del moto si ottiene facilmente integrando queste due semplicissime equazioni; il lettore è invitato a compiere un utile esercizio verificando che, se si assume come origine delle coordinate la posizione iniziale della particella, la soluzione è

$$x(t) = ut - R \sin \omega t, \quad y(t) = R(1 - \cos \omega t), \quad (8.16)$$

con

$$R = \frac{u - v_0}{\omega}. \quad (8.17)$$

Le (8.16) sono le equazioni parametriche della traiettoria descritta da un punto a distanza R dall'asse di una ruota di raggio

$$a = \frac{u}{\omega},$$

³In riferimento alla discussione svolta nel §6.1.2 giova notare che qui la soluzione è unica perché si è supposta nulla la componente di \vec{u} parallela a \vec{B} .

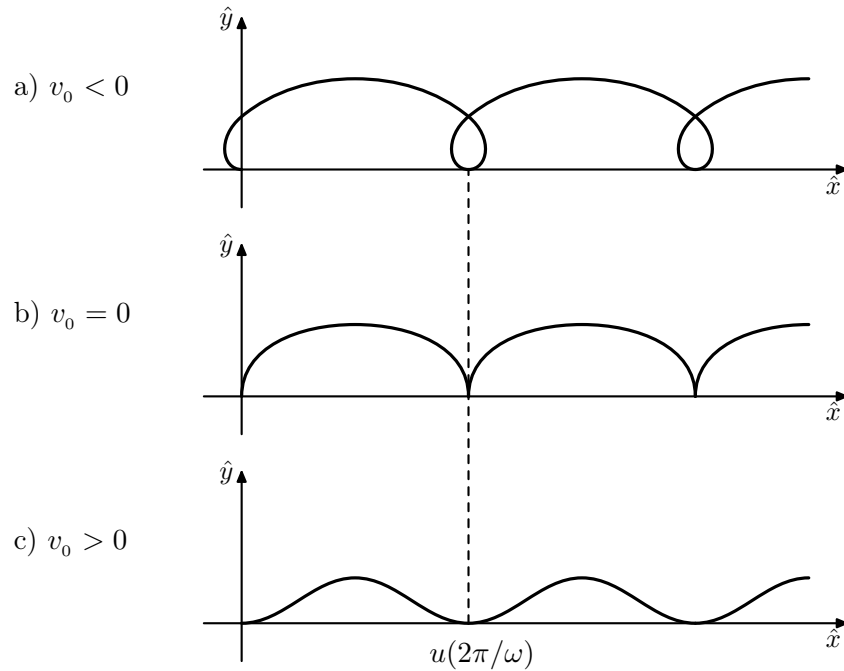


Figura 8.3: Traiettorie di una particella in campi elettrico e magnetico incrociati: a) $R > a$, b) $R = a$, c) $R < a$.

che rotola senza strisciare su un piano (si chiama *'trocoide'*). La curva ha un aspetto diverso secondo che R sia maggiore uguale o minore di a come mostrato nella figura 8.3. Il caso $R > a$ corrisponde a $v_0 < 0$: la particella parte nella direzione negativa dell'asse \hat{x} ma le forze esercitate dal campo elettrico e dal campo magnetico concorrono a curvare rapidamente la traiettoria riportando la velocità a puntare nel verso positivo dell'asse \hat{x} . A questo punto le azioni esercitate da \vec{E} e \vec{B} sono discordi e al crescere del modulo della velocità quella del campo magnetico prevale riportando la particella sull'asse \hat{x} e la velocità al valore iniziale; dopo ciò la vicenda si replica partendo dal punto di ascissa $u(2\pi/\omega)$. Un'analoga interpretazione si può dare delle traiettorie nei casi $v_0 = 0$ e $v_0 > 0$.

Di particolare interesse è il caso in cui la velocità iniziale è uguale alla velocità di deriva; dalla (8.17) il raggio R del moto circolare uniforme è nullo e perciò il moto permane rettilineo uniforme con la velocità \vec{u} . Del resto si verifica subito che per $\vec{v} = \vec{u}$ la forza a secondo membro della (8.12) è nulla. Su questa osservazione si basa il *'selettore di velocità'* mostrato schematicamente nella figura 8.2. Una sorgente di ioni carichi (come ad esempio un filamento caldo) emette particelle con un'ampia gamma di velocità sia in direzione che modulo. Facendo riferimento alla figura, il diaframma D_1 seleziona le particelle aventi velocità parallela e concorde a un asse \hat{x} . Nella regione tra D_1 e D_2 sono presenti un campo elettrico uniforme come mostrato dalla freccia e un campo magnetico, anch'esso uniforme, perpendicolare al piano del disegno e che punta ver-

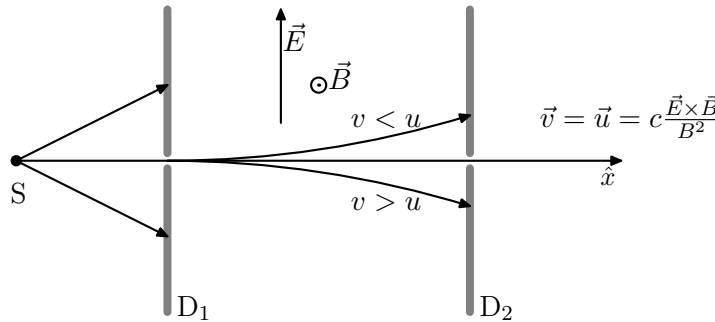


Figura 8.4: Selettore di velocità per particelle cariche.

so il lettore, simboleggiato da un cerchietto con un puntino al centro. Le particelle aventi velocità inferiore a u vengono deflesse dalla parte dove punta \vec{E} , quelle con velocità maggiore vengono deflesse dalla parte opposta; soltanto le particelle dotate di velocità u proseguono indisturbate e passano attraverso la fenditura del secondo diaframma. Il valore della velocità selezionata $u = cE/B$ può essere scelto facilmente agendo sull'intensità del campo elettrico.

Concludiamo il capitolo discutendo un importante fenomeno, noto come ‘*effetto Hall*’, che consiste nella generazione di un campo elettrico trasversale in un conduttore massiccio percorso da corrente, quando si applica un campo magnetico perpendicolare alla corrente. Nel § 5.5 abbiamo visto che sulla superficie di un conduttore percorso da corrente sono presenti cariche che assicurano l’annullamento della componente normale del campo elettrico all’interno del materiale. Applicando un campo magnetico, si altera sia il campo elettrico nel conduttore che la distribuzione di cariche sulla superficie. Per analizzare questo fenomeno consideriamo una geometria molto semplice come quella mostrata in figura 8.5. Un lungo conduttore di sezione rettangolare, di cui è mostrato in figura un segmento, è percorso da una corrente di densità \vec{J} uniforme. Indichiamo con \vec{E}_0 il campo elettrico nel conduttore in assenza del campo magnetico. Per la legge di Ohm, il campo elettrico è anch’esso uniforme e vale

$$\vec{E}_0 = \rho \vec{J} = \rho n q \vec{u}. \quad (8.18)$$

Nella figura si è supposto che i portatori di carica siano positivi e perciò la velocità \vec{u} è stata disegnata concorde con \vec{J} . Applicando il campo magnetico, la traiettoria dei portatori viene deflessa verso la parete evidenziata con ombreggiatura più scura contrassegnata con il segno + perché qui si ha un accumulo di carica positiva; la parete opposta, contrassegnata con il segno -, si carica negativamente per carenza di carica positiva. Come nel caso elettrostatico, il processo ha durata molto breve e termina quando il campo \vec{E}_H prodotto da queste cariche indotte raggiunge il valore

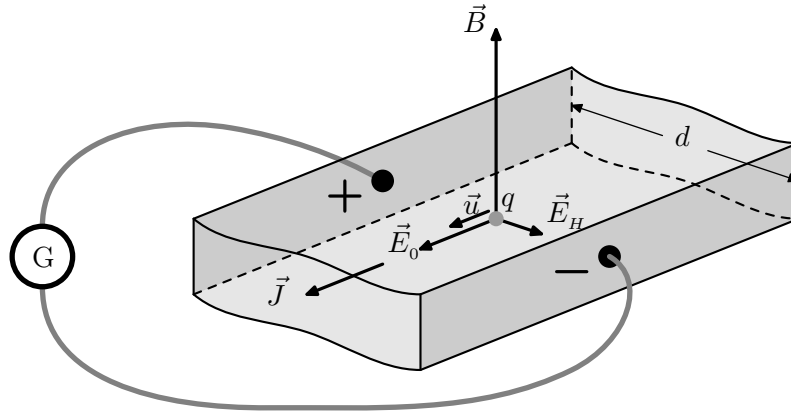


Figura 8.5: Effetto Hall in un conduttore percorso da corrente in campo magnetico.

per cui

$$\vec{E}_H + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} = c \frac{\vec{E}_H \times \vec{B}}{B^2}. \quad (8.19)$$

La situazione è in un certo senso opposta a quella del selettore di velocità: in questo caso è il campo elettrico che si adegua alla velocità delle particelle, che è fissata dalla (8.18), per fare sì che la velocità di deriva dei campi incrociati \vec{E}_H e \vec{B} sia pari a \vec{u} . Dalla (8.19), ricordando che $\vec{J} = nq\vec{u}$, si ricava subito

$$\vec{E}_H = - \left(\frac{1}{nqc} \right) \vec{J} \times \vec{B}, \quad (8.20)$$

dove il fattore di proporzionalità tra parentesi è il ‘coefficiente di Hall’. Il campo \vec{E}_H viene determinato misurando con un galvanometro (vedi figura) la differenza di potenziale

$$V = E_H d$$

tra le due superfici laterali cariche. Dal momento che \vec{J} e \vec{B} sono noti, la (8.20) consente di ricavare il valore del coefficiente di Hall. Si osservi che la relazione (8.20) è intrinseca e non dipende dall’assunzione che i portatori di carica siano positivi; del resto il lettore scettico può ripetere il ragionamento svolto sopra assumendo portatori negativi e verificare che si giunge alla stessa relazione. Pertanto il segno del coefficiente di Hall, che dipende solo dal segno di q consente di stabilire il segno dei portatori di carica. Per la maggior parte dei metalli il segno è negativo, indicando che la conduzione è affidata agli elettroni; inoltre, il valore di n che si desume dalla (8.20) prendendo q eguale alla carica dell’elettrone corrisponde all’incirca a un elettrone di conduzione per ciascun atomo.

Capitolo 9

Il campo elettromagnetico

Questo capitolo completa l'esposizione dei principi dell'elettrodinamica. Verranno discussi i fenomeni e le leggi riguardanti i campi elettrici e magnetici variabili nel tempo e nello spazio nella maniera più generale senza alcuna condizione di staticità o stazionarietà; d'ora in avanti, i simboli \vec{E} e \vec{B} indicano campi dipendenti sia dalla posizione che dal tempo:

$$\vec{E} \equiv \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \vec{B} \equiv \vec{B}(\vec{r}, t).$$

La trattazione verte principalmente sui campi nel vuoto; dei campi nella materia si parlerà nell'ultimo capitolo.

9.1 Il tensore elettromagnetico e le leggi di trasformazione dei campi

In tutta generalità, anche per campi variabili nel tempo la legge di forza di Lorentz

$$\vec{\mathcal{F}} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right), \quad (9.1)$$

costituisce la *definizione* dei campi elettrico e magnetico in qualsiasi sistema di riferimento inerziale. Dal momento che la velocità e la forza dipendono dalla scelta del riferimento, anche i campi sono differenti in sistemi inerziali differenti: la legge di forza di Lorentz è valida in tutti i sistemi di riferimento inerziali ma con valori differenti di \vec{E} e \vec{B} in ciascun sistema. Di ciò abbiamo già visto qualche esempio nella legge di trasformazione del campo elettrostatico (vedi § 4.6) e nella discussione della forza agente su una carica in moto parallelamente a un filo percorso da corrente (§6.1.1). Per ricavare la legge generale di trasformazione dei campi occorre riscrivere la (9.1) in termini dei quadri-vettori velocità $\bar{\mathbf{v}}$ e forza di Minkowski $\bar{\mathbf{f}}$; ricordiamo che

$$\bar{\mathbf{v}} \equiv (\mathbf{v}_t, \vec{\mathbf{v}}) \equiv (\gamma c, \gamma \vec{v}), \quad (9.2)$$

mentre dalle (4.37) e (4.40) si ha

$$\bar{\mathbf{f}} \equiv (\mathbf{f}_t, \vec{\mathbf{f}}) = \left(\gamma \frac{v}{c} \mathcal{F}_{\parallel}, \gamma \vec{\mathcal{F}} \right). \quad (9.3)$$

[†]Si tenga ben presente la distinzione tra il vettore \vec{v} , componente spaziale di un quadri-vettore, e il vettore galileiano \vec{v} che non è una grandezza relativistica.

Con una semplice sostituzione, la legge di forza di Lorentz fornisce per le componenti spaziali e temporali della forza di Minkowski[†]

$$f_t = \frac{q}{c} \vec{E} \cdot \vec{v}, \quad \vec{f} = \frac{q}{c} (\vec{E} \vec{v}_t + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (9.4)$$

Introducendo un sistema di coordinate (ct, x, y, z) nello spazio-tempo, si deducono facilmente le relazioni tra le componenti della (quadri)forza f e della (quadri)velocità v

$$\begin{cases} f_t = (q/c)(E_x v_x + E_y v_y + E_z v_z) \\ f_x = (q/c)(E_x v_t + B_z v_y - B_y v_z) \\ f_y = (q/c)(E_y v_t - B_z v_x + B_x v_z) \\ f_z = (q/c)(E_z v_t + B_y v_x - B_x v_y) \end{cases}, \quad (9.5)$$

che conviene scrivere in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} f_t \\ f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \frac{q}{c} \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_t \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \iff \bar{f} = \frac{q}{c} [F] \cdot \bar{v}. \quad (9.6)$$

La (quadri)forza agente su una particella carica è quindi proporzionale alla (quadri)velocità secondo un fattore di proporzionalità che, a parte la costante q/c , è un tensore di rango due che prende il nome di ‘*Tensore del campo elettromagnetico*’[‡]. Difficile immaginare qualcosa di diverso; per l’omogeneità dello spazio-tempo la forza non può dipendere esplicitamente (ma solo attraverso i campi) dal quadri-vettore posizione nè può dipendere dalla accelerazione. Si ricordi che nello spazio-tempo di Minkowski la quadri-velocità è una grandezza indipendente dallo stato di moto dell’osservatore: solo le componenti di v (e di f) dipendono dalla scelta del riferimento inerziale. Di conseguenza, anche il tensore elettromagnetico

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (9.7)$$

ha un significato fisico obiettivo pur se le sue componenti, che sono le componenti di \vec{E} e \vec{B} , dipendono dal sistema di riferimento. Le componenti di \vec{E} sono le componenti spazio-tempo del tensore elettromagnetico mentre quelle di \vec{B} sono le componenti spazio-spazio. Ancora una volta, il sistema di unità gaussiane, che attribuisce unità uguali al campo elettrico e magnetico appare il sistema di misura naturale.

[‡]Si ricordi la discussione in fine del § 6.1.2 e seguente. Qui un tensore è rappresentato da una matrice 4×4 perché lo spazio tempo ha 4 dimensioni.

Si osservi la struttura* della matrice (9.7); i termini diagonali sono nulli, gli elementi spazio-tempo sono simmetrici per scambio degli indici, quelli spazio-spazio sono antisimmetrici. Queste caratteristiche garantiscono che la forza, e quindi l'accelerazione, sia 'perpendicolare' alla velocità

$$\vec{f} \cdot \vec{v} \equiv \mathbf{f}_t v_t - \vec{f} \cdot \vec{v} = 0,$$

come il lettore può facilmente verificare usando la (9.6).

Consideriamo ora un sistema di riferimento in moto con velocità \vec{V} rispetto al sistema precedente. Scegliendo l'asse x parallelo a \vec{V} , per la legge di trasformazione di Lorentz (4.24), le componenti della velocità e della forza nel nuovo sistema sono

$$\begin{cases} v'_t = \gamma(v_t - \beta v_x) \\ v'_x = \gamma(v_x - \beta v_t) \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases} \quad \begin{cases} f'_t = \gamma(f_t - \beta f_x) \\ f'_x = \gamma(f_x - \beta f_t) \\ f'_y = f_y \\ f'_z = f_z \end{cases} \quad (9.8)$$

dove $\beta = V/c$ e $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Nel nuovo sistema di riferimento, i campi elettrico e magnetico sono definiti da

$$\mathbf{f}'_t = \frac{q}{c} \vec{E}' \cdot \vec{v}', \quad \vec{f}' = \frac{q}{c} \left(\vec{E}' v'_t + \vec{v}' \times \vec{B}' \right). \quad (9.9)$$

Sostituendo qui dentro le (9.8) e confrontando con le (9.5), con calcoli tediosi ma elementari che lascio come esercizio, si ottengono le leggi di trasformazione dei campi

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z), \quad E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y), \quad (9.10)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z), \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y). \quad (9.11)$$

Queste relazioni possono essere scritte in maniera molto più compatta ed espressiva in termini delle componenti dei campi parallele e perpendicolari alla velocità relativa \vec{V} , che per di più hanno un significato intrinseco; tenendo presente che le componenti parallele sono $E_{\parallel} = E_x$, $B_{\parallel} = B_x$ e quelle perpendicolari $\vec{E}_{\perp} \equiv (0, E_y, E_z)$, $\vec{B}_{\perp} \equiv (0, B_y, B_z)$, si verifica facilmente che

$$\begin{cases} E'_{\parallel} = E_{\parallel}, & \vec{E}'_{\perp} = \gamma \left(\vec{E}_{\perp} + \frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{B}_{\perp} \right), \\ B'_{\parallel} = B_{\parallel}, & \vec{B}'_{\perp} = \gamma \left(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{E}_{\perp} \right). \end{cases} \quad (9.12)$$

LEGGI DI TRASFORMAZIONE DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO

Se la velocità relativa V è piccola rispetto a c , si può porre $\gamma \approx 1$, e le leggi di trasformazione assumono la forma ancora più semplice

$$\vec{E}' \approx \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{B}, \quad \vec{B}' \approx \vec{B} - \frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{E}. \quad (9.13)$$

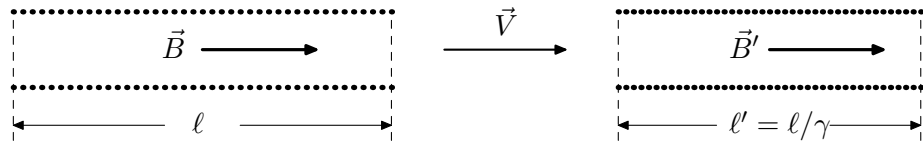
Si noti che l'invarianza delle componenti longitudinali dei campi è assicurata in queste formule della definizione di prodotto vettore.

* Usualmente questa matrice viene scritta in forma completamente anti-simmetrica. Per ottenere questa forma più elegante è però necessario utilizzare il formalismo covariante che non mi è sembrato opportuno introdurre in una trattazione elementare.

Nel caso particolare in cui $\vec{B} = 0$ la prima delle (9.12) si riduce alla (4.17), ricavata nel § 4.6 con un ragionamento basato sull'alterazione delle densità di carica prodotta dalla contrazione delle lunghezze. Il ragionamento sviluppato nel presente paragrafo mostra che la legge di trasformazione del campo elettromagnetico prescinde totalmente dalle sorgenti. Questa osservazione è il primo passo necessario per arrivare a stabilire che il campo è un ente fisico reale e non soltanto una finzione comoda per descrivere le interazioni tra particelle cariche. Tuttavia è istruttivo, allo scopo di verificare la coerenza interna della teoria, considerare qualche caso particolare in cui si evidenzia il legame tra la trasformazione dei campi e quella delle sorgenti. Per esempio, consideriamo il campo magnetico (6.60) al centro di un lungo solenoide

$$B_z = \frac{4\pi n I}{c} = \frac{4\pi \mathcal{J}}{c}.$$

In un riferimento in moto lungo l'asse del solenoide, l'avvolgimento appare accorciato di un fattore γ come mostra la figura sotto



Il numero di spire per unità di lunghezza nel nuovo sistema sarà quindi $n' = n\gamma$; al tempo stesso l'intensità di corrente, per l'invarianza della carica e la dilatazione dei tempi, si riduce del fattore γ

$$I' = \frac{I}{\gamma}. \quad (9.14)$$

Abbiamo allora

$$\mathcal{J}' = n' I' = n\gamma \frac{I}{\gamma} = nI = \mathcal{J} \quad \Rightarrow \quad B'_z = \frac{4\pi \mathcal{J}'}{c} = B_z, \quad (9.15)$$

[†]Vale anche la pena di notare che l'invarianza della componente trasversale della densità di corrente $\vec{\mathcal{J}}$, stabilita dalla (9.15), è in accordo con l'osservazione fatta a pagina 158, che la densità di corrente è la parte spaziale di un quadrivettore.

in accordo con l'invarianza[†] della componente longitudinale di \vec{B} sancita dalle leggi generali (9.12).

Vediamo ora alcune importanti applicazioni delle leggi di trasformazione (9.12). Consideriamo dapprima la trasformazione di un campo elettrostatico; dal momento che, nel sistema di partenza $\vec{B} = 0$, nel sistema in moto con velocità \vec{V} si ha immediatamente

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}, \quad \vec{E}'_{\perp} = \gamma \vec{E}_{\perp}, \quad B'_{\parallel} = 0, \quad \vec{B}'_{\perp} = -\gamma \frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{E}_{\perp}.$$

Le equazioni di trasformazione per \vec{E} coincidono con quelle trovate in maniera elementare nel § 4.6 mentre quelle per \vec{B} possono essere riunite nell'unica formula

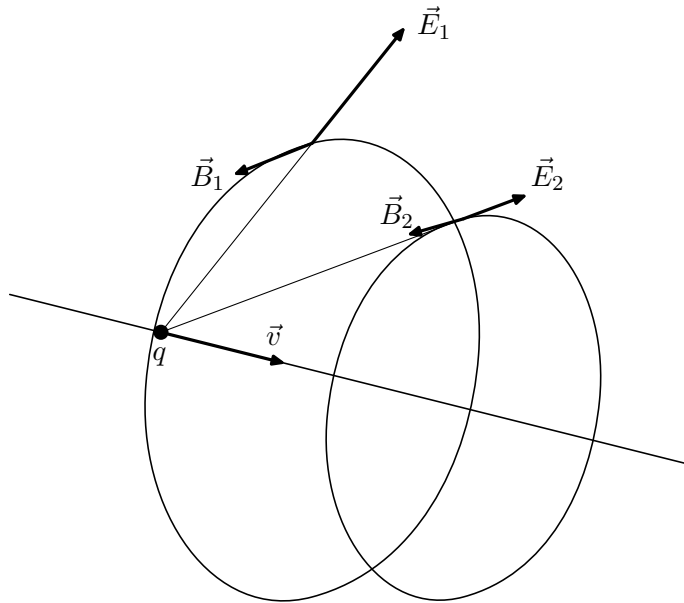
$$\vec{B}' = -\frac{1}{c} \vec{V} \times (\gamma \vec{E}_{\perp}) = -\frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{E}'_{\perp}.$$

Dal momento che le cariche nel sistema di partenza sono tutte in quiete, nel sistema in moto hanno tutte la stessa velocità $\vec{v} = -\vec{V}$; inoltre, tenendo presente che la componente longitudinale di \vec{E}' non contribuisce al prodotto vettore, si ha il seguente importante risultato:

In un sistema di riferimento in cui tutte le cariche sono animate dalla stessa velocità \vec{v} , il campo magnetico in ciascun punto dello spazio è legato al campo elettrico da

$$\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} \quad (9.16)$$

Nella formula sono stati soppressi gli apici perché tutte le grandezze sono misurate nello stesso sistema di riferimento. L'esistenza del campo magnetico è dovuta al fatto che nel sistema in cui le cariche sono in moto esiste anche una corrente. Un'applicazione interessante di questo risultato è il campo magnetico prodotto da una carica q in moto uniforme; ricordando l'espressione di \vec{E} trovata nel § 4.6 si vede subito che le linee di flusso di \vec{B} sono circonferenze aventi come asse la retta su cui muove q come mostrato nella figura sotto



Per una corretta interpretazione della figura, occorre pensarla in prospettiva; la particella viene verso chi guarda, con la velocità che spunta fuori della pagina. Per questo motivo le linee di flusso appaiono ellittiche. Inoltre il punto 2 è in primo piano rispetto al punto 1.

Tuttavia questo campo non ha niente a che fare con il campo di Biot-Savart (6.22). Infatti, ricordando l'espressione del campo elettrico di una carica in moto uniforme (4.18), la legge (9.16) fornisce

$$B_\phi(r, \theta) = \frac{qv}{cr^2} \frac{(1 - \beta^2) \sin \theta}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}, \quad (9.17)$$

che è ben diversa dalla (6.22). Si osservi che, a causa del fattore $\sin \theta$ a numeratore, la dipendenza del campo magnetico da θ è ancora più

accentuata che per il campo elettrico e sull'asse di simmetria il campo va a zero. Notevole è anche il fatto che il campo magnetico decresce con la distanza dalla carica secondo la legge $1/r^2$ a differenza del campo prodotto da correnti stazionarie limitate nello spazio, che decresce con $1/r^3$. Ovviamente, la (9.17) non è ottenibile dalla prima formula di Laplace che si applica solo a correnti stazionarie.

Se si parte invece da un sistema di riferimento in cui è presente soltanto un campo magnetico statico, prodotto da una distribuzione di correnti stazionarie, si invertono i ruoli di \vec{E} e \vec{B} ; con calcoli del tutto simili a quelli appena svolti per il campo elettrostatico si trova facilmente che, in un riferimento in cui la distribuzione di corrente appare animata da una velocità \vec{v} , è presente un campo elettrico dato da

$$\vec{E} = -\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}. \quad (9.18)$$

Un esempio particolare di questa legge lo abbiamo già visto nel § 6.1.1 analizzando la diversa contrazione lorentziana di processioni di cariche animate da velocità differenti nel riferimento in moto parallelamente al filo. La relazione generale (9.18) rende conto del fatto che anche se la velocità è perpendicolare al filo ma nel piano del filo stesso (e perciò perpendicolare a \vec{B}) esiste un campo elettrico. Le sorgenti di \vec{E} , in questo caso in cui non vi è una contrazione diversa per le processioni di cariche positive e negative nel filo, verranno discusse nel prossimo paragrafo.

Consideriamo infine una graziosa applicazione della approssimazione (9.13) delle leggi di trasformazione dei campi. Nello studio del moto di una carica in campi elettrico e magnetico incrociati abbiamo visto che il moto è la sovrapposizione di un moto circolare e di un moto traslatorio con la velocità di deriva (8.14)

$$\vec{u} = c \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}.$$

Passando dal sistema di laboratorio al riferimento in moto con velocità \vec{u} i campi diventano

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{B^2}(\vec{E} \times \vec{B}) \times \vec{B} = 0,$$

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{B^2}(\vec{E} \times \vec{B}) \times \vec{E} = \left(1 - \frac{E^2}{B^2}\right) \vec{B} \approx \vec{B}.$$

La prima uguaglianza è immediata; la seconda è conseguenza della condizione $E/B \ll 1$, necessaria per la validità dell'approssimazione non relativistica. La conclusione è che, nel sistema in moto con la velocità di deriva, la carica esegue un moto circolare uniforme perché il campo elettrico è assente!

9.2 Induzione elettromagnetica

I contributi più importanti all'indagine sperimentale sui fenomeni elettromagnetici in condizioni non stazionarie furono dati intorno al 1831 da Michael Faraday. Sommo sperimentale, Faraday viene ricordato per i numerosi risultati sia in Chimica che in Fisica ma la scoperta del fenomeno dell'induzione elettromagnetica è indubbiamente il più importante tra questi. A Faraday va anche riconosciuto il merito di aver capito che i campi elettrico e magnetico sono enti fisici reali e di aver sostenuto questa idea in un tempo in cui la concezione di azione a distanza prevaleva. In questo paragrafo, seguendo il metodo scelto per tutta l'esposizione, non cercherò di ricostruire il faticoso sviluppo storico delle idee ma piuttosto di presentare i fenomeni e le leggi relative nella maniera che, personalmente, ritengo più logica.



MICHAEL FARADAY
1791 – 1867

9.2.1 Corrente indotta in un circuito in moto

In un filo di materiale conduttore in moto in un campo magnetico statico si osserva una corrente indotta. Questo dato empirico viene facilmente interpretato applicando la legge di forza di Lorentz; infatti i portatori di carica presenti nel materiale, trascinati nel moto del conduttore, hanno una velocità media \vec{v} pari a quella del segmento di filo in cui transitano, e perciò sono soggetti alla forza

$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}. \quad (9.19)$$

Questa forza dà luogo a una corrente perché ha una circuitazione non nulla lungo il filo. Ricordando la (5.35), la forza elettromotrice nel circuito è per definizione

$$\mathcal{E} \equiv \frac{1}{q} \oint_{\Gamma_t} \vec{\mathcal{F}} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{c} \oint_{\Gamma_t} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}, \quad (9.20)$$

dove Γ_t è la curva che rappresenta la configurazione del filo all'istante t . Il suffisso t è necessario perché durante il moto, il filo coinciderà, in istanti diversi, con curve diverse. L'ultimo integrale nella formula scritta sopra può essere espresso in termini del flusso di \vec{B} concatenato alla curva Γ_t

$$\phi(t) = \int_{\mathcal{S}_t} \vec{B} \cdot d\vec{\mathcal{S}}, \quad (9.21)$$

dove \mathcal{S}_t è una delle superfici che hanno come bordo la curva Γ_t . Conviene tenere presente la discussione svolta nel § 6.4 a proposito del flusso di un vettore, in quel caso \vec{J} , concatenato a una curva chiusa. A differenza di \vec{J} , il vettore \vec{B} ha un flusso che dipende esclusivamente dalla curva Γ_t e non dalla scelta della superficie \mathcal{S}_t , anche in condizioni non stazionarie in virtù della solenoidalità del campo magnetico.

Per trovare l'espressione della forza elettromotrice indotta in termini del flusso del campo magnetico, osserviamo in primo luogo che, in virtù della identità vettoriale (6.34), dalla (9.20) si ha

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} \oint_{\Gamma_t} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{c} \oint_{\Gamma_t} (d\vec{\ell} \times \vec{v}) \cdot \vec{B}. \quad (9.22)$$

Si osservi ora la figura 9.1: in un intervallo di tempo dt il segmento di curva $d\vec{\ell}$ ‘spazza’ il parallelogramma di lati $\vec{v} dt$ e $d\vec{\ell}$ avente area

$$d\vec{S} = d\vec{\ell} \times (\vec{v} dt) = (d\vec{\ell} \times \vec{v}) dt.$$

Per una corretta interpretazione della figura, occorre ‘vederla’ tridimensionale; la spira viene verso chi guarda, con la velocità che spunta fuori della pagina. Perciò, la curva tratteggiata (Γ_{t+dt}) è in primo piano, mentre Γ_t è sullo sfondo.

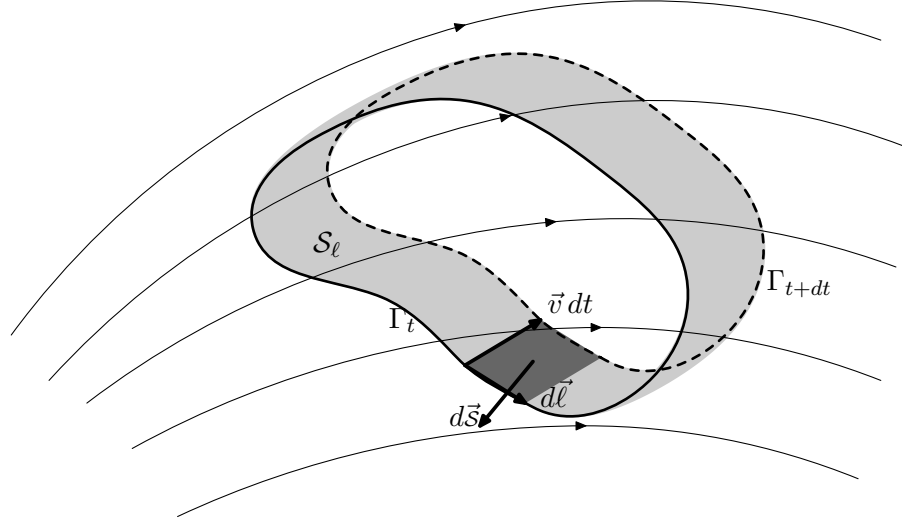


Figura 9.1: Circuito conduttore in moto in un campo magnetico.

Allora, moltiplicando ambo i membri della (9.22) per dt si ha

$$\mathcal{E} dt = \frac{1}{c} \oint_{\Gamma_t} \vec{B} \cdot (d\vec{\ell} \times \vec{v} dt) = \frac{1}{c} \int_{S_\ell} \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (9.23)$$

dove S_ℓ è la superficie tubolare spazzata dall'intero circuito nel moto dalla configurazione Γ_t alla configurazione Γ_{t+dt} , tratteggiata in figura (la superficie S_ℓ è rappresentata invece con una leggera ombreggiatura). Unendo questa superficie a due superfici S_t e S_{t+dt} orlate da Γ_t e Γ_{t+dt} (non rappresentate in figura ma facilmente immaginabili come i coperchi di una scatola di sardine) si ottiene una superficie chiusa; per la solenoidalità di \vec{B} deve essere

$$\int_{S_\ell} \vec{B} \cdot d\vec{S}_e + \int_{S_t} \vec{B} \cdot d\vec{S}_e + \int_{S_{t+dt}} \vec{B} \cdot d\vec{S}_e = 0. \quad (9.24)$$

Il suffisso $_e$ in questi integrali indica che l'elemento di superficie $d\vec{S}$ deve essere orientato verso l'esterno della regione dello spazio delimitato dalle tre superfici; osservando la figura (con sguardo tridimensionale!) si vede subito che sulla superficie S_ℓ questo verso è concorde con quello dell'integrale nella (9.23), su S_{t+dt} soddisfa la convenzione di segni per il flusso concatenato alla curva Γ_{t+dt} (orientata secondo $d\vec{\ell}$) mentre su S_t il verso è opposto a quello richiesto dalla convenzione levogira. Pertanto la (9.24) conduce a

$$\int_{\mathcal{S}_t} \vec{B} \cdot d\vec{S} - \phi(t) + \phi(t + dt) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathcal{S}_t} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \phi(t) - \phi(t + dt).$$

Sostituendo nella (9.22) otteniamo l'espressione della forza elettromotrice indotta nel circuito filiforme dal campo magnetico

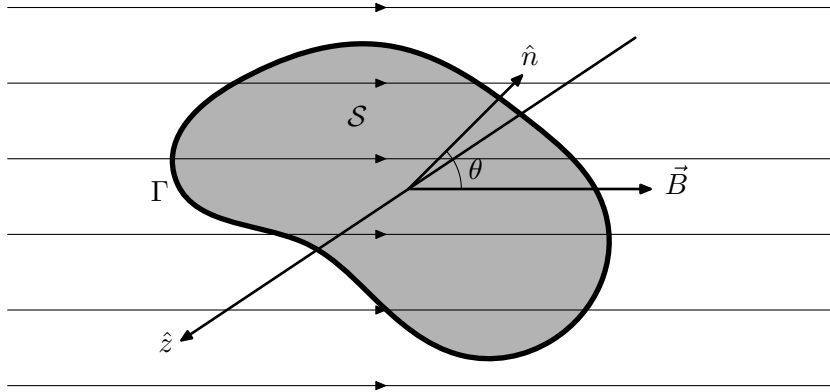
$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} \frac{\phi(t) - \phi(t + dt)}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d\phi}{dt}. \quad (9.25)$$

Per la legge di Ohm, questa forza elettromotrice genera una corrente nel filo pari a

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{cR} \frac{d\phi}{dt}. \quad (9.26)$$

Conviene soffermarsi sul significato del segno della forza elettromotrice e, di conseguenza, della intensità di corrente: segno positivo corrisponde a verso della corrente concorde con il verso scelto per orientare la curva Γ (vedi $d\vec{\ell}$ nella figura 9.1) mentre il segno negativo implica verso discorde.

Per mostrare l'importanza di questo segno consideriamo una semplice applicazione della legge di induzione (9.25); una spira piana di materiale conduttore ruota intorno a un asse fisso \hat{z} perpendicolare a \vec{B} , con velocità angolare costante ω , in un campo magnetico uniforme come mostrato nella figura sotto. Indicando con \mathcal{S} l'area della porzione di piano deli-



Anche questa figura deve essere 'vista' nello spazio: \vec{B} e \hat{n} si trovano nel piano del foglio, mentre l'asse \hat{z} punta fuori della pagina, verso chi osserva.

Figura 9.2: Schema concettuale dell'alternatore.

mitata da Γ , il flusso concatenato alla spira si esprime immediatamente come

$$\phi(\theta) = \mathcal{S}B \cos \theta,$$

dove θ è l'angolo tra \vec{B} e la normale \hat{n} al piano della spira. Assumendo per comodità l'origine dei tempi in un istante in cui $\theta = 0$, l'angolo varia nel tempo secondo la legge $\theta = \omega t$, e perciò la fem e la corrente indotte nella spira sono

$$\mathcal{E} = \frac{\omega}{c} \mathcal{S}B \sin \theta = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t), \quad I = \frac{\omega}{c} \frac{\mathcal{S}B}{R} \sin \theta = I_0 \sin(\omega t). \quad (9.27)$$

Abbiamo un esempio schematico di ‘*alternatore*’, un dispositivo che genera una forza elettromotrice che varia sinusoidalmente nel tempo. Gli alternatori, funzionanti secondo il principio illustrato sopra, anche se con una geometria molto più complessa, sono i dispositivi più importanti per la produzione di corrente: in ogni automobile moderna è presente un alternatore che fornisce la corrente di ricarica della batteria, nelle centrali elettriche alternatori producono l’energia elettrica che viene distribuita sia alle industrie che alle abitazioni. È interessante analizzare il semplice dispositivo della figura 9.2 dal punto di vista energetico; ricordando la (5.38), nel circuito viene dissipata per effetto Joule la potenza

$$\mathcal{E}I = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\mathcal{S}^2 B^2}{R} \sin^2 \theta.$$

A questo assorbimento di energia fa riscontro l’azione frenante esercitata dal campo magnetico sul circuito Γ percorso dalla corrente I . Infatti per la (7.17) il momento $\vec{\mathcal{M}}$ delle forze agenti sulla spira è

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{m} \times \vec{B} \quad \text{dove} \quad \vec{m} = \frac{I}{c} \mathcal{S} \hat{n},$$

e la semplice osservazione della figura 9.2 consente di verificare immediatamente che

$$\vec{\mathcal{M}} = -\frac{I}{c} \mathcal{S} B \sin \theta \hat{z} = -\left(\frac{\mathcal{S}^2 B^2}{c^2 R} \sin^2 \theta\right) \vec{\omega}.$$

La formula è stata scritta in modo da evidenziare che il verso di $\vec{\mathcal{M}}$ è opposto a quello di $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ e ciò implica, per la seconda equazione cardinale della dinamica dei corpi rigidi, che, in assenza di altre forze, la rotazione della spira rallenta fino alla quiete. Per mantenere la spira in moto uniforme occorre quindi applicare un sistema di forze esterne di momento totale $-\vec{\mathcal{M}}$. La potenza erogata da queste forze ‘motrici’ è

$$\mathcal{P} = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{\omega} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\mathcal{S}^2 B^2}{R} \sin^2 \theta,$$

che è proprio la potenza dissipata per effetto Joule. Per azionare gli alternatori sono necessari quindi dispositivi meccanici che possano fornire questa potenza; nelle automobili provvede il motore, nelle centrali elettriche sono necessarie turbine ad acqua o a vapore.

Queste considerazioni mostrano l’importanza del verso della corrente indotta in un circuito che si muove in un campo magnetico: una corrente che circolasse in verso opposto a quello stabilito dalla legge di induzione (9.25) sarebbe soggetta, nel campo magnetico, a forze acceleranti invece che frenanti; ciò porterebbe a una esaltazione delle variazioni di flusso, con conseguente ulteriore aumento della corrente e così via crescendo in un processo esplosivo. Il mondo sarebbe completamente diverso senza il segno negativo davanti alla derivata del flusso nella (9.25)! Questo punto merita di essere discusso in maniera intrinseca, prescindendo dal segno

nella formula che, dopo tutto, dipende dalla scelta della convenzione levogira nella definizione di flusso di \vec{B} concatenato a una curva chiusa. Osserviamo in primo luogo che la corrente I circolante nella spira genera un campo magnetico ‘secondario’ che si somma al campo magnetico ‘primario’, prodotto dalle sorgenti esterne; ovviamente, se la nozione di campo è valida, l’unica grandezza fisica rilevante per determinare localmente la forza agente su una carica è il campo totale, indipendentemente dalle sorgenti che lo hanno generato: resta inteso che, nel ragionamento svolto per giungere alla legge di induzione, \vec{B} è il campo magnetico *totale*. Tuttavia, la distinzione tra campo primario e secondario acquista un senso se si confrontano processi di induzione dello stesso campo esterno su circuiti differenti. Consideriamo per esempio circuiti della stessa forma e dimensioni, animati dallo stesso moto, ma di resistenza ohmica differente: per la (9.26), la corrente indotta è tanto più piccola quanto maggiore è la resistenza del circuito; nel limite di resistenza infinita, la corrente indotta è nulla e il campo secondario assente[†]. Possiamo quindi distinguere un flusso concatenato alla spira ‘primario’, determinato esclusivamente dal campo esterno, e un flusso ‘secondario’, del campo generato dalla corrente indotta. Ora invito il lettore a compiere una semplice ginnastica mentale: partendo dall’ipotesi che il flusso (totale) concatenato alla spira sia *crescente* e aiutandosi con l’osservazione della figura (9.1), verificare che il flusso secondario è *negativo*, qualsiasi ipotesi si faccia sul verso del campo primario. Il lettore molto diligente potrà anche verificare che, se il flusso totale *decresce*, il flusso secondario è *positivo*. Insomma, dalla legge di induzione si deduce il seguente corollario:

Legge di Lenz: Il verso della corrente indotta in un circuito è tale che il flusso secondario da essa generato è *opposto* alla *variazione* del flusso primario. In altre parole, l’induzione elettromagnetica in una spira conduttrice contrasta sempre le variazioni del flusso concatenato alla spira stessa.

La situazione limite in cui si manifesta la legge di Lenz è quella di un circuito superconduttore; se la resistenza è nulla, anche la forza elettromotrice deve essere nulla e perciò il flusso del campo magnetico concatenato a un circuito superconduttore non può variare: la corrente indotta in un circuito di resistenza nulla genera un campo secondario che compensa completamente le variazioni di flusso primario. Questo effetto è verificato con l’esperimento illustrato schematicamente nella figura 9.3. Un anello di materiale che manifesta superconduttività a bassa temperatura (per es. piombo) ha inizialmente una temperatura T superiore alla temperatura critica T_c e in esso non circola corrente. L’anello viene inserito tra le espansioni polari di un elettromagnete[‡] dove è presente un campo magnetico le cui linee di flusso sono state tracciate in figura soltanto nella regione vuota. La variazione di flusso concatenato all’anello genera una corrente, che però, una volta che il circuito viene fermato nella posizione indicata nella parte centrale della figura, si estingue rapidamente a causa della dissipazione ohmica. In questa posizione il flusso concatenato, cal-

[†]Questa approssimazione è stata adottata nell’esempio dell’alternatore, dove il flusso concatenato alla spira è stato calcolato tenendo conto esclusivamente del campo primario.

[‡]Questo dispositivo sfrutta l’elevatissima suscettività dei materiali ferromagnetici per ottenere campi magnetici intensi con correnti relativamente modeste.

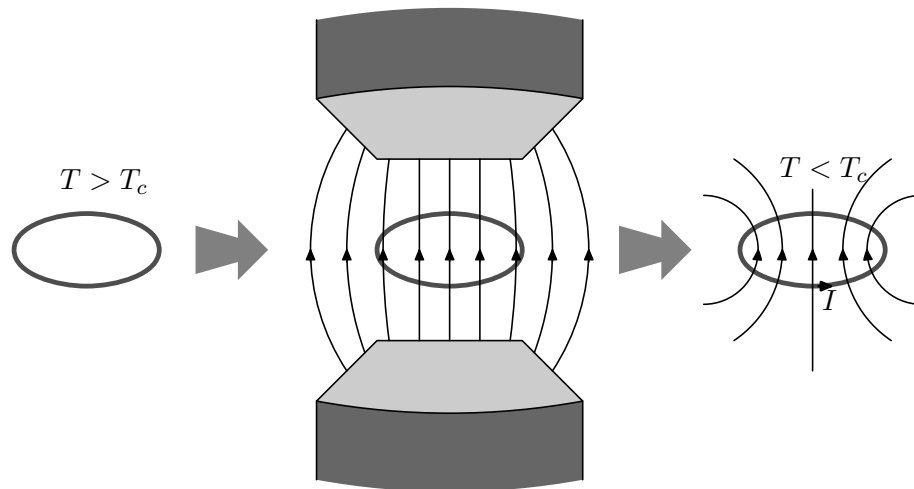


Figura 9.3: Induzione su un circuito superconduttore.

colato con una normale orientata verso l'alto, è semplicemente $\phi = \mathcal{S}B$, dove \mathcal{S} è l'area della porzione di piano delimitata dall'anello. A questo punto la temperatura viene abbassata al di sotto di T_c rendendo nulla la resistenza del circuito; se ora l'anello viene portato fuori del campo dell'elettromagnete (parte destra della figura), si induce una corrente I che genera un campo magnetico il cui flusso è esattamente pari a ϕ : il flusso secondario ha completamente cancellato la variazione di flusso primario. Convienne notare esplicitamente che il campo secondario ha una geometria del tutto diversa da quella del campo primario (si osservino le linee di flusso dei due campi abbozzate in figura); la compensazione avviene per i flussi, non per i campi.

Finché la temperatura viene mantenuta al di sotto di T_c , la corrente I permane costante senza smorzarsi (è stata osservata per anni!). Il processo è completamente reversibile: se l'anello viene riportato tra le espansioni polari dell'elettromagnete la corrente si annulla perché il flusso è prodotto interamente dal campo primario.

Un'analoga applicazione della legge di Lenz giustifica la conservazione del flusso concatenato all'orbita circolare di una particella, utilizzata nello studio del moto in un campo magnetico non uniforme. Una particella di carica q che percorre una traiettoria circolare, è assimilabile a una spira percorsa da una corrente $I = q/T$ (dove T è il periodo di rivoluzione) e di resistenza ohmica trascurabile. L'analogia con la spira superconduttrice non è perfetta perché, per una particella dotata di massa, la forza elettromotrice indotta nella spira non è obbligatoriamente nulla; tuttavia, se il campo magnetico varia lentamente, su distanze dell'ordine del raggio dell'orbita, gli effetti inerziali sono trascurabili e il flusso si conserva.

9.2.2 Induzione su un circuito in quiete

Il fenomeno dell'induzione, discusso nel paragrafo precedente, si osserva anche nel sistema di riferimento in cui il filo conduttore è in quiete. In questo riferimento gli avvolgimenti che generano il campo magnetico appaiono in moto con la velocità $-\vec{v}$. Utilizziamo, provvisoriamente, un apice per distinguere la grandezze misurate in questo nuovo riferimento, da quelle del sistema precedente. Anche nel sistema di quiete si osserva una corrente nel circuito e, in accordo con la (9.14), sarà[†] $I' = \gamma I$; nel circuito è presente quindi una forza elettromotrice

[†]Si tenga presente che qui il riferimento proprio è quello con l'apice.

$$\mathcal{E}' = \gamma \mathcal{E}. \quad (9.28)$$

Questa fem non può essere ricondotta alla forza esercitata dal campo magnetico perché i portatori di carica hanno ora velocità (media) nulla.

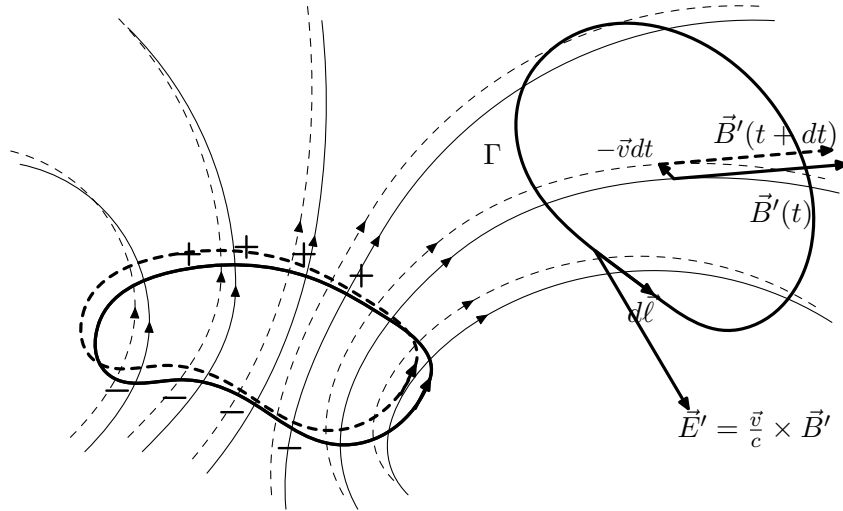


Figura 9.4: Circuito in quiete in un campo magnetico 'in moto'.

Tuttavia, per la legge di trasformazione dei campi (9.12), nel riferimento di quiete del circuito esiste un campo elettrico

$$\vec{E}' = \gamma \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} = \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}', \quad (9.29)$$

e perciò

$$\mathcal{E}' = \oint_{\Gamma} \vec{E}' \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{c} \oint_{\Gamma} (\vec{v} \times \vec{B}') \cdot d\vec{\ell}. \quad (9.30)$$

Anche in questo caso, la circuitazione di $\vec{v} \times \vec{B}'$ può essere espressa mediante la derivata rispetto al tempo del flusso di \vec{B}' concatenato alla spira

$$\mathcal{E}' = -\frac{1}{c} \frac{d\phi'}{dt'}. \quad (9.31)$$

La variazione del flusso di \vec{B}' è dovuta al fatto che, nel riferimento di quiete del circuito, le linee di flusso del campo magnetico si muovono come illustrato nella figura 9.4, dove la configurazione del campo all'istante t è disegnata con linee di flusso a tratto continuo e quella all'istante $t + dt$ con tratteggio. D'ora in avanti ci occuperemo solo di ciò che avviene nel sistema di riferimento proprio del circuito e pertanto verrà soppresso l'apice. La legge di induzione è valida anche nel riferimento proprio ma l'interpretazione del fenomeno è del tutto diversa rispetto al caso precedente: la forza che muove le cariche nel circuito è dovuta al campo elettrico e non al campo magnetico. Nel processo che stiamo analizzando, è facile individuare le sorgenti di questo campo elettrico: come osservato nella discussione della (9.18), dal momento che la distribuzione di correnti che genera il campo magnetico appare in moto, si manifesteranno cariche per la diversa contrazione delle distribuzioni positive e negative circolanti nei conduttori (vedi figura 9.4). Abbiamo osservato in più occasioni che il campo elettrico generato da cariche in moto non è irrotazionale. Ora, le (9.30) e (9.31), nel particolare processo esaminato, legano la circuitazione di \vec{E} , lungo una curva chiusa Γ , alla variazione nel tempo del flusso di \vec{B} , concatenato alla stessa curva

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{1}{c} \frac{d\phi_{\Gamma}(\vec{B})}{dt} \quad (9.32)$$

È naturale chiedersi se questa relazione ha validità generale oppure è limitata al caso di moto relativo tra le correnti che generano \vec{B} e il circuito conduttore in cui si osserva il campo elettrico. La risposta a questa domanda può essere fornita soltanto dall'esperimento, e si tratta di un esperimento cruciale perché decide della rilevanza della nozione di campo. Infatti, se davvero il campo in una regione dello spazio è l'ente che determina le azioni fisiche in quella regione, allora la (9.32) deve valere indipendentemente dal modo in cui è ottenuta la variazione nel tempo di \vec{B} . Consideriamo per esempio l'esperimento schematicamente descritto nella figura 9.5: una spira conduttrice è alimentata da un generatore che ha una fem variabile nel tempo e, di conseguenza, produce una corrente variabile anch'essa nel tempo. Di conseguenza, il campo magnetico prodotto dalla spira varia nel tempo e con esso varia il flusso concatenato al circuito Γ . Le condizioni fisiche di questo esperimento sono diverse dai casi studiati in precedenza perché, sia la spira che genera \vec{B} , sia il circuito Γ , sono in quiete. Il risultato dell'esperimento, eseguito per primo da Faraday[†], è che, anche in queste condizioni, si manifesta in Γ una corrente indotta che soddisfa la stessa legge trovata nei due casi precedenti. Abbiamo quindi la conferma che, il fenomeno dell'induzione su un circuito in quiete, dipende esclusivamente dalla variazione nel tempo del campo magnetico, indipendentemente dalle caratteristiche delle sorgenti che lo hanno generato. Osserviamo che, negli esperimenti illustrati dalle figure 9.4 e 9.5, il ruolo del circuito Γ è quello di 'corpo di prova' che serve a rivelare la presenza di un campo elettrico non conservativo; la resistenza di questo circuito deve essere molto grande, al limite infinita,

[†] In realtà, Faraday cercava di rivelare una corrente indotta in condizioni stazionarie, alimentando la spira con una batteria; i risultati furono nulli finché egli si accorse che l'effetto cercato si manifestava nei momenti in cui la batteria veniva collegata alla spira e quando veniva rimossa. Una magnifica esposizione degli esperimenti di Faraday, si trova nel testo di Berkeley citato nell'introduzione.

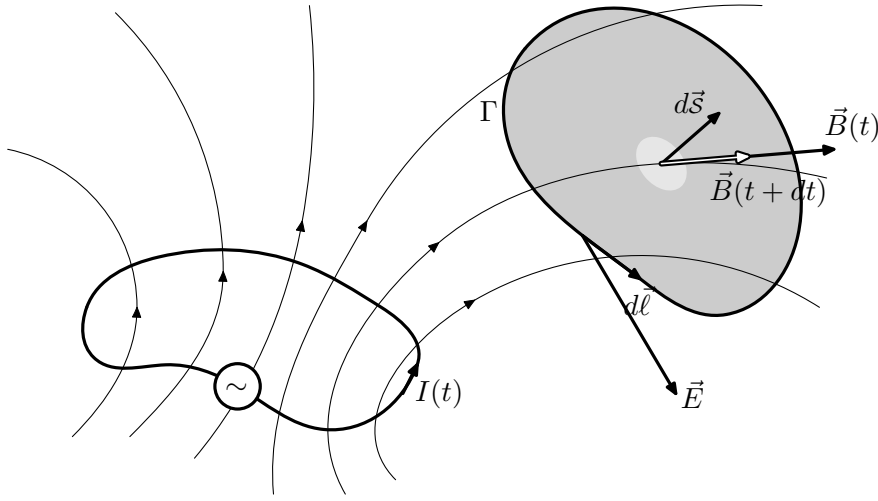


Figura 9.5: Circuito in quiete un campo magnetico variabile nel tempo.

in modo che la corrente indotta sia trascurabile e non generi un campo magnetico secondario.

In queste condizioni abbiamo una legge di circuitazione del campo elettrico *indipendente dalla presenza del circuito indotto*: se Γ è un percorso chiuso qualsiasi vale la legge generale

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (9.33)$$

LEGGE DI CIRCUITAZIONE DEL CAMPO ELETTRICO

dove S è una generica superficie di bordo Γ .

Questa legge è in accordo con tutti i fatti sperimentali noti, in tutte le condizioni, senza alcuna restrizione sulla variabilità dei campi nel tempo e nello spazio; essa ha quindi lo stesso ‘status’ di legge fondamentale dell’elettromagnetismo, al pari delle due leggi di flusso per \vec{E} e \vec{B} .

L’esito positivo dell’esperimento di figura 9.5 ha un’ulteriore implicazione: può esistere campo elettrico anche in assenza di cariche! Infatti, a differenza dell’esperimento di figura 9.4, il circuito sorgente del campo magnetico è in quiete, e perciò, pur essendo la corrente variabile nel tempo, si ha sempre compensazione tra le distribuzioni di cariche positive e negative. L’unica sorgente per il campo elettrico è la variazione nel tempo del campo magnetico. Per evidenziare questo punto riscriviamo la legge di induzione (9.33) invertendo l’ordine tra la derivata temporale e l’integrazione spaziale[†]

[†] L’inversione è lecita perché il dominio di integrazione S è fissato

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}. \quad (9.34)$$

Applicando il teorema di Stokes alla circuitazione di \vec{E} che compare a primo membro, abbiamo

$$\int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S},$$

e tenendo presente che la superficie S è arbitraria, ricaviamo la legge locale

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (9.35)$$

Si confronti questa legge con la forma locale della legge di circuitazione di Ampère (6.44): le due leggi si ottengono l'una dall'altra attraverso le corrispondenze:

$$\vec{B} \longleftrightarrow \vec{E}, \quad \vec{J} \longleftrightarrow -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (9.36)$$

La derivata rispetto al tempo del campo magnetico (con il segno cambiato), a meno del fattore 4π , irrilevante perché dipende dalla scelta delle unità, si presenta quindi come una sorta di densità di ‘corrente magnetica’[†] che genera un campo elettrico secondo la stessa legge per cui una corrente elettrica genera un campo magnetico. La differenza sostanziale tra le due leggi è la dipendenza dei campi dalla variabile tempo che non consente, in generale, di ricavare dalla (9.35) una formula analoga alla prima formula di Laplace. Questo punto verrà discusso più avanti, ma fin d'ora si può asserire che, in quanto sorgente di campo, la ‘corrente magnetica’, e *a fortiori* il campo magnetico, è un ente fisico tanto reale quanto la corrente elettrica e la carica elettrica.

Un'ultima osservazione importante riguarda le condizioni al contorno per il campo elettrico. Nel § 6.5 abbiamo trovato che la componente tangenziale del campo magnetico, su una distribuzione di corrente di superficie, in virtù della legge di circuitazione di Ampère, ha una discontinuità data dalla (6.33). Per il campo elettrico, l'analoga legge di circuitazione (9.34), non comporta discontinuità, perché la ‘corrente magnetica’ esiste solo come corrente di volume $-(1/4\pi)(\partial \vec{B}/\partial t)$. Pertanto la legge di continuità (2.7) per la componente tangenziale di \vec{E} , ha validità generale, nonostante il campo non sia conservativo.

9.3 La corrente di spostamento di Maxwell

Nella discussione delle leggi della magnetostatica (§ 6.4), abbiamo osservato che la legge di Ampère (6.27) è applicabile soltanto in condizioni stazionarie. Infatti, per il principio di conservazione della carica, la nozione di corrente concatenata a una curva chiusa γ , è univocamente definita solo se le distribuzioni di carica sono indipendenti dal tempo (vedi la (6.29)). Nella forma locale, per correnti di volume, della legge di Ampère

[†] Questa locuzione *non* è canonica e, a mia conoscenza, *non* è usata in letteratura, ma mi sembra appropriata.

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}, \quad (6.44)$$

la difficoltà si manifesta come una incompatibilità della (6.44) con l'equazione di continuità

$$\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (5.13)$$

Infatti, il campo vettoriale \vec{B} , per l'identità (6.42), è solenoidale

$$\text{div}(\text{rot } \vec{B}) \equiv 0,$$

mentre dalla legge di Ampère e dall'equazione di continuità si ricava

$$\text{div}(\text{rot } \vec{B}) \stackrel{?}{=} -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

La soluzione di questo problema venne trovata da Maxwell. Nell'equazione di continuità, usando la legge di Gauss, esprimiamo la densità di carica mediante la divergenza del campo elettrico; si ha

$$\text{div } \vec{J} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{E};$$

invertendo la derivata rispetto al tempo con l'operatore divergenza e raccogliendo i due termini a primo membro risulta

$$\text{div} \left(\vec{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0. \quad (9.37)$$

Maxwell propose di modificare la legge di Ampère aggiungendo alla corrente 'di conduzione' \vec{J} , la '*corrente di spostamento*'

$$\vec{J}_s \equiv \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (9.38)$$

con che, la legge generale di circuitazione del campo magnetico, valida in tutte le condizioni risulta essere

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (9.39)$$



JAMES CLERK
MAXWELL
1831 – 1879

QUARTA EQUAZIONE DI
MAXWELL

Questa legge viene indicata spesso come '*quarta equazione di Maxwell*' perché è l'ultima delle quattro equazioni che esprimono le leggi locali del campo elettromagnetico nel vuoto. Osserviamo che la corrente di spostamento[†] è del tutto analoga alla 'corrente magnetica' introdotta nella legge di induzione di Faraday e, come quella, non è dovuta al moto di particelle cariche; la (9.39) implica che le variazioni nel tempo di \vec{E} , sono sorgenti del campo magnetico, allo stesso titolo delle correnti di conduzione, e perciò altrettanto reali.

Il ragionamento di Maxwell è, probabilmente, l'esempio più classico di come si possa giungere alla formulazione di una legge fisica, non attraverso accumulo di dati sperimentali grezzi, ma facendosi guidare dalla

[†] Questa locuzione, introdotta da Maxwell, è universalmente adottata.

necessità di coerenza interna di una teoria in grado di interpretare i fenomeni noti. Ovviamente, la fisica è scienza empirica e quindi occorre verificare sperimentalmente la validità dell'ipotesi di Maxwell. Anche sotto questo aspetto la storia della corrente di spostamento è assai istruttiva; infatti, all'epoca in cui venne formulata questa ipotesi, non era disponibile nessuna evidenza empirica che potesse corroborarla o confutarla. Per sottoporre a controllo la quarta equazione fu necessario indirizzare l'indagine sperimentale in una direzione che nessuno aveva immaginato prima, andando ad esplorare domini dei parametri fisici completamente vergini. Vedremo più avanti che, in questo caso, è necessario studiare fenomeni variabili su una scala di tempi molto più breve di quelle accessibili alla fisica dell'ottocento; tali fenomeni verranno introdotti nel paragrafo che segue.

9.4 Equazioni di Maxwell e Onde Elettromagnetiche

L'insieme delle leggi del campo elettromagnetico nel vuoto si presenta come un sistema di quattro equazioni che vengono chiamate *'Equazioni di Maxwell'*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (9.40)$$

Osserviamo innanzitutto che, mentre in condizioni stazionarie le equazioni per \vec{E} e \vec{B} sono indipendenti, per cui può esistere un campo elettrico statico in assenza di campo magnetico e viceversa, in generale, i termini di 'corrente magnetica' e di corrente di spostamento stabiliscono un 'accoppiamento' tra i campi che non possono esistere indipendentemente l'uno dall'altro. Del resto, nel primo paragrafo abbiamo visto che le componenti di \vec{E} e \vec{B} sono le sei componenti distinte di un unico ente fisico che è il tensore elettromagnetico.

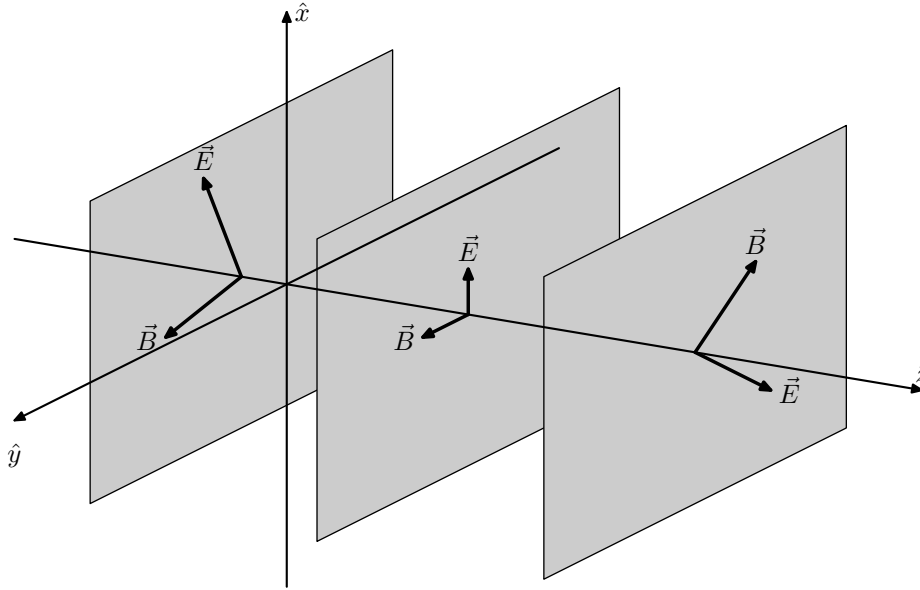
Dal punto di vista matematico le (9.40) costituiscono un sistema di equazioni a derivate parziali nelle funzioni incognite $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Nel caso statico abbiamo visto che, note le distribuzioni di carica ρ e di corrente \vec{J} in una regione \mathcal{V} , per individuare univocamente una soluzione occorre anche assegnare opportune condizioni al contorno sulla frontiera di \mathcal{V} . Per le equazioni di Maxwell, la presenza delle derivate dei campi rispetto al tempo comporta anche la necessità di assegnare condizioni iniziali, a un istante fissato, in tutta la regione \mathcal{V} . La discussione generale di questo tipo di problema esula dalle ambizioni del presente libro; ci

limiteremo solo all'esame di alcune soluzioni particolari, facili da ottenere ma di grande interesse per lo studio di una grande varietà di fenomeni.

Una importante famiglia di soluzioni sono le *onde elettromagnetiche*, configurazioni di campo elettromagnetico che si propagano nel vuoto alla velocità c . Una discussione molto più ampia delle onde elettromagnetiche verrà svolta nel prossimo capitolo; in questo paragrafo consideriamo il caso particolarmente semplice delle *onde piane*: assumiamo che, con una scelta opportuna di un sistema di coordinate cartesiane $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, i vettori \vec{E} e \vec{B} dipendano solo dalla coordinata z e dal tempo

$$\vec{E} = \vec{E}(z, t), \quad \vec{B} = \vec{B}(z, t).$$

Su ogni piano perpendicolare all'asse \hat{z} i campi sono uniformi; nella figura sotto sono tracciati tre di questi piani con i relativi vettori \vec{E} e \vec{B} , applicati nel punto di intersezione con \hat{z} , a rappresentare i valori dei campi in tutti i punti di ciascun piano. Ovviamente, nella figura il tempo è fissato e uguale per tutti i piani; in istanti diversi i campi avranno valori diversi.



Verifichiamo che soluzioni delle equazioni di Maxwell di questo tipo esistono in regioni prive di cariche e correnti; utilizzando l'espressione cartesiana degli operatori differenziali, le due equazioni di divergenza diventano

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (9.41)$$

Inoltre, le componenti secondo \hat{z} della terza e quarta equazione forniscono:

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0. \quad (9.42)$$

Pertanto, le componenti lungo \hat{z} di entrambi i campi sono uniformi e costanti; soluzioni di questo tipo le abbiamo già incontrate nello studio

dei campi statici e non sono di interesse nel presente contesto; assumiamo quindi

$$E_z = 0 \quad \text{e} \quad B_z = 0.$$

Restano da esaminare le quattro componenti E_x, E_y, B_x, B_y , per le quali, proiettando la terza e quarta equazione secondo gli assi \hat{x} e \hat{y} , devono valere le relazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} \end{cases} \quad (9.43) \quad \begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{cases} \quad (9.44)$$

Abbiamo due sistemi di equazioni indipendenti per le coppie di componenti (E_x, B_y) e (E_y, B_x) , che possono esistere indipendentemente l'una dall'altra. Consideriamo per il momento il caso in cui la seconda coppia di componenti è nulla e cerchiamo le soluzioni del sistema (9.43); derivando la prima equazione rispetto a z e la seconda rispetto a t si ha immediatamente

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 B_y}{\partial z \partial t} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 B_y}{\partial z \partial t} \end{cases}$$

da cui, sottraendo membro a membro, si ottiene un'equazione per la sola componente E_x :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}, \quad (9.45)$$

Questa equazione è identica alla familiare equazione per le oscillazioni di una corda elastica attraverso le corrispondenze

$$c \longleftrightarrow \sqrt{T/\mu}$$

$$E_x \longleftrightarrow \psi$$

dove T è la tensione della corda, μ la densità e ψ lo spostamento dalla posizione di equilibrio.

che è nota come *'equazione delle onde'*. La stessa equazione si trova, con analoghi passaggi, per la componente B_y . In effetti, in una regione priva di cariche e correnti, *tutte* le componenti di \vec{E} e \vec{B} devono soddisfare l'equazione delle onde; ciò può essere facilmente dimostrato in maniera del tutto generale, anche prescindendo dall'ipotesi di onde piane, ma è cosa di scarso interesse perché le sei equazioni che così si ottengono, sono sì indipendenti, ma *non* possono essere risolte indipendentemente dal momento che le equazioni di Maxwell pongono condizioni più restrittive. Per esempio, nel caso di onde piane che stiamo considerando, le componenti longitudinali, E_z e B_z , devono essere scelte in quella ristretta sottofamiglia di soluzioni dell'equazione delle onde che sono indipendenti da z e t . La soluzione della (9.45) può invece essere scelta in completa libertà. Come annunciato sopra, facciamo vedere che esistono soluzioni che si propagano con velocità c lungo l'asse \hat{z} . Indichiamo con $f(\xi)$ una generica funzione f della variabile indipendente ξ , definita in tutto l'intervallo reale e derivabile almeno due volte; allora la funzione

$$E_x^f(z, t) \equiv f(z - ct) \quad (9.46)$$

ottenuta come funzione composta di $f(\xi)$ e $\xi = z - ct$, è una soluzione dell'equazione delle onde; infatti, indicando come d'uso con f' e f'' le

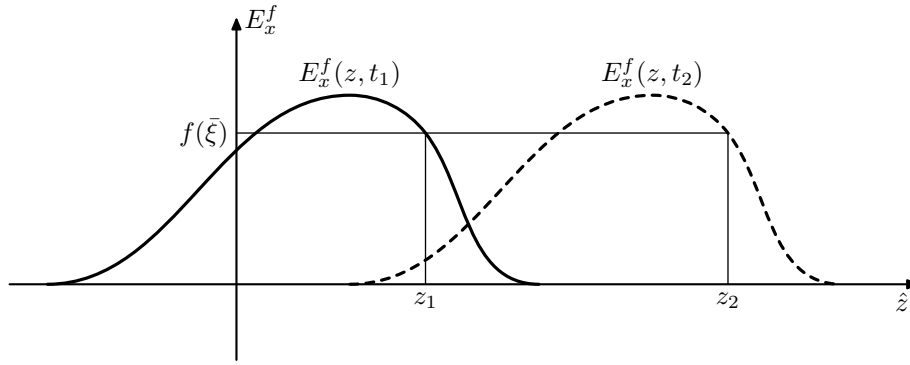
derivate prime e seconde di f rispetto a ξ , si ha subito

$$\frac{\partial E_x^f}{\partial z} = f', \quad \frac{\partial^2 E_x^f}{\partial z^2} = f''$$

e

$$\frac{\partial E_x^f}{\partial t} = -cf', \quad \frac{\partial^2 E_x^f}{\partial t^2} = c^2 f''.$$

La soluzione E_x^f rappresenta una configurazione di campo elettrico che si muove nel senso positivo dell'asse \hat{z} con velocità c . Questa affermazione può essere illustrata in maniera efficace disegnando i grafici di E_x^f come funzione di z , in due istanti diversi t_1 e t_2 .



Nella figura, la curva disegnata a tratto continuo rappresenta $E_x^f(z, t_1)$ mentre quella tratteggiata rappresenta $E_x^f(z, t_2)$; punti corrispondenti delle due curve sono quelli per cui la variabile ξ assume lo stesso valore

$$\bar{\xi} = z_1 - ct_1 = z_2 - ct_2 \quad \implies \quad z_2 = z_1 + c(t_2 - t_1).$$

Il ‘profilo’ $f(\xi)$ della configurazione di campo, nell’intervallo di tempo $t_2 - t_1$, subisce una traslazione rigida di $c(t_2 - t_1)$; questo tipo di onda viene detto ‘a profilo permanente’.

Il campo elettrico E_x non viaggia da solo ma è accompagnato da un campo magnetico B_y che viene facilmente trovato sostituendo la (9.46) nelle (9.43); si ha subito

$$\begin{cases} \frac{\partial B_y}{\partial t} = -cf'(z - ct) \\ \frac{\partial B_y}{\partial z} = f'(z - ct) \end{cases}$$

A meno di una costante additiva arbitraria (un campo costante e uniforme), la soluzione di questo sistema è evidentemente

$$B_y^f(z, t) \equiv f(z - ct) = E_x^f(z, t). \quad (9.47)$$

La soluzione che abbiamo trovata è un’onda ‘trasversale’ perché i campi puntano in direzioni perpendicolari alla direzione di propagazione \hat{z} .

D'ora in avanti, conformandoci a una notazione universalmente adottata, indicheremo con \hat{k} , invece che \hat{z} , il versore della normale ai piani di campo uniforme orientato nel verso in cui viaggia l'onda. Conviene usare una notazione che renda esplicita la direzione e il verso di propagazione; ciò può essere fatto osservando che, per un punto qualsiasi dello spazio, individuato dal vettore posizione \vec{r} , risulta

$$z = \hat{k} \cdot \vec{r}.$$

Allora la famiglia di soluzioni che si propaga con velocità c nella direzione e nel verso[†] di \hat{k} , sopprimendo l'apice f , si scrive:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = f(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct)\hat{x}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = f(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct)\hat{y}. \quad (9.48)$$

[†]Il caso di propagazione nel verso negativo dell'asse \hat{z} , in virtù della notazione adottata, è incluso nelle formule a lato come propagazione nel verso positivo di $\hat{k} = -\hat{z}$.

Osserviamo che i moduli dei campi sono eguali e che i versori $(\hat{E}, \hat{B}, \hat{k})$ costituiscono una terna ortogonale levogira. Ciò implica che, dato il campo elettrico, il campo magnetico è determinato da

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{k} \times \vec{E}(\vec{r}, t). \quad (9.49)$$

Questa proprietà è caratteristica delle onde elettromagnetiche piane e vale anche quando sono presenti le componenti E_y e B_x ; il lettore può verificare senza difficoltà che il sistema di equazioni (9.44) ha soluzioni del tipo

$$E_y^g(z, t) = g(z - ct), \quad B_x^g(z, t) = -g(z - ct),$$

e quindi la soluzione d'onda piana delle equazioni di Maxwell, che si propaga secondo \hat{k} , è data in generale da

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = f(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct)\hat{x} + g(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct)\hat{y} \quad (9.50)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = f(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct)\hat{y} - g(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct)\hat{x} \quad (9.51)$$

Da qui, per sostituzione, si verifica subito che la (9.49) è soddisfatta anche per questa soluzione generale. Pertanto, nella rappresentazione di un'onda elettromagnetica piana, è sufficiente assegnare il campo elettrico, senza che sia necessario scrivere esplicitamente il campo magnetico.

Maggiori dettagli sulle onde elettromagnetiche verranno forniti nel prossimo capitolo; per il momento soffermiamoci ancora brevemente sull'impatto che ebbe la teoria di Maxwell sulla fisica di fine 800. La previsione dell'esistenza di configurazioni di campo elettromagnetico viaggianti impresse all'indagine, sia teorica che sperimentale, la svolta di cui si è parlato alla fine del paragrafo precedente.

In primo luogo, occorre verificare sperimentalmente che tali onde esistono realmente in natura; questa prova dovette attendere vari anni e fu ottenuta da Heinrich Rudolf Hertz soltanto nel 1888. Il motivo per cui l'esperimento era così difficile da realizzare per la tecnologia ottocentesca, come verrà mostrato nel prossimo paragrafo, è che le scale dei tempi a cui si manifestano questi fenomeni sono molto brevi. La necessità di indagare su intervalli di tempo sempre più brevi ha stimolato una parte

importante dello sviluppo, sia scientifico che tecnologico, nel ventesimo secolo.

Un altro punto, non meno importante, è costituito dal seguente argomento di Maxwell a sostegno della propria teoria: le onde elettromagnetiche hanno tutte le proprietà della luce: capacità di propagarsi nel vuoto, stessa velocità di propagazione, carattere trasversale delle oscillazioni. Questa identificazione, di cui si discuterà nel prossimo capitolo, chiuse un plurisecolare dibattito sulla natura della luce. Alla teoria elettromagnetica della luce è dedicato il capitolo finale sull'ottica.

9.5 Processi quasi-stazionari

Le onde elettromagnetiche introdotte nel paragrafo precedente vengono prodotte da distribuzioni di cariche e correnti non stazionarie. Riservandoci di discutere nel prossimo capitolo la generazione delle onde, in questo paragrafo ci occupiamo di una vasta e importante categoria di fenomeni non stazionari per i quali gli effetti della corrente di spostamento *non* sono apprezzabili. Ciò si verifica quando le variazioni nel tempo delle grandezze elettromagnetiche sono sufficientemente *lente* in un senso che ora cercheremo di precisare con considerazioni elementari. Indichiamo con T la scala dei tempi su cui variano le cariche e le correnti. Tipicamente, si hanno andamenti nel tempo oscillatori, e allora T è il periodo di oscillazione, oppure monotoni, e allora si pone

$$\frac{1}{T} \equiv \left| \frac{1}{G} \frac{dG}{dt} \right|,$$

dove G è la grandezza (carica, o corrente) in considerazione. Questo tempo caratteristico di un processo non stazionario va confrontato con il ritardo del segnale che si propaga dal punto sorgente al punto campo che esprimeremo come

$$\tau = \frac{L}{c},$$

dove L è la dimensione massima della regione in cui si ha un campo apprezzabile. Per esempio, in un condensatore, L è determinato dalle dimensioni delle armature, in un solenoide è la lunghezza totale, in un circuito domestico è dato dalle dimensioni dell'edificio, etc. Tenendo presente il valore della velocità della luce, in dispositivi domestici o di laboratorio, difficilmente τ supera 10^{-8} secondi.

Un processo si dice '*quasi-stazionario*' se il ritardo del segnale è trascurabile rispetto alla scala di tempo del fenomeno

$$\tau \ll T. \quad (9.52)$$

Se questa condizione è soddisfatta, il contributo al campo magnetico della corrente di spostamento è trascurabile. Per vederlo, notiamo che

$$\text{rot } \vec{J}_s = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

Nell'ipotesi di quasi-stazionarietà (9.52), la derivata seconda di \vec{B} è piccola rispetto alle derivate prime che compaiono nelle equazioni di Maxwell, e possiamo quindi porre con buona approssimazione

$$\text{rot } \vec{J}_s \approx 0.$$

Ora, un campo irrotazionale può essere espresso come somma di campi centrali ed è facile convincersi che una distribuzione di corrente a simmetria sferica produce un campo nullo; infatti, l'unica direzione di \vec{B} che rispetta la simmetria sferica è quella radiale, ma, siccome il campo magnetico è solenoidale la componente radiale deve essere nulla.

Vale la pena di rilevare esplicitamente che lo stesso argomento non si applica alla legge di Faraday, perché la 'corrente magnetica'

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

non è irrotazionale neanche in condizioni quasi-stazionarie. È questo il motivo per cui fu relativamente semplice per Faraday osservare il fenomeno dell'induzione elettromagnetica, mentre la verifica sperimentale degli effetti della corrente di spostamento risulta molto più difficile.

Nel resto di questo paragrafo assumeremo, oltre alla condizione di quasi-stazionarietà, che T sia anche molto maggiore dei tempi di rilassamento dei materiali adoperati. Tenendo presente le valutazioni che abbiamo fatte per il tempo di rilassamento dei conduttori nel § 5.4, questa ulteriore condizione non è affatto restrittiva. Pertanto, restano valide tutte le leggi introdotte per le correnti stazionarie: la corrente in un conduttore filiforme continuerà ad avere lo stesso valore in tutte le sezioni, la legge di Ohm è ancora applicabile, etc.

9.5.1 Coefficienti di mutua e autoinduzione

Consideriamo due circuiti filiformi che distinguiamo con gli indici 1 e 2. Come mostrato nella figura 9.6 nel circuito 1 è inserita una fem variabile nel tempo che produce una corrente $I_1(t)$, mentre nel circuito 2 è inserito un voltmetro che misura la forza elettromotrice indotta \mathcal{E}_2 . Indichiamo con ϕ_{21} il flusso del campo \vec{B}_1 , prodotto da I_1 , concatenato al circuito 2

$$\phi_{21} \equiv \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}, \quad (9.53)$$

dove S_2 è una superficie orlata da γ_2 . Esprimendo \vec{B}_1 come rotore del potenziale vettore \vec{A}_1 , e usando il teorema di Stokes si può scrivere

$$\phi_{21} = \int_{S_2} \text{rot } \vec{A}_1 \cdot d\vec{S} = \oint_{\gamma_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell}_2, \quad (9.54)$$

dove $d\vec{\ell}_2$ è un elemento infinitesimo del circuito 2. Sostituendo ora nella formula l'espressione del potenziale vettore generato dalla corrente I_1 otteniamo

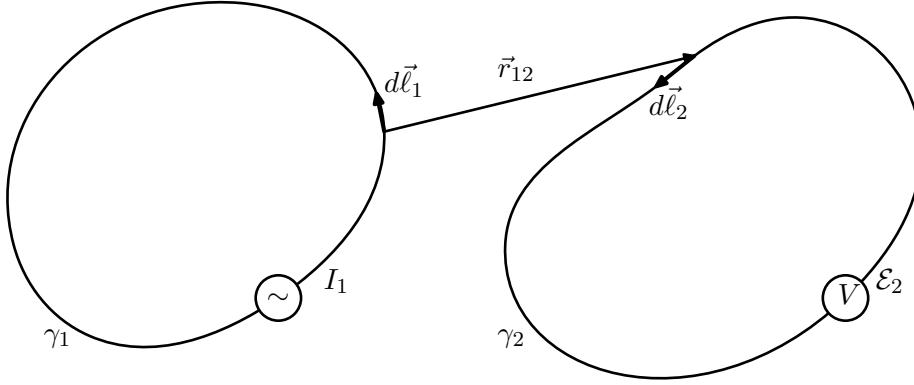


Figura 9.6: Mutua induzione tra due circuiti conduttori.

$$\phi_{21} = \frac{I_1}{c} \oint_{\gamma_2} \oint_{\gamma_1} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{r_{12}}. \quad (9.55)$$

Si osservi che ϕ_{21} dipende dal tempo esclusivamente attraverso $I_1(t)$; pertanto la forza elettromotrice indotta nel circuito 2 è espressa da

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{1}{c} \frac{d\phi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}, \quad (9.56)$$

dove il fattore

$$M_{21} \equiv \frac{\phi_{21}}{cI_1} = \frac{1}{c^2} \oint_{\gamma_2} \oint_{\gamma_1} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{r_{12}}, \quad (9.57)$$

che prende il nome di ‘*coefficiente di mutua induzione*’ tra il circuito 1 e il circuito 2, è una costante che dipende esclusivamente dalla geometria delle curve γ_1 e γ_2 . Il significato intuitivo del ‘coefficiente di mutua’ (come si usa chiamarlo in maniera colloquiale) è piuttosto evidente; esso misura il grado di accoppiamento elettromagnetico tra i due circuiti: a parità di variazione di corrente nel circuito 1, la forza elettromotrice indotta nel circuito 2 è tanto più grande quanto maggiore è M_{21} . Inoltre, osserviamo che i due circuiti si influenzano in maniera reciproca: se invertiamo i ruoli inserendo la fem nel circuito 2 e il voltmetro nel circuito 1 si ha

$$\mathcal{E}_{12} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt},$$

con il coefficiente M_{12} espresso da una formula eguale alla (9.57) con gli indici 1 e 2 scambiati. Per semplice ispezione di questa formula si rileva subito che vale la seguente ‘*proprietà di reciprocità*’ dei coefficienti di mutua

$$M_{12} = M_{21}. \quad (9.58)$$

Le dimensioni gaussiane del coefficiente di mutua sono immediatamente deducibili dalla (9.57) come (tempo)²/(lunghezza). Nel Sistema Interna-

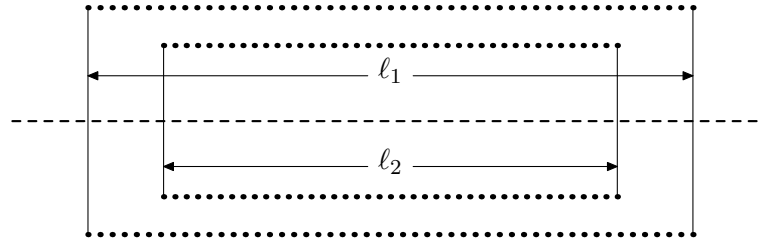
zionale l'espressione del coefficiente di mutua si scrive

$$M_{21} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\gamma_2} \oint_{\gamma_1} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{r_{12}},$$

[†]Da Joseph Henry, fisico americano contemporaneo di Faraday, che condusse indipendentemente ricerche sull'induzione

e l'unità di misura prende il nome di 'henry'[†]. Lascio come semplice esercizio la verifica che il fattore di conversione dal sistema gaussiano al SI è $(1/9) \times 10^{-11}$.

Il calcolo del coefficiente di mutua per circuiti di forma generica può risultare piuttosto complicato, ma la struttura della funzione integranda nella (9.57) si presta a qualche semplice considerazione di carattere generale. La presenza della distanza r_{12} a denominatore indica che il coefficiente di mutua è tanto più grande quanto più sono vicini i due circuiti; viceversa, nel caso limite in cui le dimensioni dei circuiti sono piccole rispetto alla distanza mutua, r_{12} è praticamente uniforme e l'integrale doppio nella (9.57) si fattorizza in due integrali di linea entrambi nulli. Inoltre il prodotto scalare a numeratore ha il suo massimo valore quando $d\vec{\ell}_1$ e $d\vec{\ell}_2$ sono paralleli; perciò, per ottenere un grande valore di M_{12} occorre che i due fili siano lunghi e corrano paralleli e vicini tra loro. Nella pratica ciò si realizza avvolgendo i fili a spirale su cilindri coassiali come solenoidi annidati uno dentro l'altro. Come esempio, calcoliamo il coefficiente di mutua induzione tra i solenoidi mostrati in sezione nella figura sotto.



Siano N_1 e N_2 il numero di spire e R_1 , R_2 i raggi; se le lunghezze ℓ_1 , ℓ_2 sono molto più grandi dei raggi possiamo utilizzare l'approssimazione del solenoide lungo. Il campo magnetico prodotto dal solenoide 1 è in modulo

$$B_1 = \frac{4\pi}{c} \mathcal{J}_1 = \frac{4\pi}{c} \frac{N_1 I_1}{\ell_1},$$

e diretto parallelamente all'asse dei solenoidi (tratteggiato in figura). Il flusso concatenato al solenoide 2 è quindi

$$\phi_{21} = N_2 \mathcal{A}_2 B_1 = \frac{4\pi}{c} \frac{N_1 N_2 \mathcal{A}_2}{\ell_1} I_1,$$

dove $\mathcal{A}_2 = \pi R_2^2$ è l'area della sezione del solenoide interno. Dalla (9.57) otteniamo allora

$$M_{21} = M_{12} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{N_1 N_2 \mathcal{A}_2}{\ell_1}. \quad (9.59)$$

Si osservi che la formula *non* contiene i parametri geometrici dei due circuiti in maniera simmetrica: la proprietà di reciprocità non deriva da una semplice simmetria spaziale.

Come osservato nella discussione della legge di Lenz, un circuito induce anche su se stesso; si definisce ‘*coefficiente di autoinduzione*’ o ‘*induttanza*’ di un circuito, il rapporto

$$L \equiv \frac{\phi}{cI}, \quad (9.60)$$

dove ϕ è il flusso, concatenato al circuito, del campo prodotto dalla corrente I che circola nel circuito stesso. In un circuito nel quale la corrente varia nel tempo, si induce una forza elettromotrice

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (9.61)$$

Nella definizione di induttanza non è applicabile la schematizzazione del circuito filiforme. Infatti, se si trascura la sezione del filo, il campo, in prossimità del filo stesso ha l’andamento di Biot-Savart e tende a infinito. Di conseguenza il flusso auto-concatenato a un filo è sempre infinito. Se si tiene conto della sezione non nulla del conduttore, questo problema non si presenta, ma il coefficiente di autoinduzione dipende dal modo in cui la corrente è distribuita all’interno del conduttore. Senza addentrarci in queste complicazioni osserviamo che, per le correnti di superficie, si ha una discontinuità del campo ma non si presentano divergenze. Questo è il caso del solenoide, che viene sì costruito avvolgendo un filo, ma è schematizzato matematicamente come una corrente di superficie di densità

$$\mathcal{J} = \frac{N}{\ell} I = nI.$$

Il coefficiente di autoinduzione di un solenoide lungo si ricava immediatamente dalla (9.59) identificando i due circuiti

$$L = \frac{4\pi}{c^2} \frac{N^2 \mathcal{A}}{\ell}. \quad (9.62)$$

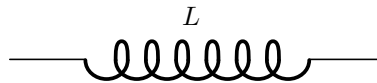
Avvolgendo un grande numero di spire si può ottenere un valore di L molto elevato. Per questo motivo una bobina costituita da molti avvolgimenti si dice un ‘*induttore*’.

9.5.2 Circuiti elettrici a parametri concentrati

Collegando tra loro, mediante fili conduttori, resistori, condensatori, induttori e generatori si possono assemblare vari tipi di circuiti per le più svariate applicazioni. Tali circuiti vengono detti ‘*a parametri concentrati*’ perché, usualmente, il ruolo dei fili di collegamento è soltanto quello di trasmettere la corrente da un elemento all’altro senza contribuire a determinare le caratteristiche del circuito. Per esempio si assume che la resistenza ohmica sia determinata solo dai resistori inseriti nel circuito,

trascurando il contributo dei fili di collegamento, l'induttanza è concentrata solo negli induttori presenti, trascurando il flusso di \vec{B} concatenato alle curve su cui si adagiano i fili di connessione, etc.

Lo *schema elettrico* di un circuito viene disegnato indicando i vari elementi mediante simboli grafici convenzionali; per generatori, resistori, e condensatori questi simboli sono stati già introdotti in precedenza, aggiungiamo ora il simbolo per gli induttori:



Consideriamo il seguente esempio di circuito ' LC ' ottenuto collegando un condensatore di capacità C e un induttore di induttanza L secondo lo schema rappresentato in figura 9.7. Inizialmente l'interruttore, mostrato

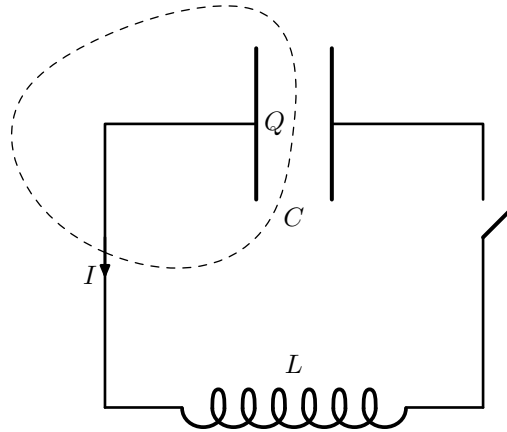


Figura 9.7: Il circuito oscillante.

nel collegamento di destra, è aperto e il condensatore è caricato a una tensione V_0 . L'interruttore viene chiuso in un istante che assumiamo come zero dei tempi e le cariche potranno muoversi attraverso il circuito dando luogo a una corrente. In un istante generico t , indichiamo con V la differenza di potenziale tra l'armatura di sinistra e quella di destra del condensatore, con Q la carica sull'armatura di sinistra e con I la corrente nel circuito, misurata secondo il verso indicato dalla freccia in figura. Assumendo il processo quasi-stazionario, il campo elettrico prodotto dalle cariche del condensatore è conservativo e vale ancora, in ogni istante, la relazione

$$Q(t) = CV(t). \quad (9.63)$$

Inoltre, applicando la legge di conservazione della carica alla superficie chiusa indicata in figura con un tratteggio, si ha

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = -C\frac{dV}{dt}. \quad (9.64)$$

Ora, avendo assunta trascurabile la resistività dei conduttori, per la legge di Ohm generalizzata e ricordando la (9.61) deve risultare

$$V - L \frac{dI}{dt} = 0. \quad (9.65)$$

Sostituendo in questa relazione la (9.64) si ottiene immediatamente una equazione differenziale per la funzione incognita $V(t)$

$$V + LC \frac{d^2 V}{dt^2} = 0, \quad (9.66)$$

che, con la posizione

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad (9.67)$$

viene immediatamente riconosciuta come l'equazione di un'oscillazione armonica

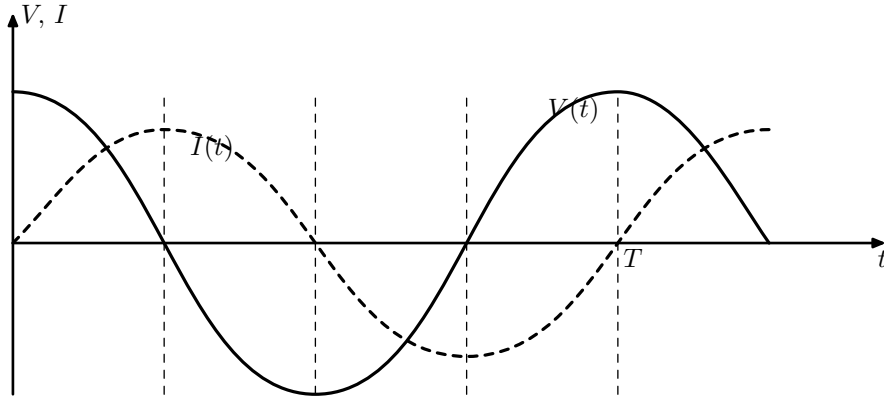
$$\frac{d^2 V}{dt^2} = -\omega_0^2 V. \quad (9.68)$$

La soluzione con la condizione iniziale $V(0) = V_0$, e corrente nulla a $t = 0$:

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_0 = 0,$$

ha la soluzione immediata

$$V(t) = V_0 \cos \omega_0 t \quad \Rightarrow \quad I(t) = I_0 \sin \omega_0 t \quad \left(I_0 \equiv V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \right). \quad (9.69)$$



Questa soluzione giustifica la denominazione di ‘circuitto oscillante’ data al circuito LC ; la tensione e la corrente oscillano periodicamente nel tempo e sono ‘sfasate’ di un quarto di periodo: quando la tensione è massima la corrente è nulla e viceversa. A posteriori, si deve verificare l’ammissibilità dell’ipotesi di quasi stazionarietà, confrontando il periodo di oscillazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

con il tempo che un segnale che viaggia a velocità c impiega per andare da un punto all’altro del circuito. Per esempio, assumendo $C =$

0.01 microfarad e $L = 100$ microhenry, che sono valori comuni di capacità e induttanza, si ha una scala di tempi dell'ordine dei microsecondi. Per un circuito avente dimensioni dell'ordine dei centimetri il ritardo del segnale è dell'ordine dei nanosecondi e perciò l'approssimazione quasi-stazionaria è pienamente giustificata.

Per capire perchè il circuito LC oscilla moltiplichiamo la (9.65) per I ; tenendo presente la (9.64) abbiamo

$$V \left(-C \frac{dV}{dt} \right) - L \frac{dI}{dt} I = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} CV^2 + \frac{1}{2} LI^2 \right) = 0.$$

Pertanto la la quantità

$$\frac{1}{2} CV^2 + \frac{1}{2} LI^2 = E, \quad (9.70)$$

è una costante del moto. Dal momento che $\frac{1}{2} CV^2$ è l'energia immagazzinata nel condensatore, è naturale interpretare il termine $\frac{1}{2} LI^2$ come energia immagazzinata nell'induttore e considerare quindi la (9.70) come espressione del principio di conservazione dell'energia. L'oscillazione del circuito appare come un continuo trasferimento di energia dal condensatore all'induttore e viceversa, del tutto analogo al trasferimento tra energia potenziale e cinetica in un oscillatore meccanico.

A conferma di questa interpretazione, osserviamo che l'energia immagazzinata nell'induttore

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2, \quad (9.71)$$

utilizzando la formula (9.62) dell'induttanza di un solenoide lungo, si può scrivere

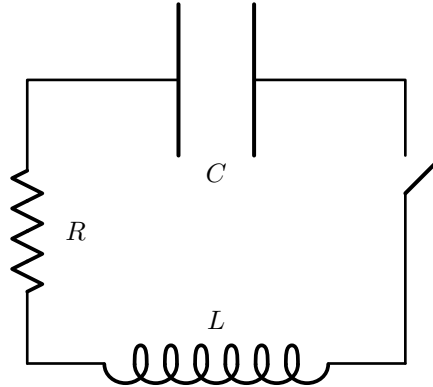
$$U_m = \frac{2\pi N^2 I^2 \mathcal{A}}{c^2 \ell} = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi NI}{c \ell} \right)^2 \mathcal{A} \ell.$$

Riconoscendo in $\mathcal{A} \ell$ il volume del solenoide e nella quantità tra parentesi il campo magnetico, arriviamo a una espressione per la densità di energia magnetica

$$u_m \equiv \frac{B^2}{8\pi} \quad (9.72)$$

del tutto analoga alla densità di energia del campo elettrico (2.42). La validità generale di ambedue le formule, per campi variabili nel tempo e nello spazio in maniera arbitraria, verrà stabilita nel prossimo paragrafo.

Una descrizione più realistica del circuito oscillante richiede che venga presa in considerazione anche la resistività dei conduttori; lo schema elettrico del circuito RLC sarà allora il seguente



In luogo della (9.65), la legge di Ohm generalizzata fornisce ora

$$V - L \frac{dI}{dt} - RI = 0. \quad (9.73)$$

Tenendo presente ancora una volta la (9.64) otteniamo ora per la funzione incognita $V(t)$ l'equazione

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right) \frac{dV}{dt} + \left(\frac{1}{LC}\right) V = 0, \quad (9.74)$$

Il lettore può compiere un utile esercizio verificando che L/R ha le dimensioni di un tempo sia nel sistema gaussiano che in quello internazionale; con la posizione

$$\tau = 2 \frac{L}{R}$$

e ω_0 definito come nel circuito LC , la (9.74) si scrive

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{dV}{dt} + \omega_0^2 V = 0, \quad (9.75)$$

che si riconosce subito come l'equazione di un moto armonico smorzato; nell'ipotesi che

$$\omega_0 \tau > 1 \quad \Rightarrow \quad R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (9.76)$$

l'integrale generale dell'equazione è

$$V(t) = A e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \phi), \quad (9.77)$$

con

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}. \quad (9.78)$$

I due parametri arbitrari A e ϕ vengono determinati imponendo le condizioni iniziali sul potenziale e sulla corrente. Ovviamente, non ci interessa risolvere un problema specifico; piuttosto è importante notare che la soluzione è ancora oscillatoria, sia pure con una frequenza ω inferiore a quella del caso senza smorzamento. La differenza importante con il circuito LC è che ora l'ampiezza di oscillazione si smorza esponenzialmente

nel tempo con un tempo caratteristico τ . Il motivo fisico di questo andamento è ben chiaro: la dissipazione ohmica nel resistore sottrae energia al campo elettromagnetico portando in tempi lunghi rispetto a τ alla ‘scarica’ del circuito.

Se la (9.76) non è soddisfatta il circuito non compie oscillazioni ma si scarica con legge esponenziale. Interessante è il caso limite in cui l'induttanza L è trascurabile. Dalla (9.73) si ottiene subito la seguente equazione del circuito RC

$$\frac{dV}{dt} + \left(\frac{1}{RC} \right) V = 0,$$

che ammette la soluzione

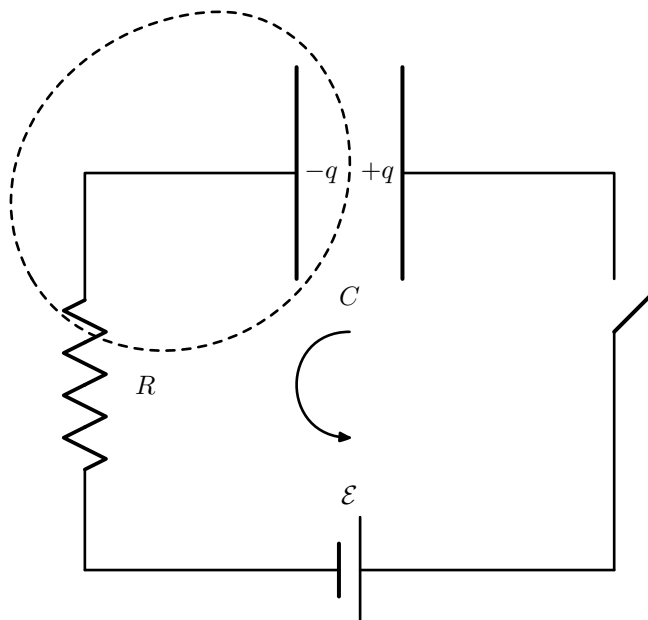
$$V(t) = V_0 e^{-t/\tau},$$

dove

$$\tau = RC.$$

Questo tempo caratteristico può essere piuttosto lungo anche per per circuiti di apparecchi domestici. Per questo motivo, anche se la spina è staccata, può essere pericoloso mettere le mani in un televisore.

Come ultima applicazione consideriamo il processo di carica di un condensatore mediante una pila.



Trascurando l'induttanza il circuito è rappresentato dal diagramma in figura. La circuitazione del campo elettrico, calcolata nel verso indicato dalla freccia curva in figura, è espressa da

$$V - \mathcal{E} + RI = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{C} - \mathcal{E} + R \frac{dq}{dt} = 0,$$

dove la carica all'istante generico t è stata indicata con q per distinguerla dalla carica finale $Q = C\mathcal{E}$. Si osservi che, applicando la legge di conservazione della carica alla superficie mostrata in figura con tratteggio, risulta

$$I(t) = -\frac{d(-q)}{dt} = \frac{dq}{dt}.$$

Si verifica facilmente che la soluzione dell'equazione del circuito che soddisfa la condizione iniziale $q(0) = 0$ è

$$q(t) = Q \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{con} \quad Q = C\mathcal{E}, \quad \tau = RC.$$

La carica cresce asintoticamente al valore finale elettrostatico su una scala dei tempi eguale a quella del processo di scarica. La corrente tende invece a zero con legge esponenziale

$$I(t) = \frac{Q}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau}.$$

Ora si può facilmente calcolare l'energia totale ceduta al resistore durante il processo di carica

$$U_R = \int_0^\infty RI^2 dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2} C\mathcal{E}^2.$$

L'energia dissipata per effetto Joule è indipendente dalla resistenza ed è pari all'energia finale del condensatore. Con ciò resta spiegato perché, come osservato nel § 3.2.4, il lavoro compiuto dalla pila è il doppio dell'energia che si ritrova accumulata nel condensatore.

9.6 Energia del campo elettromagnetico

Definiamo la densità di energia del campo elettromagnetico come la somma delle densità $u_e = E^2/8\pi$, calcolata per il campo elettrico statico, e $u_m = B^2/8\pi$, calcolata per il campo magnetico quasi-stazionario

$$u \equiv u_e + u_m = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2). \quad (9.79)$$

Verifichiamo che, grazie alle equazioni di Maxwell (9.40), questa definizione è appropriata anche nel caso di campi variabili nel tempo in maniera arbitraria. Consideriamo la derivata rispetto al tempo di u in un punto fissato dello spazio:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right).$$

Ricavando le derivate parziali rispetto al tempo di \vec{E} e \vec{B} dalle equazioni di Maxwell, con passaggi algebrici banali si ha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} \left(\vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B} - \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} \right) - \vec{E} \cdot \vec{J}.$$

Mediante l'espressione cartesiana degli operatori differenziali, si verifica facilmente la seguente identità, valida per qualsiasi coppia di funzioni vettoriali \vec{E} e \vec{B} :

$$\vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B} - \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} \equiv \text{div } (\vec{B} \times \vec{E}).$$

[†] John Henry Poynting (1852-1914), allievo di Maxwell. Allora, se si definisce il *vettore di Poynting*[†]

$$\vec{\mathcal{P}} \equiv \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}, \quad (9.80)$$

si ottiene, come corollario delle equazioni di Maxwell, il seguente

Teorema di Poynting

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\text{div } \vec{\mathcal{P}} - \vec{E} \cdot \vec{J}. \quad (9.81)$$

Per dare un'interpretazione fisica di questa legge, consideriamo dapprima il caso di una regione dello spazio priva di correnti: la (9.81) si riduce a

$$\text{div } \vec{\mathcal{P}} = -\frac{\partial u}{\partial t},$$

che è identica all'equazione di continuità (5.13) per la carica elettrica attraverso la corrispondenza

$$\vec{\mathcal{P}} \leftrightarrow \vec{J}, \quad u \leftrightarrow \rho.$$

Nelle condizioni indicate di assenza di corrente, il teorema di Poynting rappresenta quindi l'espressione della legge di conservazione dell'energia del campo elettromagnetico e il vettore di Poynting va interpretato come densità di flusso di energia per unità di tempo e per unità di superficie. Integrando l'equazione di continuità dell'energia su una regione \mathcal{V} e applicando il teorema della divergenza si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} u d\mathcal{V} \equiv \frac{dU_{\mathcal{V}}}{dt} = - \int_{\mathcal{S}} \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{\mathcal{S}},$$

dove \mathcal{S} è la frontiera di \mathcal{V} ; il primo membro di questa eguaglianza è la variazione per unità di tempo dell'energia elettromagnetica totale $U_{\mathcal{V}}$ contenuta in \mathcal{V} , mentre il flusso di \mathcal{P} a secondo membro è l'energia che fuoriesce per unità di tempo, cioè la potenza, attraverso la frontiera.

Nel caso più generale, dove sono presenti correnti, l'energia elettromagnetica non si conserva; nel § 5.4.2 abbiamo visto infatti che il termine $\vec{E} \cdot \vec{J}$, a secondo membro della (9.81), è la potenza (per unità di volume) erogata dal campo elettrico sulle cariche. Il teorema di Poynting costituisce quindi una relazione di bilancio tra l'energia perduta dal campo elettromagnetico e quella acquisita dalla materia attraverso il lavoro eseguito sulle particelle cariche. Integrando su una regione \mathcal{V} di frontiera \mathcal{S} abbiamo

$$\frac{dU_{\mathcal{V}}}{dt} + \int_{\mathcal{S}} \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{\mathcal{S}} = - \int_{\mathcal{V}} \vec{E} \cdot \vec{J} d\mathcal{V} \equiv -W_{\mathcal{V}}, \quad (9.82)$$

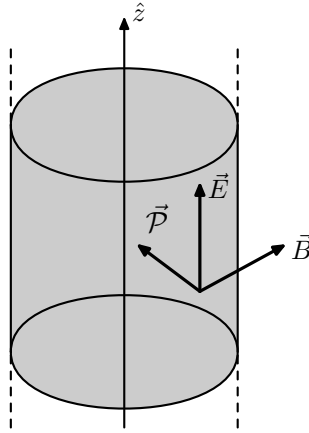
indicando con $W_{\mathcal{V}}$ la potenza assorbita dalla materia nella regione \mathcal{V} .

Come esempio, consideriamo un segmento di filo conduttore di lunghezza ℓ e sezione circolare di raggio a percorso da corrente stazionaria. Il primo termine nella (9.82) è nullo perché i campi sono anch'essi stazionari. Assumiamo, per semplicità, densità di corrente uniforme nella sezione. Per la legge di Ohm, il campo elettrico è anch'esso uniforme e vale in modulo

$$E = \rho J.$$

In un sistema di coordinate cilindriche con asse \hat{z} parallelo a \vec{E} , il campo magnetico ha la direzione e il verso del versore $\hat{\phi}$ e, a distanza r dall'asse, per la (6.30)

$$B = \frac{2I(r)}{cr} = \frac{2\pi r}{c} J.$$



Dall'osservazione della figura sopra si ricava che il vettore di Poynting ha componente radiale

$$\mathcal{P}_r = -\frac{1}{2} r \rho J^2.$$

Pertanto, solo la superficie laterale del cilindro contribuisce al flusso di energia; il calcolo dell'integrale di superficie nella (9.82) è immediato

$$\int_S \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{S} = -\pi a^2 \ell \rho J^2 = -\mathcal{V} \rho J^2,$$

che, per la (5.27) è proprio la potenza di Joule dissipata nel segmento di filo. Da ciò si può concludere che la potenza trasmessa da un circuito elettrico non è convogliata dal filo conduttore ma dal campo elettromagnetico a esso associato. Così si spiega come mai 'premendo l'interruttore, la luce si accende subito' (in realtà con un impercettibile ritardo dovuto alla velocità finita di propagazione del segnale), nonostante che la velocità di deriva dei portatori di carica sia quella di una lumaca. Insomma, i fili conduttori servono solo come 'sostegno e guida' per le sorgenti, ma l'energia viaggia con i campi. Nel prossimo capitolo vedremo che, in processi non stazionari, dei fili si può fare a meno.

Capitolo 10

Onde elettromagnetiche e Ottica

In questo capitolo verranno date le idee essenziali sulla generazione, propagazione e rivelazione delle onde elettromagnetiche. L'argomento è vastissimo e una trattazione esauriente richiederebbe ben più di un capitolo: basti pensare che, come accennato in precedenza, la luce è un'onda elettromagnetica e perciò i fenomeni ottici sono tutti compresi in quest'ambito. Inoltre, molti dei processi di interazione tra la radiazione elettromagnetica e la materia sfuggono a una descrizione classica e possono essere interpretati soltanto adottando uno schema quantistico. Nonostante questi limiti, la teoria elettromagnetica di Maxwell sviluppata nei capitoli precedenti consente di interpretare una ricca varietà di fenomeni e processi fisici di grande interesse in molti settori delle scienze naturali. Nei paragrafi che seguono l'attenzione sarà rivolta soprattutto ai fenomeni ottici.

10.1 Generazione delle onde elettromagnetiche

Riprendiamo la discussione del campo prodotto da una carica in moto del paragrafo 4.6. Nel caso in cui la carica ha velocità costante, abbiamo visto che il campo è radiale e quindi, pur essendo un campo variabile nel tempo, non ha le caratteristiche di trasversalità delle onde e.m. né trasporta informazione. Il campo trasversale viene prodotto da una variazione di velocità come indicato qualitativamente nella figura 4.12. Vogliamo ora trovare un'espressione analitica per il campo nella zona della piegatura delle linee di flusso mostrato nella 4.12c. Non ricaveremo l'espressione generale che è molto complicata (vedi nota a pagina 124) ma ci limitiamo a una semplice approssimazione, adeguata allo studio dell'ottica, valida nelle seguenti ipotesi:

1. la carica si muove in una regione limitata dello spazio di dimensioni molto più piccole della distanza tra la carica stessa e il punto campo;

2. la velocità della carica è sempre piccola rispetto alla velocità della luce: $v \ll c$.

Si verifica subito che ambedue queste condizioni sono soddisfatte da un elettrone in una molecola. Infatti il moto si svolge in una regione di dimensioni dell'ordine di $a \approx 10^{-8}\text{cm}$ che è piccola su scala macroscopica. Ciò comporta che potremo assumere la distanza \vec{r} tra la carica e il punto campo sia indipendente dal tempo: in altre parole la carica, pur essendo accelerata occupa una posizione fissata nello spazio.

Per quanto riguarda la seconda condizione, nel § 7.2 abbiamo visto che l'ordine di grandezza delle velocità degli elettroni negli atomi è 10^8cm/s rispetto al valore di $c = 3 \times 10^{10}\text{cm/s}$. Si verifica facilmente che per questi valori della velocità il fattore angolare nella (4.18) non differisce dall'unità fino alla sesta cifra decimale. Pertanto il campo elettrico nelle regioni in cui non c'è piegatura delle linee di flusso in figura 4.12c è con ottima approssimazione coulombiano.

Consideriamo ora una carica puntiforme q , in quiete in un punto O dello spazio fino all'istante $t = 0$, che parte con accelerazione costante \vec{a} . Dopo un tempo Δt l'accelerazione termina e la carica continua a muoversi con la velocità costante $\vec{v} = \vec{a}\Delta t$. Nella Figura 10.1 sono rappresentate alcune linee di flusso di \vec{E} a un istante $t \gg \Delta t$. La distanza $\frac{1}{2}a\Delta t^2$, percorsa dalla carica durante la fase di accelerazione, è trascurabile rispetto alla distanza vt percorsa successivamente a velocità costante ed è a maggior ragione trascurabile rispetto al raggio $r = ct$ della sfera che delimita internamente la regione (II) della figura 10.1. Pertanto questa distanza non è rappresentata in figura né considerata nei calcoli. All'istante t nella regione (II) l'informazione che la carica ha accelerato non è ancora arrivata e le linee di flusso sono quelle di un campo coulombiano q/r^2 con il centro in O . Nella regione (I), interna alla sfera di raggio $r - \Delta r = c(t - \Delta t)$, il campo è quello di una carica in moto uniforme con velocità v che, per l'ipotesi $v \ll c$, non differisce apprezzabilmente dal campo coulombiano con il centro nel punto O' . Sappiamo

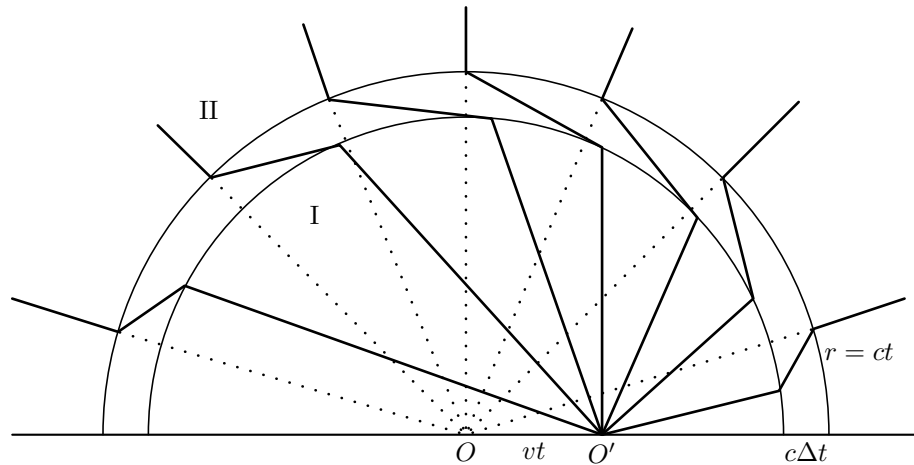


Figura 10.1: Campo di una carica accelerata

quindi tracciare le linee di flusso di \vec{E} nelle regioni (I) e (II). Ricordando le considerazioni svolte nel §4.6 il criterio per connettere le linee di flusso delle due regioni è dato dall'equazione (4.16)

$$\tan \theta' = \gamma \tan \theta,$$

che, in vista del fatto che $\gamma \approx 1$, implica semplicemente che ciascuna linea della zona (I) si connette alla linea della zona (II) che forma un uguale angolo con la direzione di \vec{v} . La figura 10.1 illustra questa semplice geometria; si tenga comunque presente che nel disegno, per rendere evidente la piegatura delle linee di flusso, le condizioni $v \ll c$ e $\Delta t \ll t$ non sono rispettate: i segmenti $\vec{v}t$ e $c\Delta t$ appaiono di lunghezza comparabile con $r = ct$, ma sono in realtà molto più piccoli.

Come osservato nel paragrafo §4.6, nella zona del segnale, compresa tra le due sfere di raggi $c(t - \Delta t)$ e ct , il campo, oltre alla componente radiale, normale alle superfici, ha una componente trasversale, tangenziale alle sfere. Indicheremo con E_{\parallel} e \vec{E}_{\perp} queste due componenti. Le due sfere costituiscono superfici di discontinuità per il campo ma, per la legge di Gauss, la componente normale E_{\parallel} è continua dal momento che sulle sfere non vi sono cariche. Pertanto, all'interno della corona sferica si ha

$$E_{\parallel} = \frac{q}{r^2}.$$

Questa componente del campo elettrico è costante nel tempo e non svolge alcun ruolo nella propagazione del segnale; essa ci è utile solo per calcolare la componente trasversale e per il resto verrà ignorata. Osserviamo infatti che il rapporto E_{\perp}/E_{\parallel} può essere facilmente determinato dalla inclinazione della linea di flusso. Dalla figura 10.2, dove per chiarezza si è disegnata soltanto una linea di flusso, risulta evidente che

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{vt \sin \theta}{c\Delta t},$$

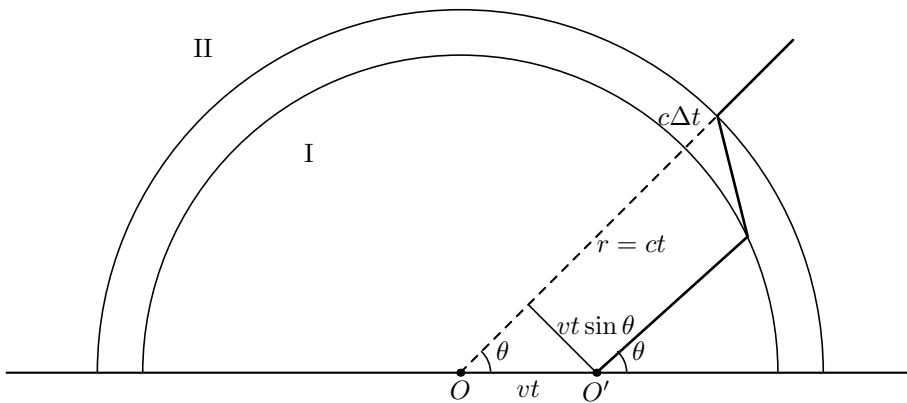


Figura 10.2: Calcolo della componente trasversale di \vec{E}

dove θ è l'angolo che le linee di flusso da raccordare formano con \vec{v} . Tenendo presente che $v = a\Delta t$ e $t = r/c$ si ottiene

$$E_{\perp}(t) = \frac{a(0)r \sin \theta}{c^2} E_{\parallel} = \frac{qa(0) \sin \theta}{c^2 r}.$$

Notare che il campo E_{\perp} (l'effetto) è calcolato all'istante t , mentre l'accelerazione a (la causa) è calcolata all'istante $0 = t - r/c$ (tutte le altre grandezze sono costanti). Ora, l'ipotesi che l'accelerazione sia nulla prima e dopo l'intervallo Δt non è in alcun modo necessaria per la validità del risultato ottenuto; perciò, se l'accelerazione varia in maniera continua nel tempo possiamo scrivere la formula in maniera più generale

$$E(\vec{r}, t) = \frac{qa(t - r/c) \sin \theta}{c^2 r},$$

dove il pedice \perp è stato soppresso perché d'ora in avanti ci interesseremo solo della componente trasversale del campo. Notiamo inoltre che θ è l'angolo tra \vec{a} e \vec{r} . Ricordando la definizione (2.5) di componente tangenziale di un vettore definiamo

$$\vec{a}_{\perp} = \hat{r} \times (\vec{a} \times \hat{r}).$$

Questo vettore è la componente dell'accelerazione tangenziale alla sfera con centro nella carica che ha appunto normale \hat{r} . Con questa definizione si verifica facilmente che il campo di radiazione può essere espresso in forma vettoriale

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{q\vec{a}_{\perp}(t - r/c)}{c^2 r}. \quad (10.1)$$

Convien soffermarsi a considerare le caratteristiche di \vec{E} ricavabili da questa formula:

- la dipendenza da $t' = t - r/c$ implica un'onda sferica che si espande radialmente a velocità c ;
- in ogni punto, la direzione di \vec{E} è perpendicolare alla direzione di propagazione \hat{r} ;
- il modulo di \vec{E} decresce come $1/r$;
- il modulo dipende dall'angolo tra la direzione dell'accelerazione e la direzione di osservazione: nella direzione di \vec{a} non si osserva nessun campo; viceversa, perpendicolarmente ad \vec{a} , il campo è massimo;
- infine, il segno negativo davanti alla frazione esprime il fatto che, per una carica q positiva il campo di radiazione \vec{E} punta in verso opposto a quello della componente trasversale dell'accelerazione.

Come abbiamo visto nel § 9.4, alla propagazione di un campo elettrico è associata la propagazione di un campo magnetico. Per determinarne l'espressione si può fare un ragionamento del tutto simile a quello svolto

per il campo elettrico, ma ciò, nell'approssimazione che stiamo considerando, non è necessario; infatti per grandi valori di r l'onda (10.1), localmente, non differisce in maniera apprezzabile da un'onda piana. La (9.49) fornisce immediatamente

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{r} \times \vec{E}(\vec{r}, t). \quad (10.2)$$

Il fatto che, noti la direzione di propagazione e il campo elettrico, il campo magnetico è automaticamente determinato dalla (10.2) permette di descrivere l'onda elettromagnetica facendo riferimento al solo campo elettrico. In linea di principio si potrebbe scegliere il campo magnetico come 'rappresentante' dell'onda e determinare \vec{E} da \vec{B} , ma è consuetudine accordare questo privilegio al campo elettrico.

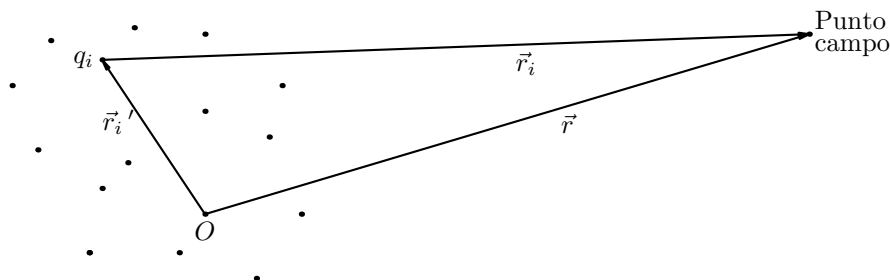
10.2 Radiazione di dipolo

Nel caso di una collezione di cariche accelerate, il campo di radiazione, per il principio di sovrapposizione, è la somma dei campi prodotti da ciascuna carica secondo la (10.1); indicando con \vec{r} il vettore che individua il punto campo rispetto a un'origine scelta a piacere e con $\vec{r}_i = \vec{r} - \vec{r}'_i$ il vettore che va dalla carica q_i al punto campo si ha:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_i \frac{-q_i \vec{a}_{i\perp}(t - r_i/c)}{c^2 r_i}. \quad (10.3)$$

In linea di principio, note le posizioni e le accelerazioni delle singole cariche, questa formula consente di calcolare il campo di radiazione nell'approssimazione valida per l'ottica. Però, come evidenziato fin dal primo capitolo, nello studio di problemi concreti il numero di cariche è così grande che il calcolo 'esatto' della somma a secondo membro della (10.3) è praticamente impossibile. Si rende quindi necessario dotarsi di uno schema di approssimazione della somma (10.3) che consenta di effettuare concretamente il calcolo. Una prima semplificazione è consentita dal fatto che spesso le cariche si muovono in una regione di dimensioni piccole rispetto alla distanza del punto campo (questo vale non solo per le cariche in un atomo o in una molecola ma anche per le cariche che circolano in un'antenna radio o televisiva); in questo caso possiamo assumere che tutte le cariche abbiano la stessa distanza dal punto campo; scegliendo l'origine delle coordinate nella regione in cui si trovano le cariche si ha

$$\vec{r}_1 \approx \vec{r}_2 \approx \dots \approx \vec{r}.$$



Questa considerazione geometrica è valida per le distanze r_i a denominatore nella (10.3) ma non implica necessariamente che tutti i ritardi r_i/c possano essere assunti eguali a r/c : le differenze tra i ritardi $(r_i - r)/c$ vanno confrontate con la scala dei tempi di variazione delle accelerazioni. Per esempio, se le cariche oscillano armonicamente, tutte con lo stesso periodo di oscillazione T , la condizione per poter assumere i ritardi tutti eguali è

$$(r_i - r)/c \ll T \quad \Longleftrightarrow \quad r_i - r \ll cT. \quad (10.4)$$

Il significato della disuguaglianza a sinistra è che nel tempo in cui il segnale viaggia attraverso il sistema le accelerazioni delle cariche non variano in maniera significativa; la relazione, algebricamente equivalente, a destra, impone che il sistema delle cariche abbia dimensioni trascurabili rispetto alla lunghezza cT di cui vedremo il significato nel prossimo paragrafo; per il momento si giustifica la denominazione di *sorgente puntiforme* per un sistema di cariche che soddisfa la (10.4). In questa approssimazione si ha

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c^2 r} \sum_i q_i [\vec{a}_i(t - r/c)]_{\perp}.$$

Sopprimendo l'apice dal vettore posizione \vec{r}_i della carica i -esima si ha

$$\vec{a}_i = \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2},$$

e quindi

$$\sum_i q_i \vec{a}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i q_i \vec{r}_i = \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{p}},$$

dove \vec{p} è il momento di dipolo della distribuzione di cariche. Abbiamo quindi che, nei limiti indicati sopra, il campo di radiazione a grande distanza da un sistema di cariche si esprime in termini della derivata seconda del momento di dipolo totale della distribuzione

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\ddot{\vec{p}}_{\perp}(t - r/c)}{c^2 r} \quad (10.5)$$

Si osservi che per l'applicazione di questa formula non si richiede che la carica totale sia nulla; dal momento che la carica è invariante non c'è radiazione di monopolo. D'altra parte, anche se \vec{p} dipende dalla scelta dell'origine, la derivata rispetto al tempo è intrinseca come si vede immediatamente dalla (3.27).

Consideriamo in particolare un sistema di cariche il cui momento di dipolo oscilla armonicamente nel tempo secondo la legge:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \cos(\omega t),$$

con ovvio significato dei simboli. Questo è il caso, particolarmente interessante, di un sistema che è stato perturbato da una posizione di equilibrio stabile. Applicando la (10.5) si ricava che anche il campo di

radiazione a grande distanza dalla distribuzione di cariche oscilla nel tempo con la stessa frequenza ω e un *ritardo di fase* $\phi = \omega r/c$:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cos[\omega(t - r/c)] = \vec{E}_0(\vec{r}) \cos(\omega t - \phi), \quad (10.6)$$

dove l'ampiezza del campo è

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = -\frac{\vec{p}_{0\perp} \omega^2}{c^2 r}. \quad (10.7)$$

Si noti che la direzione di \vec{E}_0 , in un punto fissato dello spazio, è fissata

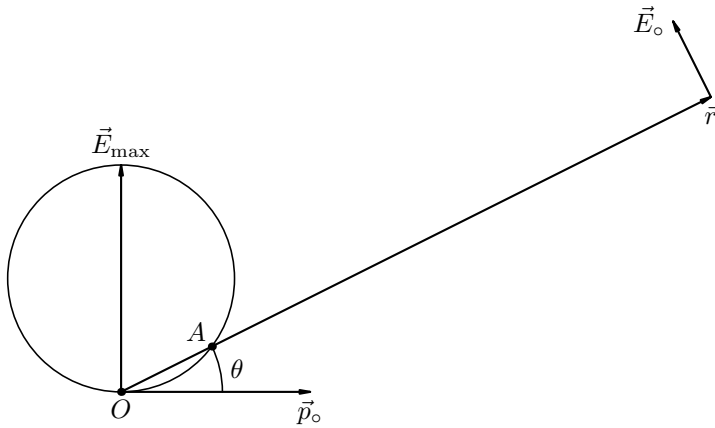


Figura 10.3: Campo di radiazione di un dipolo oscillante.

e coincide con quella di $\vec{p}_{0\perp}$; dalla definizione di componente trasversale si ha che $\vec{E}_0(\vec{r})$ giace nel piano individuato dai vettori \vec{r} e \vec{p}_0 ed è perpendicolare a \vec{r} . La geometria è illustrata nella figura 10.3. Un'onda elettromagnetica in cui il campo elettrico ha una direzione fissata nel tempo si dice *'polarizzata linearmente'*[†].

Il modulo dell'ampiezza E_0 dipende dall'angolo θ tra \vec{r} e \vec{p}_0 secondo la legge

$$E_0(\theta) = E_{\max} \sin \theta,$$

dove

$$E_{\max} = \frac{p_0 \omega^2}{c^2 r},$$

è l'ampiezza di oscillazione del campo in direzione perpendicolare a \vec{p}_0 . Questa dipendenza angolare del campo viene rappresentata graficamente mediante un *diagramma polare*: su ogni semiretta uscente dall'origine si stacca un segmento OA di lunghezza proporzionale a $E_0(\theta)$ ottenendo una curva (disegnata a tratto sottile nella Figura 10.3) che da visivamente l'andamento dell'ampiezza al variare della direzione.

Un esempio interessante di sistema che oscilla armonicamente è l'antenna dipolare rappresentata in figura 10.4. Un generatore alternato ad alta frequenza (ω dell'ordine di $10^8 - 10^9$ rad/sec) produce una corrente oscillante che dà luogo a un accumulo di cariche Q e $-Q$ sulle due sfere rappresentate con circoletti. Indicando con q il valore massimo di Q si

[†]Per esempio, le onde E^f e E^g discusse nel § 9.4 sono polarizzate linearmente con il campo elettrico che oscilla secondo l'asse \hat{x} e \hat{y} rispettivamente.

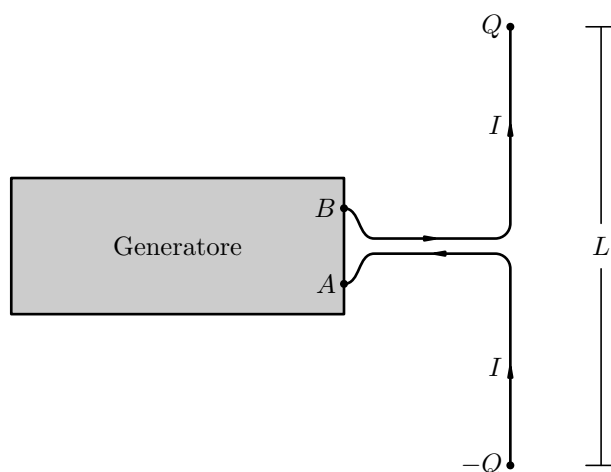


Figura 10.4: Antenna dipolare

ha $Q(t) = q \cos \omega t$. Abbiamo allora una distribuzione di cariche con un momento di dipolo che varia armonicamente nel tempo secondo la legge

$$p = qL \cos \omega t,$$

e quindi un'onda elettromagnetica che, a grande distanza dell'antenna, è data dalle (10.6), (10.7). La prima dimostrazione sperimentale di generazione di onde elettromagnetiche fu ottenuta da Hertz nel 1888 mediante un'antenna di questo tipo. Antenne dipolari sono usate ora comunemente per trasmissioni radio, TV, cellulari etc.

L'approssimazione di dipolo è ovviamente applicabile anche alla radiazione emessa dagli atomi o dalle molecole. Come abbiamo visto nello studio della polarizzabilità atomica queste strutture microscopiche in assenza di forze esterne hanno una configurazione elettrica di equilibrio caratterizzata da un ben definito valore del momento di dipolo (eventualmente nullo). La collisione con altri atomi o molecole o una qualsiasi causa perturbatrice altera la distribuzione di equilibrio e di conseguenza il momento di dipolo. Nel caso di applicazione di un campo statico studiato in precedenza la deformazione è permanente: si ha semplicemente una nuova configurazione di equilibrio con un nuovo valore del momento di dipolo costante nel tempo e nessuna emissione di radiazione. Nel caso di campi applicati variabili nel tempo o di collisioni si ha invece l'innescio di una oscillazione (con buona approssimazione) armonica intorno alla posizione di equilibrio con conseguente emissione di radiazione elettromagnetica di dipolo*. L'emissione di luce da parte di un tubo al neon è dovuta appunto a un fenomeno di questo tipo. In effetti, l'analisi della radiazione emessa da atomi e molecole mostra la presenza di numerose frequenze e non una sola: un atomo può essere assimilato a un pianoforte piuttosto che a un diapason. Le frequenze emesse sono caratteristiche di ciascuna specie chimica e perciò la misura delle frequenze di oscillazione presenti in una radiazione elettromagnetica consente di identificare le sorgenti. Queste caratteristiche possono essere interpretate soltanto con

* Come nel caso dei campi quasi stazionari, si può avere anche radiazione di quadrupolo, ottupolo, etc., ma per i nostri scopi non è necessario trattare queste configurazioni più complicate.

i metodi della Teoria Quantistica; tuttavia nella discussione dei fenomeni ottici si può arrivare molto lontano utilizzando un semplice modello classico ‘alla Thomson’. Descriveremo cioè la struttura elettrica degli atomi come una distribuzione di carica positiva uniforme in una sfera di raggio $a \approx 10^{-8}\text{cm}$ con al centro una carica puntiforme negativa di massa pari a quella dell’elettrone. Questo è giusto l’opposto del modello adottato nel terzo capitolo con la carica positiva al centro della distribuzione negativa. Il motivo per scegliere una metafora diversa è che, essendo la massa del nucleo più di tre ordini di grandezza maggiore di quella dell’elettrone, la carica che oscilla è quella negativa. Dal punto di vista statico non c’è nessuna differenza tra i due modelli perché la forza di richiamo è la stessa; dal punto di vista dinamico, invece della massa del nucleo, interviene quella dell’elettrone. Ricordando la (3.20), la costante elastica è e^2/a^3 , da cui si può stimare una frequenza di oscillazione

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{e^2}{ma^3}} \approx 10^{16} \text{rad/sec} . \quad (10.8)$$

Le frequenze di emissione di atomi e molecole, possono essere sia maggiori che minori di questo valore, ma come parametro di scala, la stima ottenuta corrisponde ai valori osservati, e sarà utilizzata in tutti i casi in cui occorre valutare ordini di grandezza.

10.3 Onde monocromatiche nel vuoto

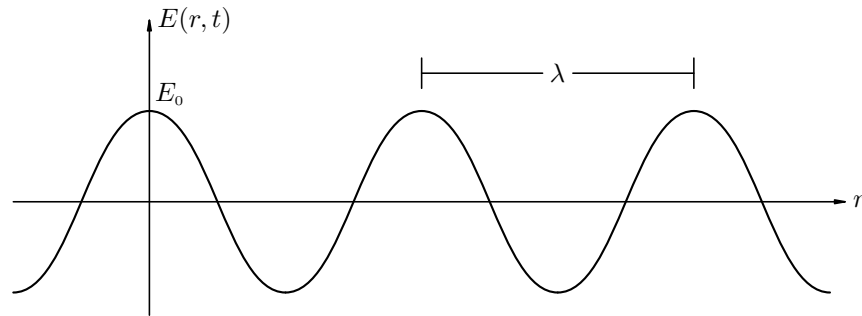
Abbiamo visto che un sistema di cariche che oscilla armonicamente con frequenza ω emette onde che oscillano con la stessa frequenza

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega (t - r/c) . \quad (10.9)$$

Tali onde vengono dette *monocromatiche* perché, nel visibile, la frequenza determina il colore percepito dagli umani. Usualmente il termine ‘frequenza’ designa la grandezza

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} .$$

Nel seguito, con un piccolo abuso di terminologia, il termine frequenza verrà utilizzato sia per ω che per ν . Ciò non porterà confusione perché il parametro che si utilizza sarà quasi sempre ω e solo raramente ν . La distinzione viene comunque fatta per le unità di misura: ω viene espressa in radianti al secondo (rad/sec) mentre ν viene espressa in sec^{-1} o Hertz (Hz). Se si traccia il grafico di $E(\vec{r}, t)$ come funzione di r , a t fissato, si ha un andamento sinusoidale come quello mostrato nella figura 10.5. Una dipendenza sinusoidale dal tempo implica una dipendenza sinusoidale anche dalla posizione. La distanza tra due massimi successivi (o meglio la distanza tra due punti per i quali gli argomenti della funzione coseno nella (10.9) differiscono di 2π) del campo elettrico a un istante fissato viene chiamata *lunghezza d’onda* ed è indicata con λ . Dalla (10.9)

Figura 10.5: Onda sinusoidale a t fissato.

si ottiene immediatamente

$$\omega \frac{r + \lambda}{c} - \omega \frac{r}{c} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda = c \frac{2\pi}{\omega} = \frac{c}{\nu} = cT \quad (10.10)$$

In generale, per un'onda qualsiasi, la legge che esprime la lunghezza d'onda in termini della frequenza viene chiamata *relazione di dispersione*. La (10.10) è la relazione di dispersione per le onde elettromagnetiche nel vuoto. Più avanti vedremo come le proprietà ottiche dei mezzi materiali vengono determinate dalle loro specifiche relazioni di dispersione.

In termini di lunghezza d'onda la condizione per l'approssimazione del campo di dipolo discussa nel paragrafo precedente diventa

Inoltre, l'approssimazione di una porzione di onda sferica con un'onda piana e la formula (10.2) sono valide solo per

$$\frac{r_i - r}{c} \ll T \quad \Rightarrow \quad r_i - r \ll \lambda.$$

$$r \gg \lambda.$$

In altre parole le dimensioni dell'antenna devono essere molto più piccole della lunghezza d'onda della radiazione emessa.

La lunghezza d'onda è il parametro più usato per classificare i vari tipi di radiazione perché esso caratterizza la scala dei fenomeni prodotti dalla interazione con la materia. Le onde radio e le microonde (λ dell'ordine dei metri o dei centimetri) interagiscono essenzialmente con oggetti macroscopici come l'antenna dipolare del paragrafo precedente. Le onde nel visibile o prossime al visibile ($\lambda \simeq 10^{-4} - 10^{-5}$ cm) interagiscono con molecole o singoli atomi. In questo intervallo si usa come unità di misura per le lunghezze l'Ångström (Å) che vale 10^{-8} cm. La luce visibile ha lunghezze d'onda comprese tra ~ 4000 Å e ~ 7000 Å e soddisfa quindi la condizione per l'approssimazione di dipolo. I valori di λ per i principali colori sono riportati nella tabella accanto. La tabella va presa come indicativa, nel senso che esistono infinite gradazioni di colore che sfumano l'una nell'altra al variare di λ .

Anche a lunghezze d'onda più basse fino a circa 100 Å (raggi X 'molli'), i processi di interazione con la materia coinvolgono ancora interi atomi. Per valori ancora più piccoli di λ la radiazione elettromagnetica interagisce essenzialmente con le particelle subatomiche (elettroni, nuclei o singole particelle elementari). Ma qui il nostro modello classico è del tutto inadeguato; siamo al di fuori del dominio dell'Ottica classica.

Colore	$\lambda(\text{Å})$
Rosso	6600
Arancione	6000
Giallo	5800
Verde	5400
Blu	4500
Violetto	4000

Utilizzando la frequenza e la lunghezza d'onda, l'espressione (10.9) del campo di radiazione si può scrivere:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r + \varphi \right).$$

In questa formula si è aggiunta la *costante di fase* φ , che dipende ovviamente dalla scelta dell'istante iniziale $t = 0$. Nel caso di una singola onda monocromatica si può sempre scegliere l'origine dei tempi in modo da rendere nulla questa costante, ma quando si ha a che fare con più onde emesse da diverse sorgenti la costante di fase è indispensabile. L'argomento della funzione coseno nella formula precedente viene chiamato *fase dell'onda*

$$\phi = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r + \varphi,$$

e le superfici per le quali la fase a un istante fissato ha dappertutto lo stesso valore vengono chiamate *fronti d'onda*. Per esempio, il campo di dipolo discusso nel paragrafo precedente ha fronti d'onda sferici con il centro nel punto in cui è situato il dipolo. Si noti che la direzione di propagazione in ogni punto dello spazio è perpendicolare al fronte d'onda che passa per quel punto. Nel vuoto e nei mezzi isotropi, questa proprietà vale in generale quale che sia la forma delle superfici di fase costante e consente di dare una eloquente rappresentazione grafica della propagazione di un'onda. Nella Figura 10.6 sono rappresentate porzioni di alcuni fronti d'onda di forma generica, le cui fasi differiscono di 2π ; si noti che la fase *decresce* quando ci si sposta nel verso della propagazione dell'onda; viceversa, *in un punto fissato dello spazio*, la fase *cresce* con il tempo. La separazione spaziale tra i fronti, come indicato in figura, è

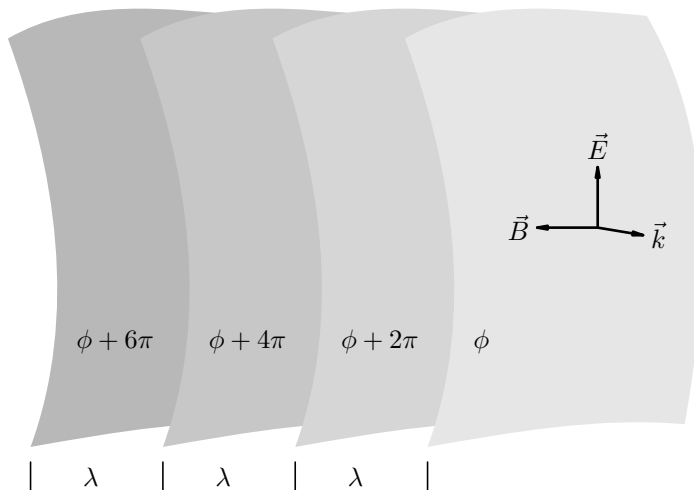


Figura 10.6: Fronti d'onda

ovviamente λ . Nella figura sono anche rappresentati i vettori \vec{E} e \vec{B} , che hanno direzione tangente al fronte d'onda, e il vettore \vec{k} perpendicolare al fronte d'onda e orientato nel senso di propagazione. Per definizione si

pone

$$k \equiv |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Il vettore \vec{k} così definito prende il nome di *vettore d'onda*, e k 'numero d'onda'. In termini di \vec{k} la relazione di dispersione (10.10) si scrive:

$$\omega = ck, \quad (10.11)$$

e la rappresentazione matematica di un'onda monocromatica è

$$\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r}) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi). \quad (10.12)$$

Il vettore d'onda è una funzione della posizione che determina la geometria dei fronti d'onda. Infatti dalla (10.12) l'equazione delle superfici di fase costante (a t fissato) è semplicemente:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{cost.}$$

Per esempio se \vec{k} è uniforme questa è semplicemente l'equazione dei piani perpendicolari a \vec{k} ; abbiamo allora le onde piane del § 9.4. Se invece $\vec{k} = (2\pi/\lambda)\hat{r}$, come nel caso della radiazione di dipolo descritta nel paragrafo precedente, l'equazione scritta sopra si riduce a $r = \text{cost.}$ che è l'equazione delle sfere con centro in O . In pratica questi sono i soli due casi che prenderemo in considerazione. Si osservi che nella (10.12) viene indicata anche una dipendenza di \vec{E}_0 dalla posizione; per il campo di dipolo si vede dalla (10.7) che \vec{E}_0 dipende sia da r che da θ . L'onda piana è il caso limite di un'onda sferica a distanza grande dalla sorgente, $r \gg \lambda$, e in una regione limitata dello spazio dove \vec{k} e \vec{E}_0 sono approssimativamente uniformi.

Per descrivere le onde sinusoidali (e in generale tutte le oscillazioni armoniche) è spesso conveniente adoperare la *rappresentazione complessa*. Ricordiamo la definizione di esponenziale di una variabile immaginaria (Eulero)

$$e^{i\alpha} \equiv \cos \alpha + i \sin \alpha. \quad (10.13)$$

Notiamo anche le formile 'inverse' della (10.13)

$$\cos \alpha = \Re \{e^{i\alpha}\} = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2},$$

$$\sin \alpha = \Im \{e^{i\alpha}\} = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

Questa definizione è resa possibile dal fatto che, utilizzando le formule di addizione delle funzioni trigonometriche, si verifica facilmente l'identità

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta}, \quad (10.14)$$

vale a dire: per l'esponenziale immaginario vale la stessa formula di addizione valida per l'esponenziale reale. Più in generale, se $z = x + iy$ è un numero complesso, la posizione

$$e^z \equiv e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

è congruente con tutte le operazioni algebriche definite nel campo reale.

La semplicità della formula di addizione (10.14) della funzione esponenziale rispetto a quelle delle funzione trigonometriche rende spesso

conveniente, quando si debbano calcolare espressioni algebriche lineari di funzioni sinusoidali, eseguire la sostituzione

$$\cos \alpha = \Re \{e^{i\alpha}\},$$

calcolare l'espressione complessa così ottenuta e prendere la parte reale del risultato. Questo procedimento è lecito perché la parte reale di una combinazione lineare, con coefficienti reali c_k , di due o più numeri complessi z_k è la combinazione lineare con gli stessi coefficienti delle parti reali dei singoli numeri

$$\sum_k c_k \Re \{z_k\} = \Re \left\{ \sum_k c_k z_k \right\}.$$

La convenienza di questo modo di procedere verrà ampiamente illustrata dalle applicazioni che seguiranno. Per il momento introduciamo per il campo elettrico di un'onda monocromatica la notazione complessa

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp [i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)],$$

dove il simbolo \Re viene omissso lasciando sottinteso che l'eguaglianza ha il significato che il campo elettrico a primo membro è eguale alla parte reale del secondo membro.

10.4 Energia delle Onde Elettromagnetiche

Wo viel Licht is, ist starker Schatten.
JOHANN WOLFGANG VON GOETHE

Con la propagazione dell'onda si propaga anche l'energia associata al campo elettromagnetico; ricordando che, in un'onda piana $E = B$, la densità di energia si può scrivere

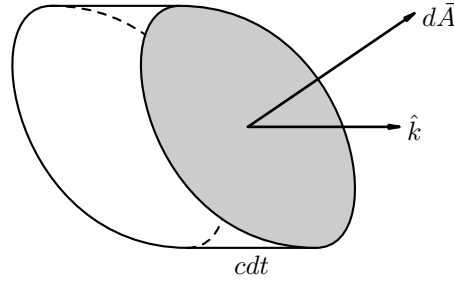
$$u = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) = \frac{1}{4\pi} EB.$$

Osserviamo ora che attraverso un elemento di superficie di area dA perpendicolare a \hat{k} passa nel tempo dt tutta l'energia contenuta nel cilindro di base dA e altezza (infinitesima) $c dt$. L'energia che fluisce per unità di tempo è quindi

$$dW = \frac{c}{4\pi} EB dA$$

Si noti che W ha le dimensioni di una potenza (unità erg/sec equivalente a 10^{-7} watt). Più in generale, se l'elemento di superficie non è perpendicolare a \hat{k} (vedi figura sotto), indicando con $d\vec{A}$ il vettore di modulo dA e direzione perpendicolare alla superficie, si ha

$$dW = \frac{c}{4\pi} EB \hat{k} \cdot d\vec{A}.$$



Tenendo conto che \vec{E} , \vec{B} e \hat{k} formano una terna levogira (vedi Figura 10.6) possiamo esprimere questa potenza come il flusso del vettore di Poynting

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}.$$

Abbiamo quindi riottenuto in maniera elementare il risultato già ricavato in tutta generalità nel capitolo precedente: la potenza W che attraversa una generica superficie A , è data da

$$W = \int_A \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{A}.$$

Un esempio di grandissima importanza è la potenza irraggiata da una carica accelerata; dalle equazioni (10.1) e (10.2) si ottiene subito

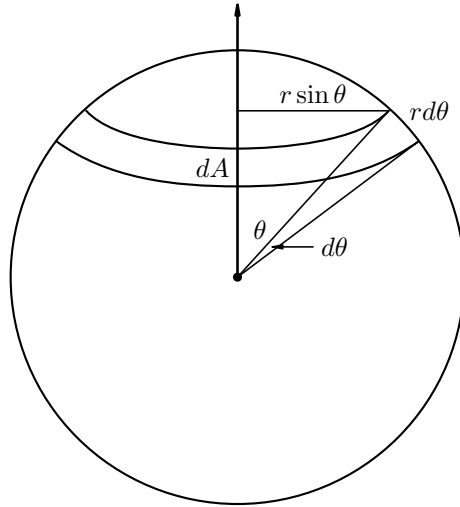
$$\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}, t) = \frac{q^2}{c^3} \frac{[a(t') \sin \theta]^2}{4\pi r^2} \hat{r},$$

dove $t' = t - r/c$ è il tempo ritardato e θ l'angolo tra la direzione di \vec{r} e quella di \vec{a} . Per avere la potenza totale irraggiata in tutte le direzioni integriamo $\vec{\mathcal{P}}$ sulla sfera di raggio r e centro nella posizione della carica. Poiché il vettore di Poynting ha direzione radiale si ottiene

$$W = \int_A \mathcal{P} dA = \frac{q^2}{c^3} \frac{a^2}{4\pi r^2} \int_A \sin^2 \theta dA.$$

Utilizzando un sistema di coordinate polari con l'asse nella direzione della accelerazione \vec{a} e prendendo come elemento di superficie la 'striscia' compresa tra i cerchi paralleli θ e $\theta + d\theta$ (vedi figura), l'area si esprime come $dA = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$. Si ha quindi

$$\int_A \sin^2 \theta dA = 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{8}{3} \pi r^2$$



In definitiva, la potenza che attraversa la sfera di raggio r all'istante t è espressa dalla seguente *formula di Larmor*

$$W(r, t) = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} a^2 (t - r/c).$$

Si noti che r interviene nella formula soltanto attraverso il tempo di ritardo r/c . Ciò implica che tutta l'energia che in un determinato intervallo di tempo attraversa una sfera di dato raggio, a tempi successivi attraversa qualsiasi altra sfera di raggio maggiore. Perciò, dal momento che W è positiva, il campo di radiazione sottrae sempre energia alla carica e la porta all'infinito. Per il principio di conservazione dell'energia, l'energia meccanica della carica irraggiante non si conserva ma decresce nel tempo a vantaggio dell'energia del campo. Al contrario di quanto avveniva nell'esempio della conduzione ohmica, discusso nel capitolo precedente, nella emissione di radiazione si ha un trasferimento di energia dalla materia al campo. La perdita di energia meccanica da parte di una carica accelerata comporta che il campo di radiazione esercita un'azione frenante sulla carica stessa (*radiation damping* o *reazione di radiazione*). Questa affermazione può sembrare paradossale per il fatto che, fino a questo momento, il campo elettromagnetico è stato sempre considerato come una emanazione delle particelle cariche; locuzioni del tipo “il campo *generato* da una carica” oppure “le cariche sono le *sorgenti* del campo”, suggeriscono un'idea di subordinazione del campo alla carica. Il fenomeno del radiation damping ci obbliga a prendere atto che il campo elettromagnetico è un ente fisico che è su un piano di assoluta parità con le particelle cariche; i due oggetti sono indissolubilmente accoppiati ed evolvono insieme influenzandosi reciprocamente. Questo fa sorgere un problema perché, per determinare la reazione di radiazione, dovremmo calcolare il campo di radiazione *nel punto dove si trova la carica*; ora la (10.1) ovviamente non è applicabile perché è valida solo a grande distanza dalla carica, ma neanche un calcolo più preciso può bastare dal momento che le leggi dell'elettrodinamica classica sono valide solo alla scala di distanze grandi rispetto al raggio classico (4.35) dell'elettrone:

il problema della ‘self-force’ dell’elettrone è, al momento, un problema insoluto e con ogni probabilità resterà tale finché non si avrà un quadro, più chiaro di quello attuale, della fisica alla scala subnucleare.

Fortunatamente, per i processi alla scala atomica, che sono quelli che interessano l’Ottica, il problema della reazione di radiazione ammette una semplice soluzione ‘fenomenologica’, basata sull’introduzione di una forza *ad hoc* che produce una dissipazione di energia meccanica pari a quella prevista dalla formula di Larmor. Osserviamo in primo luogo che, a causa del damping, l’emissione di radiazione da parte di un atomo è un fenomeno ‘episodico’: normalmente un atomo si trova in uno stato di equilibrio stabile in cui l’energia è minima (*stato fondamentale*) e non vi è alcuna emissione; se una causa esterna (per esempio la collisione anelastica con un altro atomo) altera l’equilibrio, l’atomo acquista un surplus di energia, diciamo U_0 (*stato eccitato*), e comincia a emettere radiazione; l’emissione dura finché tutta l’energia U_0 non è esaurita e l’atomo torna nello stato fondamentale. In termini del modello di Thomson, l’atomo è in uno stato eccitato quando l’elettrone viene allontanato dal centro della distribuzione di carica positiva; la forza di richiamo elastica da luogo a oscillazioni intorno al punto di equilibrio con ampiezza che si smorza nel tempo a causa della perdita di energia. La durata dell’emissione risulta essere molto maggiore del periodo di oscillazione, e perciò l’elettrone compie molte oscillazioni prima di tornare alla quiete; ciò implica che la frazione di energia persa in ogni oscillazione è molto piccola; in altri termini, la reazione di radiazione è, in prima approssimazione trascurabile rispetto alla forza di richiamo. Questa è la chiave per la soluzione del nostro problema perché permette di descrivere il moto dell’elettrone come un’oscillazione armonica di frequenza ω , con ampiezza che si smorza lentamente nel tempo. Un semplice calcolo consente di ricavare la legge con cui l’energia decade nel tempo.

La potenza istantanea, irraggiata da un elettrone che oscilla armonicamente con frequenza ω e ampiezza s , si esprime come

$$W(t) = s^2 \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega^4 \cos^2(\omega t). \quad (10.15)$$

Perciò, l’energia meccanica perduta in un’oscillazione completa è

$$\Delta U = - \int_t^{t+T} W dt = - \langle W \rangle T,$$

dove $\langle W \rangle$, la potenza media irraggiata per ciclo, si calcola dalla (10.15)

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2} s^2 \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega^4.$$

Ricordiamo dalla meccanica che l’energia U dell’oscillazione di ampiezza s è data da

$$U = \frac{1}{2} m s^2 \omega^2 \quad \Rightarrow \quad s^2 = \frac{2U}{m\omega^2},$$

per cui

$$\Delta U = -\frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}UT.$$

Dal momento che U varia su una scala di tempi molto maggiore del periodo di oscillazione, il rapporto $\Delta U/T$ approssima bene la derivata rispetto al tempo

$$\frac{\Delta U}{T} \approx \frac{dU}{dt} = -\frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}U.$$

La soluzione di questa equazione è ovviamente un esponenziale decrescente

$$U(t) = U_0 \exp(-t/\tau), \quad (10.16)$$

dove U_0 è l'energia iniziale e il 'tempo di decadimento'

$$\tau = \frac{3mc^3}{2e^2\omega^2}, \quad (10.17)$$

rappresenta appunto la 'durata' dell'emissione. Possiamo valutare l'ordine di grandezza di τ , sostituendo nella formula trovata il valore di ω calcolato per l'atomo di Thomson; si ha

$$\tau \approx 10^{-8} \text{ s},$$

che risulta appunto molto più grande del periodo di oscillazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 10^{-15} \text{ s}.$$

Un decadimento esponenziale dell'energia (e dell'ampiezza), è caratteristico degli oscillatori soggetti a una resistenza viscosa, proporzionale alla velocità; infatti, aggiungendo alla forza elastica di richiamo una forza del tipo

$$\vec{R} \equiv -m\gamma\vec{v},$$

si può determinare la costante γ in modo da produrre uno smorzamento dell'energia dell'oscillatore uguale a quello (10.16) determinato dalla perdita di energia per irraggiamento. Con l'aggiunta di questa forza, l'equazione della dinamica si scrive

$$m\vec{a} = -m\omega^2\vec{r} - m\gamma\vec{v}, \quad (10.18)$$

e per una qualsiasi componente, diciamo x , di \vec{r} si ha

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0.$$

Si riconosce l'equazione di un moto armonico smorzato la cui soluzione è ben nota

$$x(t) = x_0 e^{-t/\tau_v} \cos(\omega' t + \phi),$$

dove x_0 e ϕ dipendono dalle condizioni iniziali, mentre

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2} \simeq \omega,$$

Nota: L'ipotesi di piccolo smorzamento implica $\gamma \ll \omega$.

e

$$\tau_v = \frac{2}{\gamma}.$$

L'ampiezza di oscillazione $x_0 e^{-t/\tau_v}$ si smorza esponenzialmente nel tempo con un tempo caratteristico τ_v . Tenendo presente che l'energia dell'oscillatore è proporzionale al quadrato dell'ampiezza di oscillazione, possiamo asserire che la forza di resistenza viscosa produce gli stessi effetti della reazione di radiazione se

$$\tau_v = 2\tau \quad \implies \quad \gamma = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}.$$

La costante γ ha le dimensioni dell'inverso di un tempo e prende il nome di *costante di smorzamento*. Per valutare la bontà dell'approssimazione, notiamo che

$$\frac{\gamma}{\omega} \sim \frac{e^2\omega}{mc^3} \sim 10^{-8}.$$

Questo calcolo costituisce soltanto una stima del valore di γ perché è stato ottenuto per un modello idealizzato di molecola ma le misure della costante di smorzamento (che verranno discusse più avanti) confermano pienamente l'ordine di grandezza calcolato sopra. D'ora in avanti, il modello di molecola 'alla Thomson' verrà quindi perfezionato assumendo che le molecole siano oscillatori caratterizzati da una frequenza ω e una costante di smorzamento $\gamma \ll \omega$. È appena il caso di osservare che questa modifica non ha alcuna rilevanza per le proprietà statiche discusse nel terzo capitolo.

Concludiamo questo paragrafo sull'energia delle onde elettromagnetiche introducendo l'importante nozione di *intensità* della radiazione. Osserviamo che nessun ricevitore della luce è in grado di misurare il valore istantaneo di un campo che compie un'oscillazione completa in un tempo dell'ordine di 10^{-15} sec; i dispositivi sensibili alla luce misurano l'energia totale trasmessa dall'onda durante tempi molto più lunghi del periodo dell'onda (in effetti anche molto più lunghi di $\tau \sim 1/\gamma$). Ora, per una funzione del tempo $f(t)$, periodica di periodo T , il valore medio $\langle f \rangle$ nell'intervallo tempo $[0, \mathcal{T}]$

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} f dt,$$

nel caso in cui $\mathcal{T} \gg T$, è uguale al valore medio su un periodo

$$\langle f \rangle \simeq \frac{1}{T} \int_0^T f dt. \quad (10.19)$$

Infatti, si può trovare un numero intero n tale che $nT < \mathcal{T} < (n+1)T$; allora si può porre $\mathcal{T} = nT + \bar{t}$ con $\bar{t} < T$ e scrivere il valore medio

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{nT} f dt + \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{nT}^{nT+\bar{t}} f dt = \frac{n}{\mathcal{T}} \int_0^T f dt + \frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\bar{t}} f dt.$$

Per $\mathcal{T} \gg T$ l'ultimo termine è trascurabile; inoltre $n/\mathcal{T} \simeq 1/T$ e da qui segue subito la (10.19).

Si definisce allora *intensità* I di una radiazione il valore medio su un ciclo, della potenza che attraversa l'unità di superficie perpendicolare alla direzione di propagazione:

$$I = \left\langle \frac{dW}{dA} \right\rangle = \frac{c}{4\pi} \langle EB \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle E^2 \rangle.$$

Nell'ultimo passaggio si è utilizzato il fatto che E e B hanno la stessa ampiezza. Nel caso di un'onda sinusoidale polarizzata linearmente, tenendo conto che $\langle \cos^2 \alpha \rangle = 1/2$ si ha:

$$I = \frac{c}{4\pi} \frac{E_0^2}{2}. \quad (10.20)$$

La misura dell'intensità di una radiazione rappresenta, a meno di un fattore di proporzionalità, una misura del quadrato dell'ampiezza di oscillazione del campo.

10.5 Propagazione nei mezzi materiali

Per discutere la propagazione di onde nei mezzi materiali è necessario in primo luogo scrivere le equazioni di Maxwell nella materia; per questo occorre tener presenti le cariche e le correnti indotte. Le due equazioni omogenee

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (10.21)$$

che non dipendono né dalle cariche né dalle correnti restano immutate. Nella legge di Gauss occorre tener presenti le cariche di polarizzazione; osservando che nelle leggi locali il ritardo del segnale non ha effetto, restano valide la (3.45) e la definizione (3.44). Perciò, anche per processi *non* stazionari, continua a valere la legge

$$\operatorname{div} (\vec{E} + 4\pi \vec{P}) = 4\pi \rho_\ell. \quad (10.22)$$

Per quanto riguarda la quarta equazione di Maxwell, dalle (7.31) e (7.30), *in condizioni stazionarie* si ha

$$\operatorname{rot} (\vec{B} - 4\pi \vec{M}) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_\ell.$$

Per ottenere l'equazione valida in generale occorre trovare il termine da aggiungere alla corrente libera per rendere il secondo membro solenoidale. Dall'equazione di continuità per \vec{J}_ℓ e dalla legge di Gauss (10.22) si ha subito

$$\operatorname{div} \vec{J}_\ell = -\frac{\partial \rho_\ell}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} (\vec{E} + 4\pi \vec{P})$$

e perciò la quarta equazione di Maxwell si scrive

$$\operatorname{rot} (\vec{B} - 4\pi \vec{M}) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_\ell + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} + 4\pi \vec{P}). \quad (10.23)$$

In presenza di materia, alla corrente libera \vec{J}_ℓ occorre dunque aggiungere la corrente

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{J}_s + \vec{J}_p,$$

dove \vec{J}_s è la corrente di spostamento di Maxwell e

$$\vec{J}_p \equiv \frac{\partial \vec{P}}{\partial t},$$

che prende il nome di ‘densità di corrente di polarizzazione’, rappresenta la corrente prodotta dalla movimento relativo delle distribuzioni di carica positive e negative nel materiale che si produce quando \vec{P} varia nel tempo (vedi figura a pagina 102).

Le equazioni (10.21), (10.22) e (10.23) sono del tutto generali e valgono in qualsiasi mezzo materiale, ma non sono sufficienti a determinare i campi: come nel caso statico occorrono le leggi costitutive del mezzo che legano \vec{P} e \vec{J} al campo elettrico \vec{E} e la densità di magnetizzazione \vec{M} a \vec{B} . Nel caso di campi statici abbiamo visto che per un gran numero di materiali valgono le semplici relazioni di proporzionalità

$$\vec{J} = \varsigma \vec{E}, \quad \vec{P} = \chi_e \vec{E}, \quad \vec{M} = \frac{\chi_m}{1 + 4\pi\chi_m} \vec{B}, \quad (10.24)$$

dove la conducibilità ς e le suscettività elettrica e magnetica χ_e e χ_m sono costanti caratteristiche del mezzo[†]. Nel caso di campi variabili nel tempo la situazione è, in generale, ben più complessa, ma molti fenomeni riguardanti la propagazione di onde luminose possono essere interpretati assumendo che le (10.24) siano ancora valide, sia pure con valori delle costanti diversi da quelli statici. Allora, con le familiari definizioni di costante dielettrica e permeabilità magnetica

$$\varepsilon \equiv 1 + 4\pi\chi_e, \quad \mu \equiv 1 + 4\pi\chi_m,$$

le due equazioni non omogenee si scrivono

$$\operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}) = 4\pi\rho_\ell, \quad \operatorname{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu}\right) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_\ell + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \vec{E}).$$

Dalle equazioni di Maxwell, con calcoli identici a quelli svolti nel § 9.6, si verifica facilmente che il teorema di Poynting (9.81) continua a valere con le seguenti espressioni per la densità di energia

$$u = \frac{1}{8\pi} \varepsilon E^2 + \frac{1}{8\pi} \frac{B^2}{\mu},$$

e per il vettore di Poynting

$$\vec{\mathcal{P}} \equiv \frac{c}{4\pi\mu} \vec{E} \times \vec{B}.$$

La propagazione di onde elettromagnetiche nei mezzi materiali avviene generalmente in assenza di cariche libere ($\rho_\ell = 0$), mentre la densità di

[†]Prenderemo in considerazione soltanto materiali isotropi, per i quali la conducibilità e le suscettività sono grandezze scalari.

corrente libera \vec{J}_ℓ può essere assunta nulla solo nel caso di conducibilità ohmica trascurabile. In queste ipotesi la seconda coppia di equazioni di Maxwell si scrive

$$\operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}) = 0, \quad \operatorname{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu} \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \vec{E}). \quad (10.25)$$

I materiali per i quali (in prima approssimazione) valgono queste equazioni vengono detti ‘*mezzi trasparenti*’.

Nota. Nello studio della propagazione nei mezzi trasparenti risulta effettivamente conveniente, ai fini di un aspetto più compatto delle formule, l’uso dei vettori \vec{D} e \vec{H} . Per esempio, con le sostituzioni

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}, \quad (10.26)$$

le (10.25) assumono la forma

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (10.27)$$

molto usata in letteratura. Pur tenendo ben presente che, sulla superficie di separazione tra due mezzi differenti, la componente tangenziale di \vec{D} e la componente normale di \vec{H} *non* sono continue, la continuità delle altre componenti è sufficiente per ricavare le leggi di propagazione. Tuttavia, dal momento che \vec{E} e \vec{B} sono altrettanto adeguati, continuerò a fare riferimento a questi due soli campi.

Consideriamo in primo luogo la propagazione in un mezzo omogeneo; con ε e μ indipendenti dalla posizione le (10.25) diventano

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

La sola differenza con le equazioni di Maxwell nel vuoto è il fattore $\varepsilon \mu$ nel termine di corrente di spostamento; le proprietà ottiche del mezzo vengono quindi caratterizzate dal parametro ‘*indice di rifrazione*’

$$n = \sqrt{\varepsilon \mu},$$

che, tenendo conto del fatto che in pratica è quasi sempre $\mu \simeq 1$, si scrive più semplicemente

$$n \approx \sqrt{\varepsilon}.$$

Consideriamo ora la propagazione di un’onda piana; con le stesse notazioni usate nel § 9.4 abbiamo per la coppia di componenti (E_x, B_y) il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{n^2}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} \end{cases}$$

Questo sistema ammette soluzioni di onda a profilo permanente analoghe alle (9.46), (9.47)

$$E_x^f(z, t) \equiv f\left(z - \frac{c}{n}t\right), \quad B_y = nE_x, \quad (10.28)$$

come si verifica subito per sostituzione. La velocità di propagazione è quindi

$$u = \frac{c}{n},$$

che, in vista del fatto che $n > 1$, risulta sempre minore di c . Ovviamente, lo stesso risultato si ottiene per l'altra coppia di componenti indipendenti (E_y, B_x) . A parte la diversa velocità di propagazione, l'unico cambiamento rispetto alle leggi di propagazione nel vuoto si ha nella relazione tra \vec{E} e \vec{B} che diventa

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = n\hat{k} \times \vec{E}(\vec{r}, t). \quad (10.29)$$

Di conseguenza, il vettore di Poynting per un'onda piana è dato da

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{c}{4\pi\mu} n E^2 \hat{k} \approx n \frac{c}{4\pi} E^2 \hat{k}. \quad (10.30)$$

Nel caso particolare di onde monocromatiche, dalla (10.28), si ricava la relazione di dispersione

$$\omega = \frac{c}{n}k = uk. \quad (10.31)$$

Ciò implica che, a parità di frequenza, la lunghezza d'onda in un mezzo trasparente è più piccola di quella nel vuoto

$$\lambda\nu = u \quad \implies \quad \lambda = \frac{1}{n} \frac{c}{\nu}.$$

Quando un'onda elettromagnetica incide sulla superficie di separazione tra due mezzi diversi (uno dei quali può eventualmente essere il vuoto), le equazioni di Maxwell omogenee (10.21) impongono la continuità nell'attraversamento della superficie, della componente normale del campo magnetico e della componente tangenziale del campo elettrico. Questa condizione deve essere soddisfatta *in ogni istante* e ciò implica, per le onde monocromatiche, che le frequenze nei due mezzi siano eguali. Di conseguenza le lunghezze d'onda saranno differenti. Perciò il parametro che caratterizza un'onda monocromatica è la frequenza e non la lunghezza d'onda.

10.5.1 Riflessione e rifrazione

I fenomeni della riflessione e rifrazione alla superficie di separazione tra due mezzi trasparenti sono familiari. In questo paragrafo applicheremo la teoria elettromagnetica per ricavare, oltre alle note leggi geometriche sugli angoli di riflessione e rifrazione, anche le intensità delle onde riflesse e rifratte. In Figura 10.7 è mostrata un'onda piana monocromatica avente vettore di propagazione \vec{k}_1 in un mezzo con indice di rifrazione n_1 che

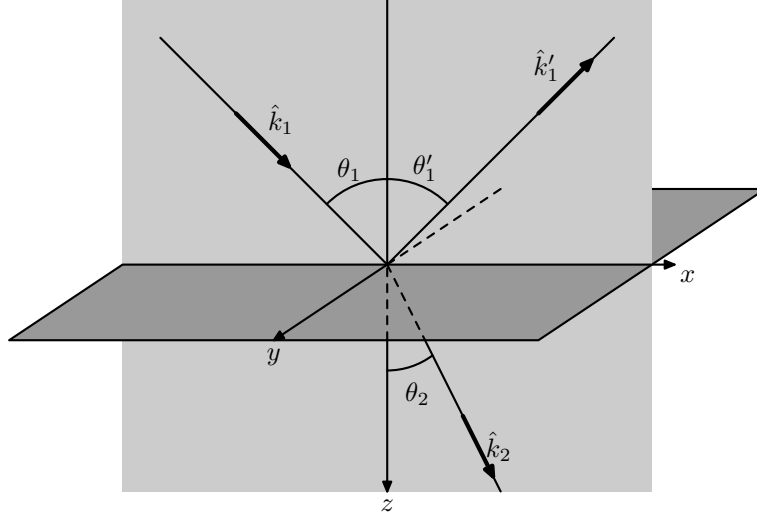


Figura 10.7: Riflessione e rifrazione alla superficie di separazione tra due mezzi.

incide sulla superficie di separazione con un mezzo con indice di rifrazione n_2 . La superficie di separazione è evidenziata con un'ombreggiatura scura, mentre più in chiaro è indicato il piano contenente il vettore di propagazione e la normale alla superficie, che viene chiamato piano di incidenza. Utilizziamo un sistema di assi ortogonali con l'asse \hat{z} normale alla superficie di separazione orientato dal mezzo 1 al mezzo 2, l'asse \hat{x} nel piano di incidenza, orientato in modo che $\hat{k}_1 \cdot \hat{x} > 0$ (vedi figura); l'asse \hat{y} è determinato di conseguenza in accordo con la convenzione levogira. L'origine è scelta sulla superficie di separazione. In questo sistema di coordinate le componenti di \vec{k}_1 sono

$$\vec{k}_1 \equiv (k_1 \sin \theta_1, 0, k_1 \cos \theta_1).$$

Con ovvio significato dei simboli, le fasi delle tre onde possono essere scritte

$$\phi_1 = \omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_1, \quad \phi'_1 = \omega t - \vec{k}'_1 \cdot \vec{r} + \varphi'_1, \quad \phi_2 = \omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_2.$$

Dalle relazione di dispersione (10.31) segue immediatamente che

$$k'_1 = k_1, \quad k_2 = \frac{n_2}{n_1} k_1 \quad (10.32)$$

La condizione di continuità *in ogni punto* della superficie di separazione impone che sia anche

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = \vec{k}'_1 \cdot \vec{r}, \quad \text{e} \quad \vec{k}_1 \cdot \vec{r} = \vec{k}_2 \cdot \vec{r}, \quad \text{se} \quad \vec{r} \equiv (x, y, 0). \quad (10.33)$$

Dal momento che la componente y di \vec{k}_1 è nulla, da queste equazioni segue subito che anche i vettori di propagazione dell'onda riflessa e di quella

trasmessa giacciono nel piano di incidenza. Allora, dall'osservazione della figura si vede immediatamente che

$$\vec{k}'_1 \equiv (k'_1 \sin \theta'_1, 0, -k'_1 \cos \theta'_1), \quad \vec{k}_2 \equiv (k_2 \sin \theta_2, 0, k_2 \cos \theta_2).$$

Perché le (10.33) siano soddisfatte identicamente sulla superficie di separazione occorre che

$$k_1 \sin \theta_1 = k'_1 \sin \theta'_1, \quad k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2.$$

Da quì, tenendo presenti le (10.32), si ottengono infine le leggi per gli angoli di riflessione e rifrazione

$$\sin \theta_1 = \sin \theta'_1 \Rightarrow \theta_1 = \theta'_1 \quad \text{e} \quad n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2. \quad (10.34)$$

Per calcolare le ampiezze dell'onda riflessa e trasmessa, osserviamo che le leggi di circuitazione per \vec{E} e \vec{H} , (10.21) e (10.27), implicano la continuità delle componenti tangenziali di questi due vettori nell'attraversamento della superficie di separazione tra i due mezzi; infatti, le densità di 'corrente' a secondo membro delle equazioni del rotore esistono solo come densità di volume. Consideriamo dapprima un'onda incidente polarizzata, con il campo elettrico parallelo al piano di incidenza. Indichiamo

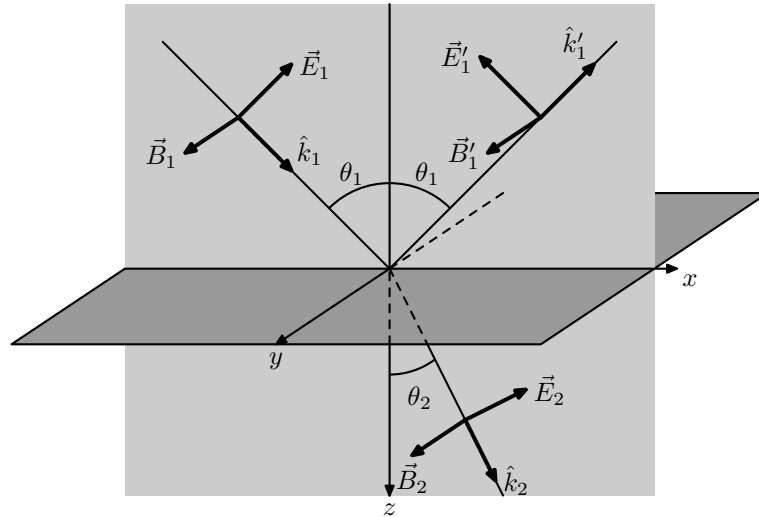


Figura 10.8: Riflessione e rifrazione di un'onda polarizzata nel piano di incidenza

con \vec{E}_1 , \vec{E}'_1 e \vec{E}_2 le ampiezze delle onde incidente, riflessa e trasmessa. Dalla figura 10.8 risulta immediatamente che le componenti tangenziali dei campi giacciono sull'asse \hat{x} e perciò la condizione di continuità del campo elettrico implica

$$E_1 \cos \theta_1 - E'_1 \cos \theta_1 = E_2 \cos \theta_2. \quad (10.35)$$

I campi magnetici, per la (10.29), hanno tutti la direzione dell'asse \hat{y} e moduli dati da

$$B_1 = n_1 E_1, \quad B'_1 = n_1 E'_1, \quad B_2 = n_2 E_2.$$

Allora, tenendo conto della (10.26), la continuità della componente tangenziale di \vec{H} fornisce

$$\frac{n_1}{\mu_1} E_1 + \frac{n_1}{\mu_1} E'_1 = \frac{n_2}{\mu_2} E_2. \quad (10.36)$$

Il sistema di equazioni (10.35), (10.36) viene facilmente risolto rispetto alle ampiezze E'_1 e E_2

$$\begin{cases} E'_1 = \frac{n_2 \mu_1 \cos \theta_1 - n_1 \mu_2 \cos \theta_2}{n_2 \mu_1 \cos \theta_1 + n_1 \mu_2 \cos \theta_2} E_1 = R_{\parallel}(\theta_1) E_1 \\ E_2 = \frac{2 n_1 \mu_2 \cos \theta_1}{n_2 \mu_1 \cos \theta_1 + n_1 \mu_2 \cos \theta_2} E_1 = T_{\parallel}(\theta_1) E_1 \end{cases}$$

Le funzioni $R_{\parallel}(\theta_1)$ e $T_{\parallel}(\theta_1)$ determinano le ampiezze dell'onda riflessa e trasmessa in funzione dell'angolo di incidenza per un'onda polarizzata parallelamente al piano di incidenza. Nell'approssimazione $\mu_1 \approx \mu_2 \approx 1$ potremo scrivere semplicemente

$$\begin{cases} R_{\parallel}(\theta_1) = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \\ T_{\parallel}(\theta_1) = \frac{2 n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \end{cases} \quad (10.37)$$

dove θ_2 è determinato in termini di θ_1 per mezzo della legge di rifrazione (10.34). Un calcolo del tutto simile, che il lettore può svolgere come semplice esercizio, fornisce gli analoghi fattori per le ampiezze riflessa e trasmessa di un'onda polarizzata perpendicolarmente al piano di incidenza

$$\begin{cases} R_{\perp}(\theta_1) = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \\ T_{\perp}(\theta_1) = \frac{2 n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \end{cases} \quad (10.38)$$

Altrettanto semplice, seppur laboriosa, è la verifica che le formule trovate garantiscono la continuità delle componenti normali di \vec{B} e \vec{D} .

Le (10.37), (10.38) portano il nome di *formule di Fresnel* e consentono di ricavare in tutta generalità le ampiezze delle onde riflessa e trasmessa generate da un'onda incidente di direzione di propagazione e stato di polarizzazione arbitrario. Analizziamo qualche caso particolare interessante.

Incidenza quasi normale. Se l'onda incidente forma un angolo piccolo con la normale alla superficie di separazione tra i due mezzi

$$\theta_1 \approx 0 \quad \implies \quad \theta_2 \approx 0, \quad \cos \theta_1 \approx 1, \quad \cos \theta_2 \approx 1.$$

In questo caso si perde la distinzione tra polarizzazione parallela e perpendicolare

$$R_{\perp} = -R_{\parallel} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad T_{\perp} = T_{\parallel} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}.$$

La differenza di segno tra R_{\perp} e R_{\parallel} è dovuta al fatto che, come si può notare osservando la figura 10.8, la componente nel piano di incidenza del campo elettrico riflesso è stata calcolata lungo una direzione che a $\theta_1 = 0$ diventa opposta a quella adottata per l'onda incidente; nel caso di polarizzazione perpendicolare, invece, ambedue le ampiezze sono calcolate lungo l'asse \hat{y} . Perciò, in questo caso limite in cui si abolisce la distinzione tra le polarizzazioni, il coefficiente che non dà adito a confusioni di segno è R_{\perp} ; introducendo l'indice di rifrazione relativo del mezzo 2 rispetto al mezzo 1

$$n \equiv \frac{n_2}{n_1},$$

abbiamo per le ampiezze riflessa e trasmessa

$$E'_1 = \frac{1-n}{1+n}E_1, \quad E_2 = \frac{2}{1+n}E_1.$$

Nel caso in cui $n_2 > n_1 \Leftrightarrow n > 1$ si dice che il mezzo 2 è *otticamente più denso* del mezzo 1. Dalla formula sopra si vede che l'ampiezza E'_1 ha segno opposto a quello dell'onda incidente. Osservando che

$$e^{i\pi} = -1,$$

ciò equivale a dire che nella riflessione sulla superficie di separazione con un mezzo otticamente più denso si ha un cambiamento di fase di π .

Le intensità vengono facilmente calcolate ricordando la (10.30); con ovvio significato dei simboli i ha subito

$$\frac{I_R}{I} = \frac{n_1 E_1'^2}{n_1 E_1^2} = \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2, \quad \frac{I_T}{I} = \frac{n_2 E_2^2}{n_1 E_1^2} = n \left(\frac{2}{1+n} \right)^2.$$

Un esempio tipico è l'incidenza sulla superficie di separazione tra l'aria ($n_1 \approx 1$) e un vetro ottico ($n_2 \approx 1.5$) per cui si ha

$$I_R = 0.04I, \quad I_T = 0.96I.$$

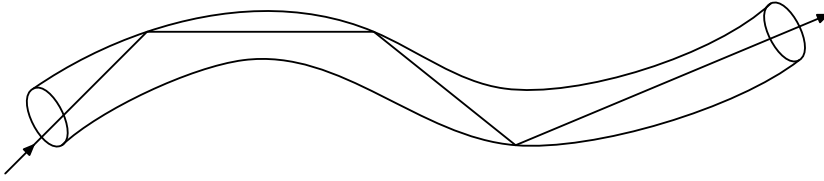
Incidenza radente. Dalla legge di rifrazione (10.34), l'angolo θ_2 è determinato risolvendo l'equazione

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1. \quad (10.39)$$

Osserviamo che, se $n_2 < n_1$, questa equazione ammette soluzione nel campo reale soltanto se

$$\sin \theta_1 \leq \frac{n_2}{n_1} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 \leq \arcsin \frac{n_2}{n_1} \equiv \theta_L.$$

Per esempio, nel passaggio da acqua ($n_1 \approx 1.33$) ad aria ($n_2 \approx 1$), l'angolo limite θ_L vale circa 49° . Per incidenza con $\theta_1 > \theta_L$ l'ipotesi che la propagazione nel mezzo 2 venga descritta da un'onda piana non è valida e lo studio delle condizioni al contorno sulla superficie di separazione tra i due mezzi deve essere condotto in termini più generali. Per brevità mi limito a enunciare sinteticamente i risultati essenziali; l'oscillazione nel mezzo 2 avviene ancora con la frequenza ω , ma il campo elettromagnetico penetra soltanto in un sottile strato avente spessore di poche lunghezze d'onda; la componente del vettore di Poynting lungo \hat{z} è nulla e di conseguenza l'intensità dell'onda riflessa è uguale a quella dell'onda incidente: si ha *riflessione totale*. Il fenomeno è facilmente osservabile con mezzi casalinghi: basta riempire un bicchiere d'acqua e osservarne la superficie libera dalla parte di sotto. La riflessione totale ha un'importante applicazione tecnologica nelle fibre ottiche, fili di materiale plastico ad alto indice di rifrazione, che consentono di guidare un segnale luminoso su percorsi tortuosi e su grandi distanze senza perdita di energia nelle riflessioni multiple che avvengono sulla superficie laterale.



Nel caso di incidenza su un mezzo otticamente più denso, $n_2 > n_1$, la (10.39) ammette sempre soluzione per qualsiasi valore di θ_1 . Nel caso limite $\theta_1 \approx 90^\circ$ le formule di Fresnel forniscono

$$R_\perp \approx R_\parallel \approx -1, \quad T_\perp \approx T_\parallel \approx 0.$$

L'onda riflessa ha ampiezza praticamente uguale a quella dell'onda incidente, ma è sfasata di π . Questo cambiamento di fase ha importanti effetti che si manifestano nei fenomeni di interferenza che verranno discussi più avanti.

Angolo di Brewster. Per qualsiasi valore degli indici di rifrazione, l'equazione

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1},$$

ammette una soluzione che prende il nome di *angolo di Brewster*. Nel caso di attraversamento aria-vetro, $n_2/n_1 \approx 1.5$, l'angolo di Brewster vale circa 56° . Quando l'angolo di incidenza è pari all'angolo di Brewster la direzione di propagazione dell'onda riflessa è ortogonale a quella dell'onda trasmessa; infatti

$$\theta_1 = \theta_B \quad \implies \quad n_1 \sin \theta_1 = n_2 \cos \theta_1,$$

da cui, confrontando con la legge di rifrazione (10.39), segue

$$\cos \theta_1 = \sin \theta_2 \quad \implies \quad \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}. \quad (10.40)$$

Osservando ora la figura 10.7 si vede subito che l'angolo tra l'onda riflessa e quella trasmessa è $\pi - (\theta_1 + \theta_2) = \pi/2$. La relazione (10.40) implica anche

$$\cos \theta_2 = \sin \theta_1 ,$$

da cui, sostituendo nella (10.37), risulta immediatamente che

$$R_{\parallel}(\theta_B) = 0.$$

Per incidenza con angolo di Brewster, l'onda riflessa è linearmente polarizzata, con il campo elettrico che oscilla perpendicolarmente al piano di incidenza; nel caso in cui l'onda incidente è polarizzata parallelamente al piano di incidenza, ($E_{1y} = 0$), l'onda riflessa manca del tutto e si ha un fenomeno opposto a quello della riflessione totale: la superficie di separazione tra i due mezzi viene attraversata con cambiamento di direzione ma senza alcuna perdita di energia.

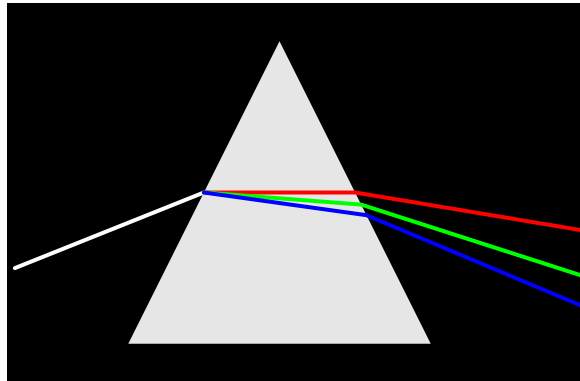
Anche nel caso di angoli di incidenza diversi dall'angolo di Brewster, tranne che nei casi limite $\theta_1 = 0$ e $\theta_1 = \pi/2$ discussi in precedenza, risulta sempre

$$R_{\parallel}^2(\theta_1) < R_{\perp}^2(\theta_1).$$

Perciò, se la radiazione incidente è non polarizzata, la radiazione riflessa è *parzialmente polarizzata* con la componente del campo elettrico parallela alla superficie di separazione dei due mezzi, più grande di quella parallela al piano di incidenza. Per esempio, la riflessione della luce solare su una superficie orizzontale dà luogo a un'onda con ampio grado di polarizzazione orizzontale del campo elettrico.

10.6 Dispersione

Un semplice e famoso esperimento mostra i limiti della descrizione dei fenomeni ottici sviluppata nei paragrafi precedenti.



Un fascetto di luce bianca incidente su un prisma di vetro viene decomposto dalle rifrazioni sulle due facce del prisma in un arcobaleno

iridescente. Nella figura, a scopo illustrativo, sono mostrati i colori rosso verde e blu. Si osservi che la deflessione delle varie componenti cresce al crescere della frequenza. La diversa deflessione di componenti monocromatiche di frequenza differente, che prende il nome di *dispersione*, indica una dipendenza dell'indice di rifrazione da ω .

Per interpretare questo fenomeno occorre tornare ad analizzare il meccanismo di polarizzazione dei dielettrici per tenere conto degli effetti dinamici che si manifestano quando \vec{E} e \vec{P} dipendono dal tempo. Ciò può essere fatto utilizzando il modello di molecola 'alla Thomson' descritto in precedenza. Ricordando la (10.18) l'equazione della dinamica di un elettrone legato elasticamente a una posizione di equilibrio, sotto l'azione di un campo elettrico esterno si scrive

$$m\vec{a} = -m\omega_0^2\vec{r} - m\gamma\vec{v} + q\vec{E}(t).$$

Si noti che, in questa equazione, il campo elettrico è considerato funzione solo del tempo; ciò è lecito perché, per radiazioni nel visibile, la lunghezza d'onda è grande rispetto alle dimensioni della molecola. Dividendo per la massa e moltiplicando per la carica dell'elettrone si ottiene l'equazione della dinamica del momento di dipolo elettrico molecolare

$$\frac{d^2\vec{p}}{dt^2} + \gamma\frac{d\vec{p}}{dt} + \omega_0^2\vec{p} = \frac{q^2}{m}\vec{E}. \quad (10.41)$$

Per un'onda monocromatica, il campo elettrico varia nel tempo con legge sinusoidale:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (10.42)$$

Si verifica subito che la soluzione stazionaria della (10.41) è data da

$$\vec{p}(t) = \alpha(\omega)\vec{E}(t), \quad (10.43)$$

dove la *polarizzabilità molecolare* $\alpha(\omega)$ è un fattore di proporzionalità che dipende dalla frequenza ma non dal tempo. Osservando che

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \alpha\frac{d\vec{E}}{dt} = \alpha(i\omega\vec{E}) \quad \text{e} \quad \frac{d^2\vec{p}}{dt^2} = \alpha\frac{d^2\vec{E}}{dt^2} = \alpha(-\omega^2\vec{E}),$$

e sostituendo nella (10.41) si ottiene

$$-\alpha\omega^2 + \alpha i\omega\gamma + \alpha\omega_0^2 = q^2/m,$$

da cui

$$\alpha(\omega) = \frac{q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}. \quad (10.44)$$

Osserviamo che la differenza tra la (10.43) e la (3.29) del terzo capitolo sta nella dipendenza della polarizzabilità da ω . Il caso statico viene ritrovato nel limite $\omega \rightarrow 0$:

$$\alpha(0) = \frac{q^2/m}{\omega_0^2} \equiv \alpha_0 \quad (10.45)$$

Nota: alle frequenze ottiche, non si ha polarizzazione per orientamento perché la scala dei tempi di allineamento del momento di dipolo con il campo applicato è molto lunga e le molecole non riescono a seguirne le rapide oscillazioni. Per esempio, la costante dielettrica dell'acqua, già alla frequenza di 10^{11} Hz assume il modesto valore che compete alle sostanze non polari. Per questo motivo l'indice di rifrazione dell'acqua vale ~ 1.33 e non ~ 9 come ci si aspetterebbe dal valore statico di ϵ .

e quindi possiamo riscrivere la (10.44) nella forma più conveniente

$$\alpha(\omega) = \alpha_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}.$$

Dalla (10.45) si può stimare l'ordine di grandezza di ω_0 ; assumendo $\alpha_0 \approx 10^{-24} \text{cm}^3$ (vedi § 3.3.1) e sostituendo per q e m i valori di carica e massa dell'elettrone si ottiene $\omega_0 \sim 10^{16} \text{rad/sec}$, che è confrontabile con la scala delle frequenze del visibile.

La parte reale e la parte immaginaria della polarizzabilità vengono facilmente trovate moltiplicando numeratore e denominatore della frazione per $\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma$:

$$\alpha = \alpha_0 \frac{\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} + i\alpha_0 \frac{-\omega_0^2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} = \alpha_e - i\alpha_a,$$

dove

$$\alpha_e \equiv \alpha_0 \frac{\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}, \quad \alpha_a \equiv \alpha_0 \frac{\omega_0^2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2},$$

prendono il nome di '*polarizzabilità elastica*' e '*polarizzabilità assorbitiva*' rispettivamente. La ragione di queste denominazioni è facilmente spiegata; osserviamo in primo luogo che dalla (10.43), passando alle parti reali si ha

$$\vec{p}(t) = \alpha_e \vec{E}_0 \cos(\omega t) + \alpha_a \vec{E}_0 \sin(\omega t).$$

L'evoluzione nel tempo del momento di dipolo è la sovrapposizione di due oscillazioni: una in fase con il campo elettrico di ampiezza proporzionale a α_e , l'altra '*sfasata*' di $\pi/2$ [†] di ampiezza proporzionale a α_a . Ora, la potenza erogata dal campo elettrico sulla carica oscillante è esprimibile attraverso la derivata del momento di dipolo

$$W \equiv \vec{F} \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{E} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Sostituendo le espressioni per \vec{E} e \vec{p} si ottiene con calcoli elementari

$$W = -\alpha_e E_0^2 \omega \cos(\omega t) \sin(\omega t) + \alpha_a E_0^2 \omega \cos^2(\omega t).$$

Il lavoro eseguito dal campo sulla molecola durante un ciclo è quindi

$$\int_0^T W dt = -\alpha_e E_0^2 \omega \int_0^T \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt + \alpha_a E_0^2 \omega \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} \alpha_a E_0^2.$$

Questo lavoro è positivo perché α_a è positiva. La componente di oscillazione in fase con il campo applicato non comporta assorbimento di energia (processo elastico), mentre la componente in quadratura assorbe in ogni ciclo un'energia proporzionale a α_a . L'energia assorbita dalle molecole viene sottratta al campo elettromagnetico e di conseguenza l'ampiezza dell'onda si attenua via via che essa si propaga nel mezzo.

[†]**Nota:** $\sin x = \cos(x - \pi/2)$
L'oscillazione con la funzione seno si dice *in quadratura* rispetto a quella con il coseno.

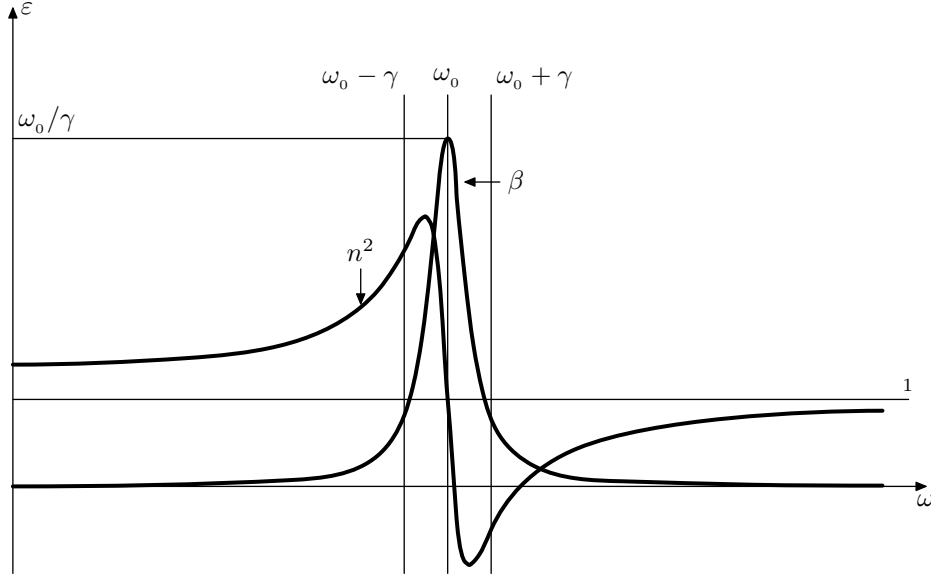


Figura 10.9: Parte reale e parte immaginaria della costante dielettrica in funzione della frequenza.

A una polarizzabilità complessa corrispondono una suscettività e una costante dielettrica complessa[‡]

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\chi(\omega) = 1 + 4\pi N\alpha(\omega) \equiv n^2 - i\beta,$$

dove

$$n^2 = 1 + 4\pi N\alpha_0 \frac{\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}, \quad (10.46)$$

$$\beta = 4\pi N\alpha_0 \frac{\omega_0^2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}. \quad (10.47)$$

Il grafico di $n^2(\omega)$ e $\beta(\omega)$ evidenzia alcune caratteristiche molto importanti della costante dielettrica complessa. Per $\omega \ll \omega_0$ la parte immaginaria è molto piccola rispetto alla parte reale: $\beta \ll n^2$; quando questa condizione è soddisfatta il mezzo risulta trasparente per l'onda elettromagnetica che può penetrare nel materiale fino a distanze molto più grandi della lunghezza d'onda. Dalla relazione di dispersione (10.31) abbiamo infatti

$$\kappa = \sqrt{\varepsilon} \frac{\omega}{c} = \sqrt{n^2 - i\beta} k_0,$$

dove si è usata la lettera greca κ , invece di quella latina k , per distinguere il numero d'onda complesso dalla sua parte reale, e $k_0 \equiv \omega/c$; sviluppando la radice con la formula di Taylor[†]

$$\sqrt{n^2 - i\beta} = n\sqrt{1 - i\beta/n^2} \approx n \left(1 - i\frac{\beta}{2n^2} \right),$$

otteniamo

$$\kappa = nk_0 - i\frac{\beta}{2n^2}nk_0 = k - i\frac{\mu}{2},$$

[‡]Per evitare confusione con l'indice di rifrazione, in questo paragrafo useremo N invece che n per indicare la densità in numero delle molecole.

[†] La formula è valida anche nel campo complesso al prim'ordine in $|\beta/n^2| \ll 1$. La dimostrazione si ottiene facilmente dalla rappresentazione dei numeri complessi mediante modulo e fase.

con

$$k = n \frac{\omega}{c}, \quad \text{e} \quad \mu = \frac{\beta}{n^2} k. \quad (10.48)$$

Sostituendo nell'equazione dell'onda piana risulta

$$E(z, t) = A e^{i(\omega t - \kappa z)} = A e^{i(\omega t - k z + i \mu z / 2)} = A e^{-\mu z / 2} e^{i(\omega t - k z)},$$

che differisce dall'equazione nel vuoto per il fatto che l'ampiezza si smorza esponenzialmente; perciò l'intensità, che è proporzionale al quadrato del campo, si attenua con la legge

$$I(z) = I_0 e^{-\mu z}.$$

La costante μ prende il nome di '*coefficiente di assorbimento*' e ha la dimensione dell'inverso di una lunghezza; quando $z \gg 1/\mu$ l'intensità diventa trascurabile: l'onda elettromagnetica ha ceduto tutta la sua energia ai dipoli del dielettrico.

Nell'intervallo '*di risonanza*' ($\omega_0 - \gamma, \omega_0 + \gamma$) la parte immaginaria della costante dielettrica assume un valore elevatissimo, dell'ordine di ω_0/γ ; al riguardo conviene osservare che per ragioni di disegno, la figura 10.9 è stata tracciata assumendo $\omega_0/\gamma = 10$, mentre i valori di questo rapporto sono vari ordini di grandezza maggiori e perciò il picco di β è molto più alto e stretto di come mostrato in figura. Per frequenze prossime alla risonanza, le onde elettromagnetiche vengono fortemente assorbite, penetrando nel mezzo per poche lunghezze d'onda: il materiale risulta *opaco*.

Il semplice modello classico presentato in questo paragrafo viene modificato dalla teoria quantistica essenzialmente per la presenza di una molteplicità di frequenze di risonanza. Come notato alla fine del secondo paragrafo, gli atomi sono assimilabili a strumenti musicali capaci di oscillare con molte frequenze; di conseguenza, la parte immaginaria della costante dielettrica presenta una serie di picchi in corrispondenza delle frequenze caratteristiche delle specie chimiche presenti nel mezzo: ogni atomo assorbe per risonanza esattamente le stesse frequenze che è in grado di emettere. La presenza di numerose risonanze dà luogo a una dipendenza dalla frequenza molto complessa, delle proprietà ottiche dei materiali; per esempio, può accadere che una serie di picchi di risonanza sia così ravvicinata da dare luogo a una banda di assorbimento in un largo intervallo di frequenze. Senza entrare nei dettagli mi limito a segnalare i risultati delle determinazioni sperimentali del coefficiente di assorbimento per l'acqua; questo ha valori molto elevati (dell'ordine di 10^4 cm^{-1}) per un'ampia gamma di frequenze, dalle microonde fino all'ultravioletto estremo, *fatta eccezione per lo stretto intervallo delle frequenze del visibile* dove crolla di ben sette ordini di grandezza assumendo valori inferiori a 10^{-3} cm^{-1} . Il minimo del coefficiente di assorbimento si raggiunge per la frequenza del colore verde. Se si tiene presente che la vita sulla terra è nata nell'acqua si comprende perché la maggior parte delle specie viventi ha occhi sensibili proprio a quelle frequenze. È anche interessante

notare che il verde è il colore per il quale l'occhio umano ha la massima sensibilità.

Per ω inferiore alla più piccola frequenza di risonanza, la parte immaginaria della costante dielettrica è trascurabile, mentre il quadrato dell'indice di rifrazione n^2 , ha l'andamento mostrato nella parte sinistra della figura 10.9; l'indice di rifrazione è maggiore di uno e cresce lentamente con la frequenza. Per molte sostanze trasparenti la minima frequenza di risonanza è maggiore delle frequenze del visibile e questo giustifica l'approssimazione di n reale e indipendente dalla frequenza dei paragrafi precedenti. Comunque, la semplice teoria classica discussa nel presente paragrafo, è in grado di spiegare il fenomeno della dispersione illustrato dalla figura a pagina 328 dove la componente rossa della radiazione subisce una deflessione minore di quella violetta.

Al di sopra della massima frequenza di risonanza l'assorbimento è di nuovo trascurabile e n^2 tende asintoticamente a uno come nella parte destra di figura 10.9; in questo limite la presenza di materia ha un effetto trascurabile sulla propagazione delle onde elettromagnetiche. Questo è il caso delle radiazioni nucleari, raggi X e raggi γ , per i quali si può assumere che la velocità di propagazione nella materia è la stessa che nel vuoto.

10.6.1 Pacchetti d'onda

Il fatto che alle alte frequenze l'indice di rifrazione sia minore dell'unità, e di conseguenza la velocità di fase c/n sia maggiore della velocità della luce nel vuoto, appare a prima vista una violazione del principio di relatività di Einstein, ma non è questo il caso. Infatti, nella discussione precedente abbiamo considerato la soluzione *stazionaria* dell'equazione (10.41), e perciò i risultati trovati si applicano, in linea di principio, soltanto al caso di un'oscillazione armonica che esiste da sempre e dura in eterno; in questa situazione non si propaga alcuna informazione. La trasmissione di un segnale implica un qualche tipo di modulazione in cui, per esempio, l'ampiezza del campo cresce dal valore iniziale zero a un valore finito per poi tornare eventualmente a zero[†]. Un esempio di segnale modulato in ampiezza è mostrato in figura 10.10; la curva a tratto continuo è il grafico del campo, la curva tratteggiata è il grafico dell'ampiezza. La variabile indipendente ζ riportata sull'asse orizzontale è, indifferentemente, t oppure z : nel primo caso il grafico rappresenta l'evoluzione temporale del campo in un punto fissato (per es. il campo agente su un atomo), nel secondo la configurazione spaziale a un istante fissato.

Consideriamo dapprima l'azione di questo campo su un atomo del materiale ($\zeta \equiv t$). L'espressione analitica del campo da sostituire nella (10.41) differisce dalla (10.42) per il fatto che l'ampiezza E_0 dipende dal tempo[‡]

$$E(t) = E_0(t)e^{i\bar{\omega}t}. \quad (10.49)$$

In questa formula la frequenza della '*portante*' (il fattore sinusoidale) è stata indicata con $\bar{\omega}$ per un motivo che apparirà chiaro poco più avan-

[†] La modulazione in ampiezza è stata impiegata ai primordi delle trasmissioni radiofoniche; attualmente prevale la modulazione di frequenza. In ogni caso la trasmissione di informazione si ottiene variando nel tempo un parametro dell'onda.

[‡] Nel resto del paragrafo ragioniamo su una delle componenti di polarizzazione di \vec{E} , e quindi omettiamo il segno di vettore.

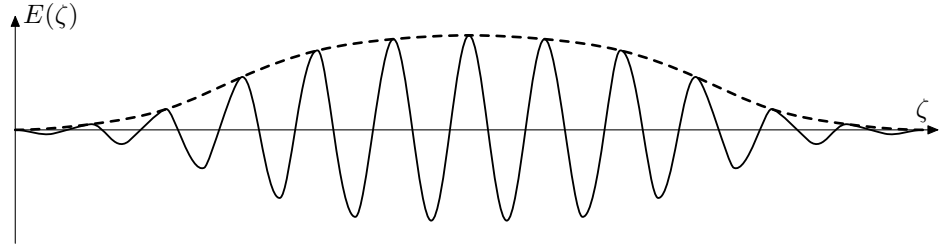


Figura 10.10: Un'onda sinusoidale modulata in ampiezza.

ti. Con questo forzamento la soluzione stazionaria non è, in linea di principio, valida. Tuttavia, se la scala dei tempi su cui varia l'ampiezza dell'onda è grande rispetto a $\tau = 1/\gamma$, la (10.43) costituisce un'eccellente approssimazione. Anche in assenza di una dimostrazione formale la cosa è piuttosto intuitiva; infatti la soluzione generale della (10.41) differisce dalla (10.43) per una soluzione dell'omogenea associata che si smorza a zero in un tempo dell'ordine di $1/\gamma$, e perciò, se durante questo intervallo di tempo l'ampiezza resta praticamente costante, l'oscillazione del dipolo atomico ha il tempo di 'rilassarsi' al regime stazionario. In queste condizioni, l'espressione dell'indice di rifrazione calcolata sopra è ancora applicabile e continua a valere la relazione di dispersione (10.48), per la quale, secondo convenienza si può adottare una delle due forme equivalenti*

*Conviene puntualizzare che $n(\omega)$ e $n(k)$ sono due funzioni differenti. L'abuso di notazione è commesso per evitare di usare due simboli diversi per lo stesso parametro fisico.

$$\omega(k) = \frac{c}{n(k)}k \quad \Longleftrightarrow \quad k(\omega) = \frac{n(\omega)}{c}\omega. \quad (10.50)$$

In vista del fatto che $\tau \sim 10^{-8}\text{sec}$, l'ipotesi di variazione lenta dell'ampiezza non è molto restrittiva; essa è verificata in tutte le applicazioni tecnologiche impiegate nel nostro quotidiano†.

† Il caso di impulsi di durata piccola rispetto a τ , non può essere trattato in maniera elementare e non verrà preso in considerazione.

Ora dobbiamo studiare le proprietà delle soluzioni dell'equazione delle onde che, in un punto fissato dello spazio, hanno un andamento temporale del tipo (10.49). Ciò può essere fatto in maniera matematicamente rigorosa applicando la teoria di Fourier, ma volendo evitare l'uso di metodi analitici non elementari, si può mostrare un esempio semplice che però mette in luce le caratteristiche salienti della soluzione generale. Indichiamo con \bar{k} il numero d'onda corrispondente alla frequenza $\bar{\omega}$

$$\bar{k} = \frac{n(\bar{\omega})}{c}\bar{\omega},$$

e consideriamo un 'pacchetto d'onde', sovrapposizione di onde monocro-

matiche, tutte di eguale ampiezza A , nell'intervallo $(\bar{k} - \Delta k, \bar{k} + \Delta k)$

$$E(z, t) \equiv \int_{\bar{k}-\Delta k}^{\bar{k}+\Delta k} A e^{i(\omega(k)t - kz)} \frac{dk}{2\Delta k}. \quad (10.51)$$

Il fattore costante $2\Delta k$ a denominatore è stato inserito per fare sì che A abbia le dimensioni di un campo elettrico. Δk è un parametro libero che però deve essere scelto piccolo in un senso che verrà precisato più avanti. La funzione (10.51) soddisfa l'equazione delle onde se la frequenza $\omega(k)$ di ciascuna componente monocromatica soddisfa la relazione di dispersione (10.50). Dal momento che la variazione di n con k è molto lenta, per Δk non troppo grande si può approssimare $\omega(k)$ con il suo sviluppo al prim'ordine intorno a \bar{k} :

$$\omega(k) \approx \omega(\bar{k}) + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=\bar{k}} (k - \bar{k}) = \bar{\omega} + v_g(\bar{k})(k - \bar{k}),$$

dove

$$v_g \equiv \frac{d\omega}{dk}. \quad (10.52)$$

In questa approssimazione, la fase di ciascun'onda si può esprimere come

$$\omega t - kz = \bar{\omega} t + v_g(k - \bar{k})t - kz = \bar{\omega} t - \bar{k}z + v_g(k - \bar{k})t - (k - \bar{k})z.$$

Con le posizioni

$$\kappa \equiv k - \bar{k}, \quad \zeta \equiv v_g t - z, \quad (10.53)$$

la soluzione (10.51) si scrive allora

$$E(z, t) = A \left(\int_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{i\kappa\zeta} \frac{d\kappa}{2\Delta k} \right) e^{i(\bar{\omega}t - \bar{k}z)}.$$

Il calcolo dell'integrale tra parentesi è immediato

$$\int_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{i\kappa\zeta} \frac{d\kappa}{2\Delta k} = \frac{e^{i\Delta k\zeta} - e^{-i\Delta k\zeta}}{2i\Delta k\zeta} = \frac{\sin(\Delta k\zeta)}{\Delta k\zeta},$$

e quindi

$$E(z, t) = A \frac{\sin(\Delta k\zeta)}{\Delta k\zeta} e^{i(\bar{\omega}t - \bar{k}z)} = E_0(\zeta) e^{i(\bar{\omega}t - \bar{k}z)}, \quad (10.54)$$

dove

$$E_0(\zeta) = A \frac{\sin(\Delta k\zeta)}{\Delta k\zeta}, \quad (10.55)$$

rappresenta la modulazione di ampiezza che convoglia informazione. Dalla definizione (10.53) di ζ segue immediatamente che il segnale viaggia con la '*velocità di gruppo*'

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{(dk/d\omega)} = \frac{c}{n + \omega(dn/d\omega)}, \quad (10.56)$$

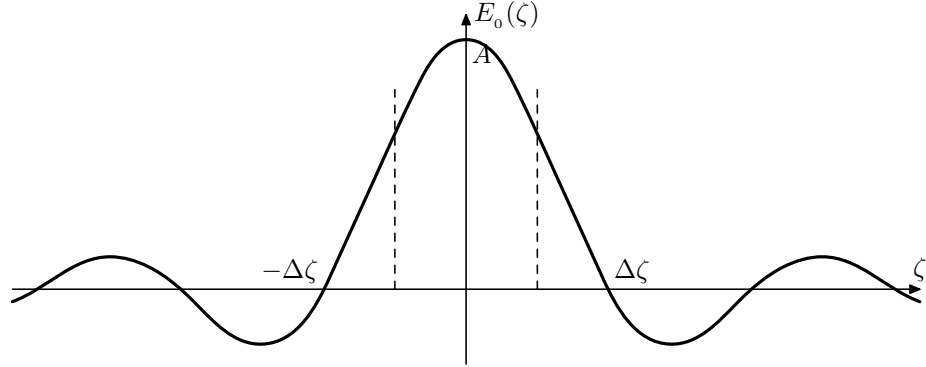


Figura 10.11: Grafico del fattore di modulazione in funzione di $\zeta = v_g t - z$.

che per n funzione crescente di ω è minore della velocità di fase c/n . Lontano¹ dalle risonanze la velocità di gruppo risulta sempre inferiore a c anche per $n < 1$. Il grafico di $E_0(\zeta)$, mostrato in figura 10.11, consente di notare una caratteristica di grande importanza del fattore modulante. Il campo attinge i valori più grandi in un intervallo di estensione all'incirca pari a $\Delta\zeta \sim \pi/\Delta k$ centrato intorno a $\zeta = 0$, indicato in figura dalle linee tratteggiate. A t fissato, $\Delta\zeta = \Delta z$ rappresenta l'estensione spaziale del pacchetto d'onde. Abbiamo quindi l'importante relazione

$$\Delta z \Delta k \sim \pi, \quad (10.57)$$

che stabilisce una correlazione inversa tra la lunghezza del pacchetto e l'*indeterminazione* Δk del numero d'onda: una buona definizione di k , (Δk piccolo), comporta un pacchetto di grande estensione, mentre un pacchetto corto può essere ottenuto soltanto come sovrapposizione di un'ampia gamma di numeri d'onda. La (10.57) rappresenta un esempio di una relazione generale che conviene enunciare, sia pure rinunciando a sviluppare i dettagli analitici. La definizione di pacchetto d'onda, applicabile a qualsiasi segnale modulato in ampiezza è

$$E(z, t) = A \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{i(\omega(k)t - kz)} dk, \quad (10.58)$$

dove $c(k)$ è una funzione, che prende il nome di '*densità spettrale*', con un picco di larghezza Δk intorno a un valore medio \bar{k} , come quello mostrato nella parte sinistra della figura 10.12. L'esempio (10.54) discusso sopra, è

¹In prossimità della risonanza n è funzione rapidamente decrescente di ω (dispersione anomala) e vengono a mancare le premesse che giustificano il calcolo di v_g . In questo caso, la determinazione della velocità del segnale non può essere ottenuta con metodi elementari, ma risulta comunque inferiore a c .

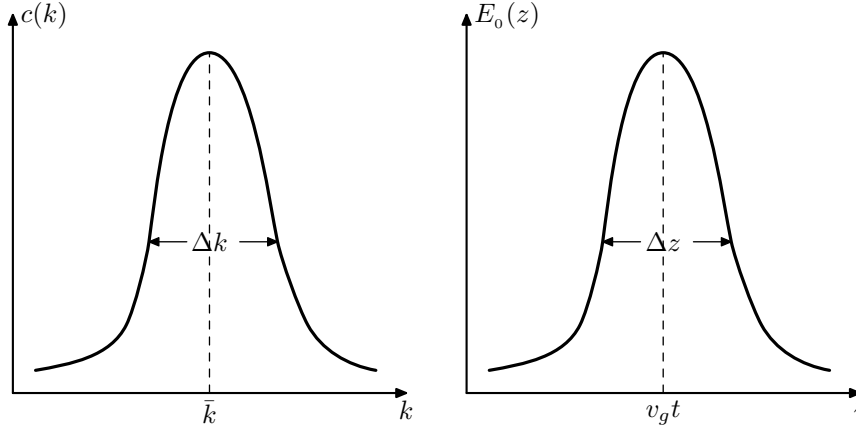


Figura 10.12: Densità spettrale $c(k)$ e fattore di modulazione di un pacchetto d'onde generico.

il caso particolare di una densità spettrale uniforme $1/2\Delta k$ nell'intervallo $(\bar{k} - \Delta k, \bar{k} + \Delta k)$ e zero al di fuori. Nella parte destra della figura 10.12, è rappresentato il profilo di modulazione corrispondente a $c(k)$, a un istante fissato t . Si tratta ancora di una curva 'a campana' centrata intorno a $v_g t$ con una larghezza Δz . Si può dimostrare[†] che, comunque si scelga $c(k)$ risulta sempre

$$\Delta z \Delta k \geq \frac{1}{2}. \quad (10.59)$$

Il valore minimo del prodotto $\Delta z \Delta k$ si realizza per un segnale *gaussiano*, quando la densità spettrale è una distribuzione di Gauss centrata intorno a \bar{k} ; altrimenti si resta sempre al di sopra del limite ottimale di $1/2$ come nella (10.57).

Una relazione analoga alla (10.59) vale per la durata del segnale

$$\Delta t \equiv \frac{\Delta z}{v_g},$$

e l'indeterminazione in frequenza, che viene detta anche '*larghezza di banda*' del segnale

$$\Delta \omega = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=\bar{k}} \Delta k = v_g \Delta k.$$

Si ha immediatamente

$$\Delta t \Delta \omega = \Delta z \Delta k \geq \frac{1}{2}. \quad (10.60)$$

Per esempio, il treno d'onda generato da un atomo o molecola in un singolo atto di emissione, che ha una durata dell'ordine di $\tau \sim 1/\gamma$, non ha una frequenza ben definita; la larghezza di banda è dell'ordine della costante di smorzamento

$$\Delta \omega \sim \gamma.$$

[†]Un enunciato matematico preciso presuppone definizioni precise; nella relazione accanto Δz e Δk sono le dispersioni statistiche delle variabili z e k distribuite con densità di probabilità $|E_0(z)|^2$ e $|c(k)|^2$.

Per ottenere radiazione elettromagnetica con una buona definizione in frequenza, occorrono sorgenti che generano treni d'onda con un tempo di coerenza lungo. Un esempio sono i *Laser*, che non verranno discussi qui perché il loro principio di funzionamento può essere spiegato soltanto con i metodi della Teoria Quantistica.

Relazioni come le (10.59) e (10.60) non sono specifiche delle onde elettromagnetiche, ma valgono per qualsiasi fenomeno ondulatorio retto da leggi lineari. Vale la pena di menzionare che anche le funzioni d'onda della meccanica quantistica, che soddisfano leggi del tutto diverse dalle equazioni di Maxwell, ma ugualmente lineari, sono soggette alle stesse restrizioni che sono conosciute come relazioni di indeterminazione di Heisenberg.

Occorre infine segnalare un limite della discussione svolta in questo paragrafo. Una trattazione matematica più precisa, mostra che in realtà il fattore di modulazione non dipende soltanto da ζ e non mantiene una forma inalterata nel tempo: la larghezza Δz del pacchetto d'onde cresce con t . La cosa è intuitiva se si osserva che componenti di frequenza differente nella sovrapposizione (10.58), viaggiano con velocità di fase diversa. Nel tempo, le componenti a frequenza più alta, che sono più veloci, distanziano quelle a frequenza più bassa. Nel vuoto, questo fenomeno non si presenta perché la propagazione è non dispersiva, con una velocità di fase eguale per tutte le componenti (e uguale alla velocità di gruppo). D'altra parte, l'attraversamento di un mezzo materiale, nella normale pratica di laboratorio e nelle applicazioni tecnologiche, avviene in tempi tanto brevi da non dare luogo a deformazioni significative del pacchetto quando $\bar{\omega}$ è lontano dalle frequenze di risonanza.

10.7 Coerenza e Interferenza

La luce emessa da una lampadina o da un tubo al neon appare come un processo stazionario su tempi ben più lunghi della durata τ dell'emissione da parte di un singolo atomo. Ciò si spiega facilmente se si tiene conto che, in ogni istante, il numero di atomi che emette è confrontabile con il numero di Avogadro. Per il principio di sovrapposizione, il campo di radiazione generato da una sorgente macroscopica è la somma dei campi generati dai singoli atomi; la stazionarietà di questo campo 'macroscopico' è dovuta al fatto che il numero di atomi attivi in ogni istante è praticamente costante. Infatti, se N è il numero medio di atomi che partecipa all'emissione, la fluttuazione statistica, in caso di eventi indipendenti, è \sqrt{N} . Perciò la fluttuazione relativa è $1/\sqrt{N}$ che per un numero dell'ordine del numero di Avogadro è trascurabile. Tuttavia, il fatto che l'emissione non sia un processo realmente continuo, ma la somma di un gran numero di eventi 'discreti', ha importanti conseguenze che verranno analizzate in questo paragrafo.

Per semplicità, supponiamo che le distanze dei singoli atomi dal punto campo siano tutte eguali, diciamo z , e che l'onda sia piana. Consideriamo per il momento solo una delle componenti del campo di radiazione totale

lungo una direzione \hat{x} , ortogonale alla direzione di propagazione \hat{z}

$$E_x(z, t) = \sum_{l=1}^N A_l e^{i(\omega t - kz + \varphi_l)} = e^{i(\omega t - kz)} \sum_{l=1}^N A_l e^{i\varphi_l},$$

dove l'indice l numera gli atomi 'attivi' all'istante $t - z/c$. La somma evidenziata nell'ultima eguaglianza varia in maniera casuale nel tempo, ma è in ogni caso un numero complesso rappresentabile con modulo e fase

$$\sum_{l=1}^N A_l e^{i\varphi_l} = A e^{i\varphi(t)}, \quad (10.61)$$

e perciò il campo di radiazione di una sorgente macroscopica viene rappresentato come

$$E_x(z, t) = A e^{i(\omega t - kz + \varphi(t))}.$$

In base all'osservazione fatta sopra sul grande valore di N , si può assumere costante l'ampiezza A . Ben altrimenti vanno le cose per quanto riguarda la fase; dal momento che i termini nella somma variano nel tempo in maniera casuale, φ varia anch'essa in maniera imprevedibile, assumendo nel tempo con eguale probabilità tutti i valori compresi in $(0, 2\pi)$. La caratterizzazione precisa di una variabile aleatoria come $\varphi(t)$ richiede più matematica di quanto sia opportuno introdurre in questa trattazione elementare. Fortunatamente, per i nostri scopi è sufficiente evidenziare una proprietà di $\varphi(t)$ che si può ricavare facilmente in maniera intuitiva. Consideriamo i valori di φ in due istanti successivi t e $t + \Delta t$; se Δt è molto più piccolo della durata τ di un treno d'onda, i termini nella somma (10.61) sono praticamente gli stessi nei due istanti e perciò $\varphi(t + \Delta t) \approx \varphi(t)$. Viceversa, se $\Delta t \gg \tau$, i treni d'onda che concorrono a produrre il campo macroscopico totale provengono tutti da atomi diversi con fasi diverse e quindi il valore di $\varphi(t + \Delta t)$ non ha alcuna relazione con $\varphi(t)$. Per questo motivo, il tempo τ viene detto '*tempo di correlazione*' o '*tempo di coerenza*'[‡].

La dipendenza dal tempo della 'costante' di fase φ non ha effetto sul calcolo dell'intensità della radiazione perché il tempo di coerenza è molto più lungo del periodo di oscillazione; pertanto continua a valere l'eguaglianza

$$\langle \cos^2(\omega t - kz + \varphi(t)) \rangle = \frac{1}{2}.$$

Prendendo ora in considerazione ambedue le componenti trasversali del campo, abbiamo che l'onda elettromagnetica piana emessa da una sorgente macroscopica viene rappresentata come

$$E_x(z, t) = A_x e^{i(\omega t - kz + \varphi_x(t))}, \quad E_y(z, t) = A_y e^{i(\omega t - kz + \varphi_y(t))}. \quad (10.62)$$

Le componenti E_x e E_y del campo di radiazione prodotto da comuni sorgenti di luce, come le lampade ad incandescenza, hanno ampiezze eguali, $A_x = A_y = A$, ma fasi φ_x , φ_y , che fluttuano nel tempo in maniera

Nota: d'ora in avanti, per non appesantire le notazioni con doppi pedici, il valore massimo del campo verrà indicato con A invece che con E_0 .

[‡] In realtà, oltre alla durata finita dell'emissione, vi sono numerosi altri fattori che influenzano il tempo di coerenza. Per esempio, in una normale lampada ad incandescenza le collisioni molecolari producono fluttuazioni casuali della fase su una scala di tempi molto più piccola di τ . Una discussione dettagliata dei vari processi che determinano il tempo di coerenza non può essere svolta in maniera elementare; comunque, il valore preciso del tempo di coerenza non è rilevante nella presente esposizione.

del tutto indipendente l'una dall'altra. Questo tipo di radiazione si dice *'non polarizzata'*.

Per l'intensità di una radiazione non polarizzata abbiamo[†]

$$I = \frac{c}{4\pi} \langle E^2 \rangle = \frac{c}{4\pi} (\langle E_x^2 \rangle + \langle E_y^2 \rangle) = \frac{c}{4\pi} A^2.$$

[†]Si tenga presente che il quadrato delle componenti del campo si calcola *dopo* aver preso la parte reale delle (10.62). Infatti, la parte reale del quadrato di un numero complesso *non* è uguale al quadrato della parte reale, ma è la differenza dei quadrati delle parti reale e immaginaria.

Si noti la differenza di un fattore due rispetto alla analoga formula (10.20) per la radiazione polarizzata linearmente. Nel calcolo dell'intensità della radiazione non polarizzata prodotta da una sorgente puntiforme potremo generalmente limitarci a considerare soltanto una delle componenti trasversali, salvo a moltiplicare per due il risultato finale. In conclusione, la radiazione non polarizzata, a grande distanza da una sorgente puntiforme, potrà essere rappresentata in forma non vettoriale con l'espressione

$$E(\vec{r}, t) = A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi(t))},$$

dove E rappresenta una qualsiasi delle componenti del campo perpendicolari alla direzione di propagazione \hat{k} , e \vec{r} il vettore che va dal punto sorgente al punto campo.

L'importanza della fase φ viene messa in evidenza sovrapponendo i campi di radiazione di due sorgenti differenti di eguale frequenza

$$E(\vec{r}, t) = A_1 e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 + \varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 + \varphi_2)}. \quad (10.63)$$

Per semplicità, assumiamo che il punto campo sia a distanza grande rispetto alla separazione tra le sorgenti (vedi Figura 10.13); potremo quindi assumere che la direzione di propagazione delle due onde sia la stessa

$$\vec{k}_1 \approx \vec{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{r} = \vec{k},$$

e perciò

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 \approx k r_1, \quad \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 \approx k r_2.$$

La parte reale della (10.63) si scrive

$$\begin{aligned} E(\vec{r}, t) &= A_1 \cos(\omega t - k r_1 + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t - k r_2 + \varphi_2) = \\ &= A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2, \end{aligned}$$

dove, per comodità di scrittura si è posto ϕ_1 (ϕ_2) per la fase totale di ciascuna onda. L'intensità della radiazione è proporzionale al valore medio del quadrato del campo di radiazione totale

$$\begin{aligned} \langle E^2 \rangle &= A_1^2 \langle \cos^2 \phi_1 \rangle + A_2^2 \langle \cos^2 \phi_2 \rangle + 2A_1 A_2 \langle \cos \phi_1 \cos \phi_2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} A_1^2 + \frac{1}{2} A_2^2 + 2A_1 A_2 \langle \cos \phi_1 \cos \phi_2 \rangle. \end{aligned}$$

L'ultimo termine, che prende il nome di *'termine di interferenza'*, può essere riscritto in maniera più semplice utilizzando l'identità trigonometrica

$$2 \cos \phi_1 \cos \phi_2 = \cos(\phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_1 - \phi_2).$$

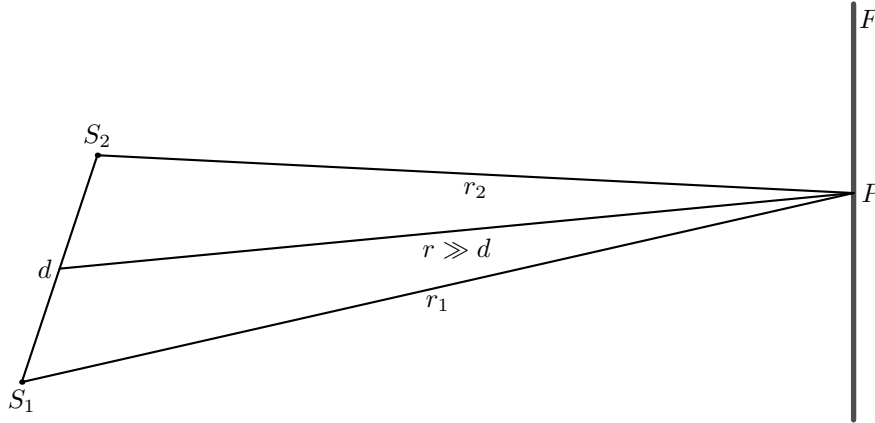


Figura 10.13: Sovrapposizione di onde prodotte da sorgenti puntiformi.

Il valore medio di $\cos(\phi_1 + \phi_2)$, che oscilla nel tempo a frequenza elevata, è ovviamente nullo; perciò, indicando con I_1 (I_2) l'intensità della radiazione emessa dalla sorgente S_1 (S_2) abbiamo per l'intensità totale

$$I = I_1 + I_2 + \sqrt{4I_1I_2} \langle \cos(\phi_1 - \phi_2) \rangle. \quad (10.64)$$

Il termine di interferenza è determinato dalla differenza di fase tra le due onde

$$\phi_1 - \phi_2 = k(r_2 - r_1) + (\varphi_1 - \varphi_2),$$

e dipende dal tempo soltanto attraverso le 'costanti' di fase φ_1 e φ_2 . Se le due sorgenti sono indipendenti tra loro, la fluttuazione casuale delle costanti di fase comporta la fluttuazione casuale della loro differenza: le due sorgenti si dicono '*incoerenti*'. In questo caso il termine di interferenza si annulla e l'intensità della radiazione totale è la somma delle intensità di ciascuna onda componente

$$I = I_1 + I_2.$$

Interponendo uno schermo F sul percorso dell'onda come in Figura 10.13 si ottiene una illuminazione proporzionale all'intensità della radiazione, come si può facilmente verificare utilizzando un '*fotometro*', che misura l'intensità della radiazione incidente, oppure esponendo una lastra fotografica. Del resto, ciò corrisponde a quanto si osserva comunemente nel nostro quotidiano perché usualmente le sorgenti luminose sono incoerenti.

Viceversa, se le sorgenti sono '*coerenti*', vale a dire se la differenza di fase $\varphi_1 - \varphi_2$ è indipendente dal tempo,[‡] allora il valore medio di $\cos(\phi_1 - \phi_2)$ non si annulla, ma può assumere qualsiasi valore nell'intervallo $[-1, 1]$; di conseguenza, l'intensità della radiazione dipende dalla differenza $r_2 - r_1$ tra le distanze del punto campo dalle sorgenti e varia tra un minimo

[‡]**Nota bene:** non si richiede che φ_1 e φ_2 siano indipendenti dal tempo, ma solo che la loro differenza lo sia.

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1I_2} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2,$$

e un massimo

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2.$$

In particolare, per $I_2 = I_1$, l'intensità varia tra zero e $4I_1$ al variare del punto campo. L'illuminazione prodotta su uno schermo presenterà un alternarsi di zone chiare e scure che vengono dette frange di 'interferenza'.

Il primo esperimento deliberatamente² concepito e realizzato per mettere in evidenza l'interferenza è dovuto a Young. Il dispositivo è illustrato schematicamente in Figura 10.14. Una sorgente puntiforme emette radiazione monocromatica che incide su uno schermo opaco M nel quale sono praticate due fenditure parallele. In figura, la dimensione 'lunga' delle fenditure è perpendicolare al piano del foglio e non è rappresentata; è rappresentata invece, come una interruzione nello schermo, la dimensione 'breve' D . Per il fenomeno della diffrazione, di cui si parlerà in seguito, a valle di M ciascuna fenditura emette una radiazione avente intensità apprezzabile entro un angolo di ampiezza



THOMAS YOUNG
1773 – 1829

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{D} \ll 1,$$

centrato intorno alla normale allo schermo; la cosa è mostrata in figura per mezzo dei fronti d'onda. A una distanza dallo schermo forato

$$L > \frac{d}{\Delta\theta} \gg d,$$

si ha sovrapposizione dei campi di radiazione provenienti da S_1 e S_2 . Le due fenditure si comportano come sorgenti che oscillano con le costanti di fase

$$\varphi_1 = \varphi - k\ell_1, \quad \varphi_2 = \varphi - k\ell_2,$$

dove φ è la costante di fase di S (funzione casuale del tempo), e ℓ_1, ℓ_2 sono le distanze da S delle fenditure. Pertanto la differenza di fase tra le fenditure

$$\varphi_1 - \varphi_2 = k(\ell_2 - \ell_1),$$

è *indipendente dal tempo*: le due sorgenti, S_1 e S_2 si dicono 'coerenti'. In questo caso il termine di interferenza nella (10.64) non si media a zero nel tempo ma vale

$$\sqrt{4I_1 I_2} \cos(k(r_2 - r_1) + (\varphi_1 - \varphi_2)). \quad (10.65)$$

Dal momento che $\varphi_1 - \varphi_2$ ha un valore fissato dalla geometria del dispositivo, l'argomento della funzione coseno dipende soltanto dalla differenza

$$\Delta r \equiv r_2 - r_1,$$

²Ben prima di Young, Newton aveva osservato e descritto un fenomeno di interferenza che si manifesta mettendo a contatto due lenti. Però Newton, sostenitore della teoria corpuscolare della luce, non fu in grado di darne un'interpretazione.

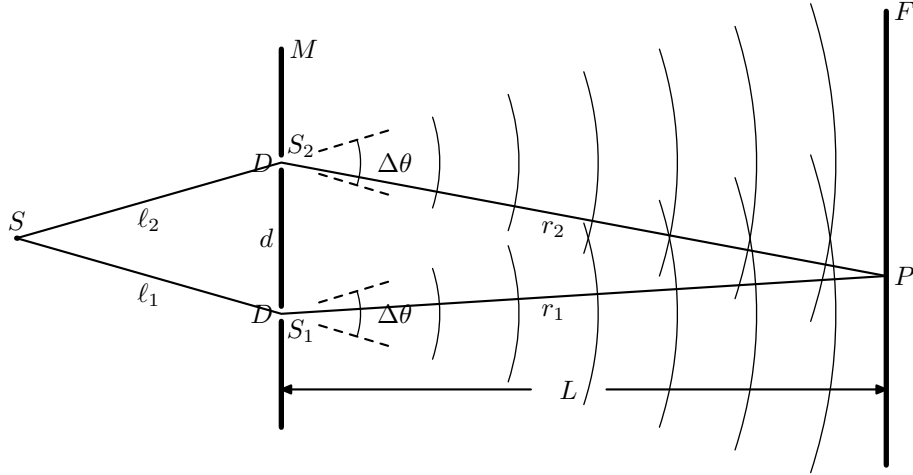


Figura 10.14: Esperimento di Young.

tra le distanze del punto campo P dalle due fenditure. Al variare di P lungo lo schermo varia Δr e varia quindi il coseno oscillando tra i valori -1 e $+1$. Pertanto l'intensità - e quindi l'illuminazione - varia tra i limiti $I_1 + I_2 - \sqrt{4I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$ e $I_1 + I_2 + \sqrt{4I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$, dando luogo a una illuminazione 'a frange' chiare e scure, come mostrato nella foto a margine. Usualmente la sorgente S è posta simmetricamente rispetto alle due fenditure

$$\ell_1 \approx \ell_2 \quad \Rightarrow \quad I_1 \approx I_2,$$

e quindi l'intensità oscilla tra i limiti 0, frangia scura, e $4I_1$, frangia di luminosità doppia di quella prodotta da due sorgenti incoerenti.

Calcoliamo l'intensità della radiazione in un punto P qualsiasi dello schermo F , individuato mediante la distanza x dal punto O equidistante dalle fenditure (vedi Figura 10.15). Mediante considerazioni geometriche elementari, dalla figura si ha

$$\left. \begin{aligned} r_2 &= \sqrt{L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2} \\ r_1 &= \sqrt{L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad \Rightarrow \quad r_2^2 - r_1^2 = 2xd$$

Ora, osserviamo che

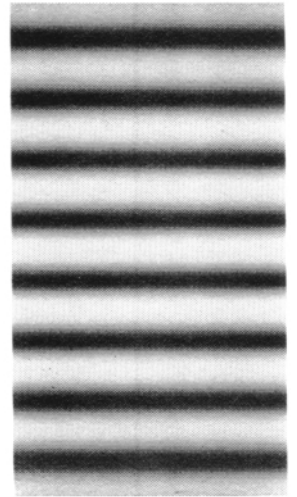
$$\Delta r = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2 + r_1} \approx \frac{r_2^2 - r_1^2}{2L},$$

al prim'ordine in x/L e d/L , e quindi

$$\Delta r(x) = \frac{d}{L} x. \quad (10.66)$$

Allora, dalla (10.64) e (10.65) si ha

$$I(x) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left(k \frac{d}{L} x + (\varphi_1 - \varphi_2) \right),$$



Frangie di interferenza

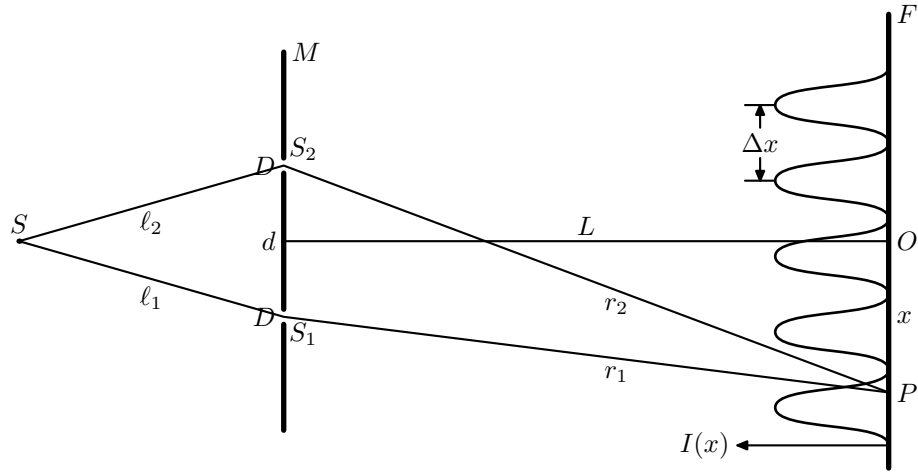


Figura 10.15: Calcolo delle frange.

che nel caso $I_1 = I_2$ si riduce a

$$\begin{aligned}
 I(x) &= 2I_1 \left[1 + \cos \left(k \frac{d}{L} x + (\varphi_1 - \varphi_2) \right) \right] \\
 &= 4I_1 \cos^2 \left(\frac{kd}{2L} x + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right).
 \end{aligned}
 \tag{10.67}$$

Il grafico di questa funzione è riportato in Figura 10.15 lungo un asse perpendicolare allo schermo. L'espressione trovata consente di calcolare la spaziatura delle frange, vale a dire la distanza tra due massimi successivi dell'intensità, indicata in figura con Δx . Poiché la funzione coseno ha un periodo 2π deve essere

$$k \frac{d}{L} \Delta x = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{2\pi}{k} \frac{L}{d} = \lambda \frac{L}{d}.
 \tag{10.68}$$

Questa importante formula mette in evidenza il ruolo della lunghezza d'onda della radiazione nel fenomeno dell'interferenza: la lunghezza caratteristica della modulazione spaziale dell'intensità (Δx) è determinata dalla lunghezza caratteristica (λ) della modulazione spaziale del campo elettromagnetico. Il dispositivo di Young, in un certo senso, fa da 'amplificatore', moltiplicando λ per il fattore molto grande L/d , rendendo così accessibile una scala di lunghezze - dell'ordine di 10^{-5}cm - che fino al momento in cui fu eseguito l'esperimento (~ 1800) era al di fuori del dominio dell'indagine sperimentale.

L'esperimento di Young segnò una svolta nel dibattito sul carattere ondulatorio o particellare della luce, che era stato uno dei temi dominanti nell'ambito delle scienze naturali per tutto il settecento, perché il fenomeno dell'interferenza non è in alcun modo interpretabile in termini di moto di uno sciame di corpuscoli che si muovono secondo le leggi della meccanica classica. Infatti, in un modello particellare della luce manca

una lunghezza caratteristica che consenta di interpretare la modulazione spaziale dell'intensità.

Il risultato di Young stimolò durante l'ottocento un impetuoso sviluppo della teoria ondulatoria della luce che si affermò soprattutto ad opera di Augustin Fresnel. Al riguardo, è interessante notare che, prima di Maxwell, nessuno aveva idea della natura della grandezza che oscillava e tuttavia il solo fatto che la propagazione della luce soddisfa l'equazione delle onde è sufficiente per interpretare un gran numero di fenomeni. L'interferenza è appunto uno di questi; infatti, per ricavare la (10.67), occorre soltanto la relazione di dispersione (10.11) e la legge di proporzionalità tra l'intensità e il quadrato dell'ampiezza. Ovviamente, la teoria di Maxwell, che è esauriente, consente di interpretare, come si vedrà più avanti, un insieme di fenomeni assai più ampio.

Un'applicazione importante e immediata del fenomeno dell'interferenza è la determinazione della lunghezza d'onda, che viene facilmente ottenuta misurando l'ampiezza delle frange Δx e ricavando λ dalla (10.68). Vale la pena di sottolineare che in questo modo si ottiene la misura di una lunghezza microscopica in termini di lunghezze macroscopiche. Una volta che la lunghezza d'onda di una sorgente monocromatica è nota, il fenomeno dell'interferenza viene anche utilizzato per eseguire misure di lunghezza estremamente precise in cui l'onda luminosa è utilizzata come un vero e proprio regolo. A questo scopo sono stati inventati numerosi tipi di *'interferometri'* che non verranno passati in rassegna qui perché questo testo non vuole essere un trattato³ ma solo un'introduzione alle idee di base. Mi limito a descrivere lo specchio di Lloyd rappresentato

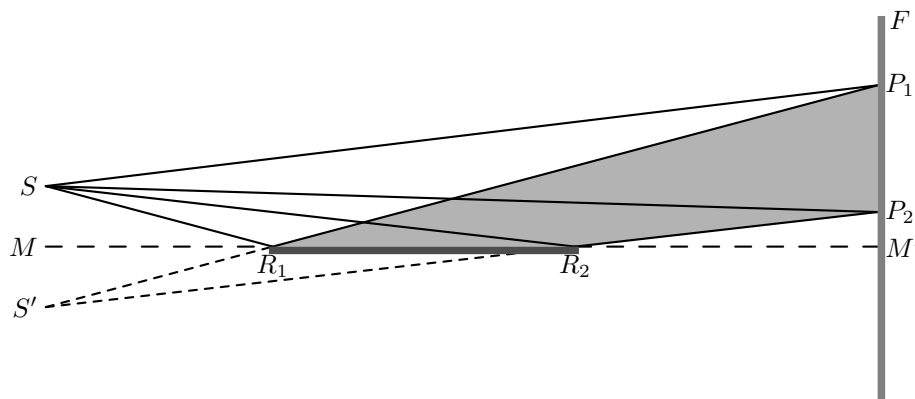


Figura 10.16: Specchio di Lloyd.

in Figura 10.16. Una sorgente puntiforme S illumina con luce radente lo specchio R_1R_2 . Sullo schermo F , posto perpendicolarmente al piano dello specchio, incide sia l'onda proveniente direttamente da S che quella riflessa. La zona in cui si ha la sovrapposizione delle due onde è quella tra P_1 e P_2 . Per simmetria risulta evidente che la lunghezza del percorso

³Una grande opera sull'ottica è: Max Born, Emil Wolf, *PRINCIPLES OF OPTICS*, Pergamon Press (London 1959). Il testo non è recentissimo, ma i classici sono sempre i migliori.

SR_1P_1 (SR_2P_2) è uguale a $S'P_1$ ($S'P_2$) e così per tutte le riflessioni che avvengono nei punti intermedi: dal punto di vista geometrico tutto avviene come se l'onda riflessa provenisse dall'immagine speculare S' della sorgente reale. Ovviamente, S' è coerente con S e si osserva infatti formazione di frange di interferenza. Un aspetto interessante di questo esperimento è che esso mette in evidenza il cambiamento di fase di π dell'onda riflessa previsto dalle formule di Fresnel; infatti, se lo schermo F viene portato a contatto con lo specchio (M' coincidente con R_2) nel punto centrale, che è certamente equidistante dalle sorgenti, si osserva una frangia scura. Per la (10.67) ciò implica appunto $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$.

10.8 Diffrazione



CHRISTIAN HUYGENS
1629 – 1695

Lo studio della propagazione delle onde elettromagnetiche in presenza di mezzi non omogenei, sia trasparenti che opachi, presenta, in generale, difficoltà analitiche formidabili. Fortunatamente, in molte situazioni di interesse, una soluzione approssimata dell'equazione delle onde può essere determinata in maniera piuttosto semplice mediante un metodo noto come *'costruzione di Huygens-Fresnel'*.

Nella formulazione originale, nota con il nome di *'Principio di Huygens'*, si tratta di un metodo di costruzione dei fronti d'onda. Partendo da un fronte d'onda noto, fronti d'onda successivi possono essere determinati come inviluppo di onde sferiche che hanno origine nei punti del fronte iniziale e si propagano con la velocità di fase in quel punto. La figura 10.17 illustra il procedimento. La curva centrale a tratto pieno rappresenta il fronte d'onda di partenza; i circoletti individuano i punti in cui si è fatto centro per tracciare le onde sferiche che determinano il fronte d'onda disegnato a destra. Le sfere hanno raggi differenti perché si è assunto un indice di rifrazione decrescente (e di conseguenza una velocità di fase crescente) andando dall'alto verso il basso della figura. Se i raggi delle sfere sono abbastanza piccoli da poter assumere la velocità di fase uniforme lungo il percorso di ciascuna onda, questa costruzione assicura che la superficie di destra è effettivamente un fronte d'onda. Il procedimento si può poi ripetere partendo dal nuovo fronte con le velocità di fase che competono a nuovi centri. Ovviamente, nel vuoto o in un mezzo omogeneo non c'è alcuna limitazione sui raggi; in questo caso è immediato convincersi che fronti d'onda piani o sferici conservano la loro forma. Nel principio di Huygens interviene la velocità di fase perché la costruzione riguarda la determinazione dei fronti e cioè delle superfici equifase. Osserviamo che la stessa procedura può essere impiegata per ricostruire il fronte di provenienza, come indicato nella parte tratteggiata a sinistra nella figura. In sostanza, nella costruzione di Huygens non vi è distinzione tra passato e futuro: l'informazione se la propagazione avvenga da sinistra a destra o viceversa, deve essere fornita a parte. In effetti, l'equazione delle onde è del second'ordine rispetto al tempo e perciò, anche conoscendo il campo elettromagnetico in tutti i punti dello spazio all'istante zero non se ne può determinare l'evoluzione se non viene asse-

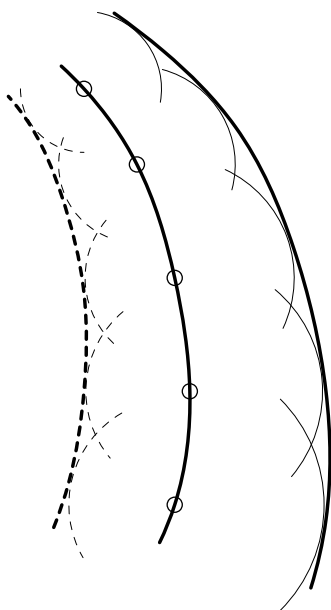


Figura 10.17: Costruzione di Huygens

gnata anche la derivata prima rispetto al tempo. Per questo motivo, la costruzione di Huygens è applicabile soltanto in condizioni stazionarie, per onde monocromatiche pure, o in assenza di dispersione.

L'idea di Huygens venne perfezionata da Fresnel per ottenere non solo le superfici di eguale fase ma anche l'ampiezza dell'onda. L'ipotesi introdotta da Fresnel è che ciascun punto del fronte di partenza debba essere considerato come una vera e propria sorgente che emette un'onda sferica di ampiezza proporzionale all'ampiezza dell'onda in quel punto. L'ampiezza in qualsiasi altro punto dello spazio può essere allora calcolato sommando le onde sferiche generate dalle singole sorgenti. Questa procedura, utilizzata con successo da Fresnel per la sua teoria della diffrazione della luce, venne giustificata in maniera matematica rigorosa da Kirchhoff molti anni dopo. In effetti, la formula di Kirchhoff è alquanto più complicata della procedura di Fresnel che però ne costituisce una eccellente approssimazione quando venga adoperata per determinare l'ampiezza in punti che distano molte lunghezze d'onda dal fronte di partenza. Per i nostri scopi sarà sufficiente un'argomento intuitivo basato sulla natura elettromagnetica della luce. Immaginiamo di disporre lungo un fronte d'onda un conduttore ideale di resistività nulla. I buoni conduttori, anche in piccoli spessori, sono i tipici materiali opachi nelle frequenze del visibile per la presenza di portatori di carica, liberi di oscillare con la frequenza del campo elettromagnetico incidente. Nella figura 10.18 i puntini bianchi rappresentano alcuni portatori; chiedo al lettore uno sforzo di fantasia per immaginare una nube fitta di punti carichi che ricopre in maniera omogenea la superficie \mathcal{S} . Indicando con $\vec{E}(\vec{r}') \cos(\omega t)$ il campo elettrico in un punto dello schermo, l'equazione



AUGUSTIN JEAN
FRESNEL
1788 – 1827

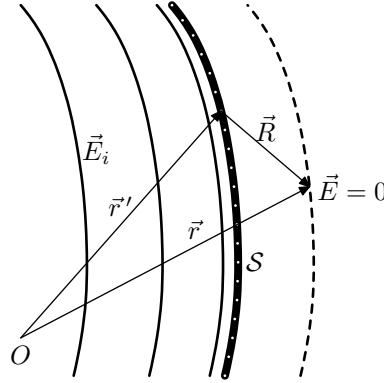


Figura 10.18: Un'onda elettromagnetica viene schermata da uno schermo conduttore.

della dinamica di un portatore situato in quel punto si scrive

$$m\vec{a} = q\vec{E} \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E} \cos(\omega t).$$

La carica oscilla in fase con il campo ed emette a sua volta un'onda sferica che, per la (10.1) è data da

$$\vec{E}_r(\vec{r}, t) = -\frac{q^2 [\vec{E}(\vec{r}')]_{\perp}}{mc^2 R} \cos[\omega(t - R/c)],$$

dove $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ (vedi figura). Il campo emesso dai portatori presenti in un elemento $d\vec{S}$ dello schermo sarà

$$d\vec{E}_S = dN \vec{E}_r = n \vec{E}_r dS$$

dove n è la densità di portatori di carica. Il contributo al campo totale \vec{E} delle cariche sullo schermo si esprime allora come

$$\vec{E}_S(\vec{r}) = -\frac{nq^2}{mc^2} \int_S \frac{[\vec{E}(\vec{r}')]_{\perp}}{R} \cos[\omega(t - R/c)] dS.$$

Osserviamo che nell'integrale compare il campo totale \vec{E} , somma del campo della radiazione incidente \vec{E}_i e del campo \vec{E}_S ; l'approssimazione di Fresnel consiste nell'assumere, *sullo schermo*, $\vec{E}(\vec{r}')$ proporzionale a \vec{E}_i secondo un fattore di proporzionalità indipendente da \vec{r}' . Conglobando tutte le costanti in un solo fattore f potremo infine scrivere

$$\vec{E}_S(\vec{r}) = -f \int_S \frac{[\vec{E}_i(\vec{r}')]_{\perp}}{R} \cos[\omega(t - R/c)] dS. \quad (10.69)$$

Ora, l'annullamento del campo totale nella regione a destra dello schermo in figura 10.18, implica

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_S = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_i(\vec{r}) = f \int_S \frac{[\vec{E}_i(\vec{r}')]_{\perp}}{R} \cos[\omega(t - R/c)] dS, \quad (10.70)$$

che è appunto la formula che consente di determinare il campo in tutti i punti ‘a valle’ di \mathcal{S} una volta noto il campo su \mathcal{S} , nota come *costruzione di Huygens-Fresnel*. Osserviamo che lo schermo opaco funziona in maniera analoga allo schermo elettrostatico: l’onda incidente non viene inghiottita, ma è schermata da un’onda identica in opposizione di fase, prodotta dalle cariche nel conduttore.

Il valore del fattore f può essere determinato imponendo che la potenza totale che attraversa i fronti d’onda a valle di \mathcal{S} è pari a quella che attraversa \mathcal{S} , ma di solito quello che interessa è il rapporto delle ampiezze nei vari punti dello spazio piuttosto che i valori assoluti.

Nella parte sinistra della figura 10.18, a monte dello schermo, non vi è cancellazione dei campi perchè i versi di propagazione delle due onde sono opposti; \vec{E}_s è l’onda riflessa dallo schermo conduttore. A differenza di quanto accade per la riflessione sulla superficie di separazione tra due dielettrici, l’intensità della radiazione riflessa dalla superficie di un conduttore ideale è uguale a quella della radiazione incidente. Ovviamente, un conduttore reale assorbe una piccola percentuale della radiazione incidente, ma già in tempi antichi le proprietà riflettenti dei metalli erano ben note e usate per la fabbricazione di specchi in rame o bronzo. Gli specchi migliori vengono ora ottenuti depositando un sottile strato di argento su un supporto di vetro, indispensabile per proteggere il metallo dall’ossidazione.

10.8.1 Diffrazione da una fenditura

Applichiamo il metodo di Fresnel per calcolare il campo di radiazione a valle di uno schermo opaco nel quale è praticata una fenditura. Per rendere semplici i calcoli, consideriamo il caso di una fenditura lunga e sottile, per cui possiamo ricondurci allo studio di un problema piano. Nella figura 10.19 un’onda piana, rappresentata dai fronti d’onda a sinistra, incide su uno schermo opaco nel quale è praticata una fenditura di larghezza D e estensione illimitata nella direzione perpendicolare al piano del foglio. La direzione di propagazione \hat{k} è perpendicolare al piano dello schermo e perciò la superficie \mathcal{S} della fenditura è una porzione di fronte d’onda della radiazione incidente. Il calcolo del campo risulta semplice nella ‘zona di Fraunhofer’, a distanza L grande rispetto alla larghezza D della fenditura (vedi figura). In questa ipotesi, tutti i segmenti che uniscono punti della fenditura con un punto fissato, P , dello schermo sulla destra, sono con buona approssimazione paralleli e formano uno stesso angolo, θ , con la normale OC allo schermo. Inoltre, il campo incidente ha la stessa ampiezza e la stessa fase in tutti i punti della fenditura, per cui nella (10.70), potremo porre

$$\vec{A}_0 \equiv f[\vec{E}_i]_{\perp},$$

una costante indipendente da \vec{r}' . Ancora, introducendo un’ascissa s misurata a partire da O per individuare i punti della fenditura, dalla

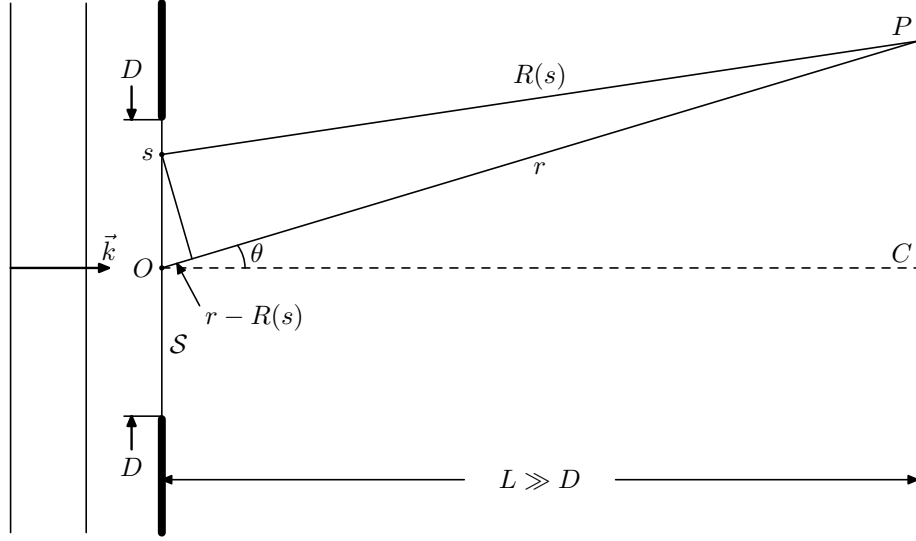


Figura 10.19: Calcolo della figura di diffrazione di Fraunhofer.

figura risulta immediatamente

$$R(s) = r - s \sin \theta. \quad (10.71)$$

Dal momento che $|s| < D/2 \ll L < r$, in prima approssimazione $R \approx r$, e perciò, sopprimendo il pedice i e usando la notazione con l'esponenziale complesso, la (10.70) si riduce a

$$\vec{E}(r, \theta) = \frac{\vec{A}_0}{r} \int_{-D/2}^{D/2} e^{i(\omega t - kR)} ds. \quad (10.72)$$

Nell'argomento dell'esponenziale l'approssimazione $R \approx r$, non è valida a causa del valore molto grande di k che rende la funzione molto sensibile a variazioni, anche minute, di s . Tenendo presente la (10.71) scriviamo

$$\int_{-D/2}^{D/2} e^{i(\omega t - kr + ks \sin \theta)} ds = e^{i(\omega t - kr)} \int_{-D/2}^{D/2} e^{ik \sin \theta s} ds.$$

[†] Il calcolo è identico a quello svolto a pagina 335 per il pacchetto d'onde.

Ora l'integrazione è immediata[†]

$$\int_{-D/2}^{D/2} e^{ik \sin \theta s} ds = \left[\frac{e^{iks \sin \theta}}{ik \sin \theta} \right]_{-D/2}^{D/2} = 2 \frac{\sin(kD \sin \theta / 2)}{k \sin \theta}.$$

Introducendo la variabile adimensionale

$$\Phi(\theta) \equiv \frac{kD}{2} \sin \theta = \pi \frac{D}{\lambda} \sin \theta, \quad (10.73)$$

possiamo scrivere questo risultato nella forma molto semplice

$$\int_{-D/2}^{D/2} e^{ik \sin \theta s} ds = D \frac{\sin(\Phi)}{\Phi}.$$

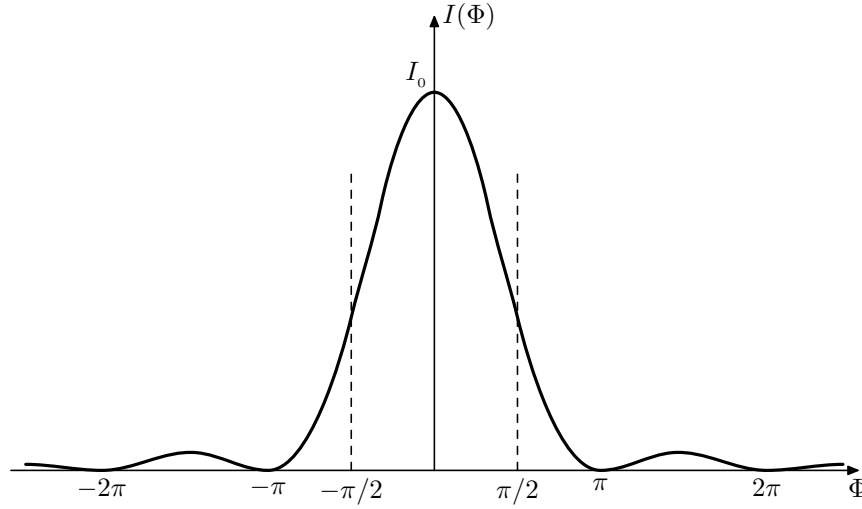


Figura 10.20: Intensità della radiazione a valle di una fenditura.

In conclusione, il campo di radiazione (10.72) a valle della fenditura si esprime come

$$\vec{E}(r, \theta) = \vec{A}(r, \theta) e^{i(\omega t - kr)}, \quad (10.74)$$

dove

$$\vec{A}(r, \theta) \equiv \frac{D \vec{A}_0}{r} \frac{\sin(\Phi(\theta))}{\Phi(\theta)}. \quad (10.75)$$

Si tratta di un'onda sferica centrata in O di ampiezza decrescente con $1/r$ e dipendente dalla variabile Φ secondo un fattore modulante del tutto simile a quello calcolato nella (10.55) per il pacchetto d'onde: il grafico dell'ampiezza come funzione di Φ , a r fissato, è identico a quello riportato in figura 10.11. Più interessante, ai fini di ciò che si osserva sullo schermo a destra in figura 10.19, è il grafico dell'intensità, disegnato in figura 10.20, che è espressa da

$$I(\Phi) = I_0 \left(\frac{\sin \Phi}{\Phi} \right)^2$$

dove $I_0 = I(0)$. Abbiamo un picco molto alto centrato intorno a $\Phi = 0$, fiancheggiato da una serie di picchi laterali di altezza via via decrescente, separati da frange scure. L'annullamento di $I(\Phi)$ si ha per $\sin \Phi = 0$ ($\Phi \neq 0$) e cioè

$$\Phi_m = m\pi \quad \implies \quad \sin \theta_m = m \frac{\lambda}{D}$$

per tutti i valori interi di m , zero escluso. Usualmente è $D \gg \lambda$ per cui la condizione di frange scure è con ottima approssimazione

$$\theta_m \approx m \frac{\lambda}{D}.$$

Quando D è abbastanza grande, le frange sono così ravvicinate da non essere distinguibili a occhio nudo: la luce che entra da una finestra sembra

Esercizio: Dimostrare che la condizione per i massimi è

$$\tan \Phi = \Phi.$$

Dimostrare inoltre che questa condizione è verificata, con buona approssimazione per gli angoli θ che soddisfano

$$\sin \theta_m \approx (m + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{D}.$$

seguire le leggi dell'ottica geometrica. Tuttavia, il fenomeno è facilmente osservabile anche con mezzi casalinghi e può essere verificato anche guardando contro luce i rebbi di una forchetta messa quasi di profilo.

Nel caso in cui, invece di una fenditura sottile e allungata, in uno schermo opaco viene aperto un foro di forma generica, il calcolo esatto delle frange di Fraunhofer può essere piuttosto complicato, ma i risultati sono qualitativamente del tutto simili. Per esempio, per un'apertura circolare di raggio a , ponendo

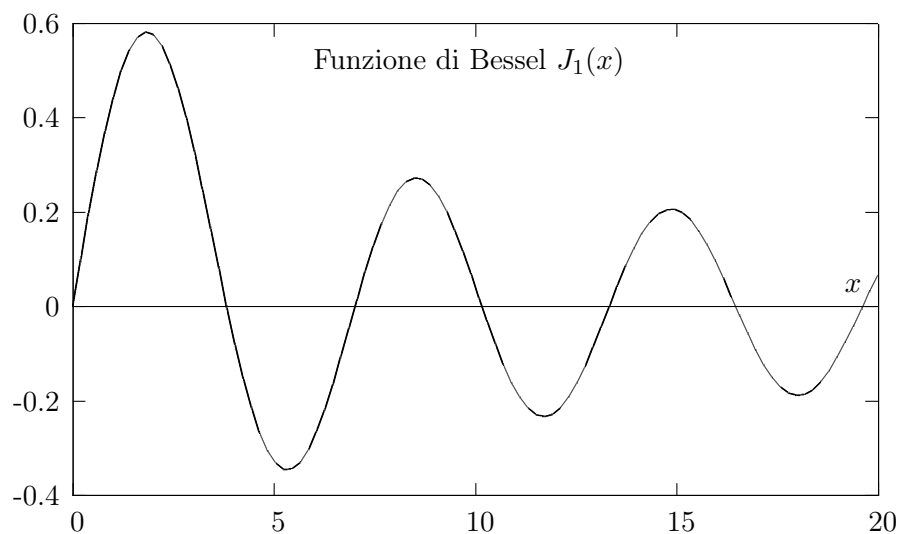
$$\Phi = ka \sin \theta = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta, \quad (10.76)$$

si ha

$$I(\Phi) = I_0 \left[\frac{2J_1(\Phi)}{\Phi} \right]^2,$$

dove J_1 è la funzione di Bessel⁴ di ordine 1. I calcoli non sono molto complicati in questo caso, ma non è nello spirito di questa esposizione dare trattazioni sistematiche e perciò non li presento[†]. Piuttosto, per i lettori che non hanno familiarità con le funzioni di Bessel, conviene riportare il grafico della funzione $J_1(x)$

[†]Si possono trovare nel citato testo di BORN E WOLF, oppure in qualsiasi trattato di ottica.



Il grafico è disegnato solo per i valori positivi dell'argomento, perché J_1 è una funzione dispari

$$J_1(-x) = -J_1(x).$$

L'andamento oscillante intorno al valore zero somiglia a quello della funzione seno, ma J_1 non è periodica, gli zeri non sono ugualmente spaziat[‡]

[‡]Comunque, la distanza tra due zeri successivi non è molto diversa da π .

⁴Definizione, proprietà e tavole delle funzioni di Bessel si possono trovare in: M. ABRAMOWITZ AND I. STEGUN "Handbook of Mathematical Functions" Dover.

e l'ampiezza delle oscillazioni si smorza al crescere dell'argomento. Nelle vicinanze dell'origine, lo sviluppo in serie di potenze, arrestato al prim'ordine è

$$J_1(x) \approx \frac{1}{2}x \quad (|x| \ll 1),$$

per cui

$$\lim_{\Phi \rightarrow 0} \frac{2J_1(\Phi)}{\Phi} = 1.$$

Il grafico dell'intensità in funzione di Φ ha lo stesso andamento di quello mostrato in figura 10.20 per la fenditura. La differenza sostanziale è che il primo zero adiacente all'origine della funzione J_1 ha ascissa $x \approx 3.83 \approx 1.22\pi$, per cui la prima frangia scura, ricordando la (10.76), si presenta per l'angolo

$$\sin \theta_1 \approx 1.22 \frac{\lambda}{2a} = 1.22 \frac{\lambda}{D},$$

dove D è il diametro dell'apertura circolare. Come si vede non c'è neanche una grossa differenza quantitativa con il caso della fenditura.

Uno schermo opaco nel quale è praticata un'apertura viene chiamato '*diaframma*'. I diaframmi vengono utilizzati in ottica per limitare l'estensione trasversale di un'onda luminosa; l'onda piana, per esempio, ha un'estensione illimitata nelle direzioni perpendicolari al vettore di propagazione \vec{k} . Nel passaggio attraverso un diaframma l'estensione trasversale viene limitata, ma ciò avviene a spese di una perdita di definizione di \vec{k} . Infatti, anche trascurando i massimi di diffrazione secondari, la direzione di \vec{k} non è fissata ma può puntare in qualsiasi direzione nel cono di apertura θ_1 . L'indeterminazione della componente trasversale del vettore di propagazione può essere definita come

$$\Delta k_{\perp} \sim \frac{1}{2}k \sin \theta_1.$$

Tenendo presenti i risultati ottenuti per la diffrazione di Fraunhofer, abbiamo

$$\Delta k_{\perp} \sim \frac{1}{2}k \frac{\lambda}{D} \implies D \Delta k_{\perp} \sim \pi.$$

Questa relazione è del tutto simile alla (10.57), trovata per l'estensione longitudinale di un pacchetto d'onde. Il legame di proporzionalità inversa, tra l'estensione di un pacchetto d'onde in qualsiasi direzione, e l'incertezza della componente del vettore d'onda lungo la stessa direzione è generale.

10.8.2 Reticoli

Uno schermo opaco nel quale sono praticate una serie numerosa di fenditure parallele ugualmente spaziate, viene detto '*reticolo di diffrazione*'. Ponendo un reticolo sul cammino di un'onda piana, l'interferenza tra le onde sferiche emergenti dalle singole fenditure, produce un sistema di frange molto sottili che consentono una determinazione estremamente precisa della lunghezza d'onda. Facendo riferimento alla figura 10.21,

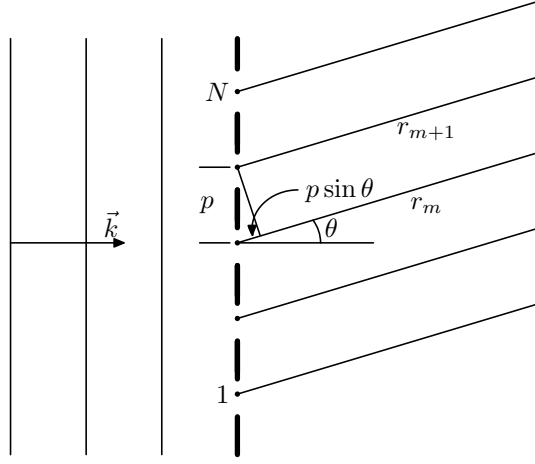


Figura 10.21: Calcolo delle frange prodotte da un reticolo di diffrazione.

indichiamo con N il numero di fenditure e con p il *passo del reticolo*, distanza tra i centri di due fenditure adiacenti. Il campo a valle dello schermo, tenendo presente la (10.74) si esprime come

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{m=1}^N \vec{A}(r_m, \theta_m) e^{i(\omega t - kr_m)},$$

dove r_m e θ_m sono la lunghezza e l'angolo con la normale al reticolo, della congiungente il centro della fenditura m -esima con il punto campo. Nella zona di Fraunhofer si può assumere, per gli argomenti dell'ampiezza, $r_m \approx r$ e $\theta_m \approx \theta$ dove r e θ si riferiscono al centro del sistema di fenditure. Pertanto il campo a grande distanza dal reticolo si esprime come

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{A}(r, \theta) \sum_{m=1}^N e^{i(\omega t - kr_m)} = \vec{A}(r, \theta) e^{i(\omega t - kr_1)} \sum_{m=1}^N e^{ik(r_1 - r_m)}. \quad (10.77)$$

Osservando la figura si vede subito che la differenza di cammino per due fenditure adiacenti è

$$r_m - r_{m+1} = p \sin \theta \quad \implies \quad r_1 - r_m = (m-1)p \sin \theta,$$

e perciò

$$\sum_{m=1}^N e^{ik(r_1 - r_m)} = \sum_{m=1}^N e^{i(m-1)kp \sin \theta} = \sum_{m=1}^N q^{m-1},$$

dove si è posto

$$q \equiv e^{ikp \sin \theta} = e^{2i\phi}, \quad \phi = \frac{kp}{2} \sin \theta = \pi \frac{p}{\lambda} \sin \theta.$$

Il significato fisico di 2ϕ è evidente: si tratta della differenza di fase con cui arrivano nel punto campo, le onde prodotte da due fenditure adiacenti. Ora, tenendo presenti le proprietà delle progressioni geometriche abbiamo

$$\sum_{m=1}^N q^{m-1} = \frac{1-q^N}{1-q} = q^{(N-1)/2} \frac{q^{N/2} - q^{-N/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}},$$

e quindi

$$\sum_{m=1}^N e^{ik(r_1 - r_m)} = e^{i(N-1)\phi} \frac{\sin(N\phi)}{\sin\phi}.$$

Ora, sostituendo nella (10.77) e tenendo conto della definizione di ϕ , abbiamo

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{A}(r, \theta) e^{i(\omega t - kr_1 + \frac{N-1}{2}kp \sin\theta)} \frac{\sin(N\phi)}{\sin\phi}.$$

Osservando che

$$r_1 - \frac{N-1}{2}p \sin\theta \approx r,$$

possiamo scrivere infine per il campo di radiazione a valle di un reticolo

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{A}(r, \theta) \frac{\sin(N\phi)}{\sin\phi} e^{i(\omega t - kr)}. \quad (10.78)$$

L'ampiezza dell'onda risultante è quindi il prodotto dell'ampiezza prodotta da una singola fenditura, per un fattore di modulazione dipendente dal numero di fenditure. Osservando che

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(N\phi)}{\sin\phi} = \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\sin(N\phi)}{\sin\phi} = N,$$

e ricordando l'espressione (10.75) di $\vec{A}(r, \theta)$, l'ampiezza del campo del reticolo può essere scritta in maniera conveniente come

$$\vec{A}_R(r, \theta) = \vec{A}(r) \frac{\sin\Phi}{\Phi} \frac{\sin(N\phi)}{N \sin\phi},$$

dove $\vec{A}(r)$ è l'ampiezza a $\theta = 0$. Considerando soltanto la dipendenza dall'angolo θ abbiamo per l'intensità[†]

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin\Phi}{\Phi} \right)^2 \left[\frac{\sin(N\phi)}{N \sin\phi} \right]^2 = I_0 \left(\frac{\sin\Phi}{\Phi} \right)^2 \mathcal{R}(\phi), \quad (10.79)$$

dove I_0 è l'intensità a $\theta = 0$ e

$$\mathcal{R}(\phi) = \left[\frac{\sin(N\phi)}{N \sin\phi} \right]^2.$$

I reticoli per le misure di lunghezza d'onda vengono costruiti incidendo decine di migliaia di fenditure su una superficie ampia qualche centimetro; quindi $N \sim 10^4$ e $p \sim 10^{-4}$ cm. Dal momento che la larghezza D

[†]Si osservi che A è N volte l'ampiezza prodotta da una singola fenditura, e perciò I_0 è N^2 volte l'intensità di una sola fenditura. Si ricordi l'analoga osservazione fatta a proposito dell'esperimento di Young.

della singola fenditura è inferiore a p , il fattore $\pi D/\lambda$ nella (10.73) non è molto grande e perciò la variazione di Φ con θ è relativamente lenta. La funzione $\mathcal{R}(\phi)$, a causa del grande valore di N , ha invece una variazione rapidissima con l'angolo di osservazione. Per studiare l'andamento di questa funzione, osserviamo in primo luogo che \mathcal{R} è periodica di periodo π e possiede massimi relativi di altezza 1 detti '*principali*', per tutti i valori di ϕ multipli interi di π :

$$\phi_m = m\pi \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{R}(\phi_m) = 1, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10.80)$$

Limitiamoci allora all'intervallo $(0, \pi)$ all'interno del quale $\sin \phi$ al denominatore non si annulla, mentre il numeratore si annulla per

$$\zeta_j = \frac{j}{N}\pi \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{R}(\zeta_j) = 0, \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Dal momento che \mathcal{R} è non negativa, tra questi zeri si presentano altri punti di massimo relativo '*secondari*' che però hanno un'altezza molto inferiore all'unità. Infatti, questi massimi sono tutti all'interno dell'intervallo $(\pi/N, \pi - \pi/N)$ nel quale

$$\sin \phi > \frac{\pi}{N} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{R} < \left[\frac{1}{N \sin(\pi/N)} \right]^2 < \frac{1}{\pi^2} \approx 0.1.$$

Nella figura 10.22, il grafico di \mathcal{R} è disegnato per $N = 10$. In pratica

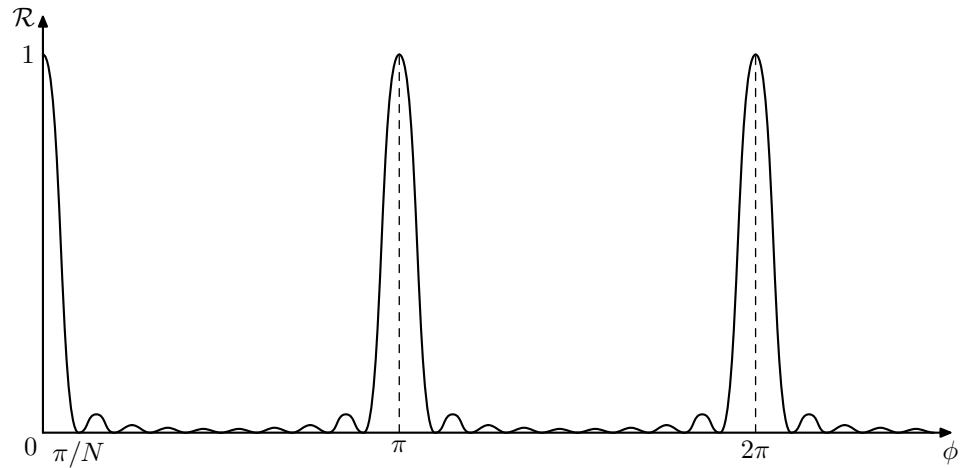


Figura 10.22: Grafico della funzione di modulazione \mathcal{R} .

risultano visibili soltanto i massimi principali per i quali è soddisfatta la condizione (10.80), che in termini di θ si scrive

$$\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{p}. \quad (10.81)$$

A fianco di un massimo centrale ($m = 0$) nella direzione di propagazione dell'onda incidente, si osserveranno due massimi al primo ordine

($m = \pm 1$), due massimi al secondo ordine ($m = \pm 2$), e così via. La misura dell'angolo θ_m corrispondente all'ordine m , noto il passo del reticolo, consente di ricavare la lunghezza d'onda della radiazione. Mediante i reticoli si ottengono misure estremamente precise perché l'incertezza nella determinazione di θ_m è molto piccola; infatti, l'ampiezza dei massimi principali, in termini di ϕ , è dell'ordine di

$$\Delta\phi_m = \Delta\left(\frac{\pi p}{\lambda} \sin \theta_m\right) \sim \frac{\pi}{N},$$

cui corrisponde un'ampiezza angolare

$$\Delta\theta_m \sim \frac{\lambda}{Np \cos \theta_m}. \quad (10.82)$$

Si osservi che il prodotto Np rappresenta la larghezza totale del reticolo che è molto maggiore di λ , e perciò $\Delta\theta_m$ è piccolo.

Nel caso in cui la radiazione incidente non è monocromatica, il reticolo compie un'analisi spettrale perché componenti di lunghezza d'onda differente producono massimi principali (a parte quello centrale) per angoli diversi. All'ordine m , una componente di lunghezza d'onda $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ produce un massimo per un angolo

$$\sin \theta'_m = \frac{m}{p}(\lambda + \Delta\lambda) = \sin \theta_m + \frac{m}{p}\Delta\lambda.$$

Per $\Delta\lambda$ piccolo, anche la differenza $\sin \theta'_m - \sin \theta_m$ è piccola e perciò

$$\sin \theta'_m - \sin \theta_m \approx \cos \theta_m (\theta'_m - \theta_m),$$

e quindi gli angoli per cui si formano i massimi di intensità della componente λ e della componente λ' differiscono di

$$\theta'_m - \theta_m \approx \frac{m}{p \cos \theta_m} \Delta\lambda.$$

I due massimi saranno distinguibili se questa differenza è non minore dell'ampiezza angolare (10.82) dei massimi all'ordine m (*criterio di Rayleigh*)

$$\theta'_m - \theta_m \sim \Delta\theta_m \quad \implies \quad \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \sim mN.$$

Il prodotto mN , viene chiamato '*potere risolutivo*' del reticolo, perché misura appunto la capacità di un reticolo di *risolvere* (nell'accezione di scomporre, separare in parti) due componenti spettrali vicine. Per avere il massimo potere risolutivo, conviene quindi osservare massimi di diffrazione all'ordine più alto possibile. A questo riguardo si osservi comunque che, per la (10.81), m non può essere maggiore di p/λ . Inoltre, per la presenza del fattore dipendente da Φ nella espressione (10.79) dell'intensità, al crescere di m i massimi diventano via via meno luminosi. Da questo punto di vista è preferibile adottare reticoli a trasmissione o riflessione, in cui una periodicità spaziale è ottenuta, invece che incidendo fenditure in uno schermo opaco, incidendo dei solchi in una lastra trasparente o su

una superficie riflettente. In questo modo, a parte la piccola perdita di energia dovuta alla riflessione, tutta l'intensità della radiazione incidente viene convogliata nei sottili massimi principali. Esempi di reticoli a riflessione (non fabbricati a questo scopo) sono i Compact Disk di musica o dati. Sulla superficie 'scritta' di un CD sono incise 625 tracce per millimetro che corrispondono a un passo reticolare $p = 1.6 \times 10^{-4}$ cm. Le iridescenze che chiunque di noi ha avuto occasione di osservare maneggiando questi oggetti comuni sono dovute appunto alla dispersione delle diverse componenti di luce bianca.

Strutture periodiche nello spazio sono presenti in natura. Gli atomi o ioni situati ai vertici di un reticolo cristallino sono uno degli esempi più importanti. Si tratta in questo caso di reticoli tridimensionali, che danno luogo a figure di interferenza più complesse di un reticolo piano, ma la condizione di massimo principale è ancora del tipo (10.81). Dal momento che il passo di questi reticoli è di pochi Ångström, la (10.81) può essere soddisfatta solo per $m = 0$, nel caso di lunghezze d'onda del visibile. Invece, nella gamma dei raggi X che hanno lunghezza d'onda dell'ordine dell'Ångström si formano massimi principali distinti da quello centrale. In effetti, la dimostrazione della natura elettromagnetica dei raggi X , fu ottenuta nel 1912 da M. Laue, W. Friedrich e P. Knipping, proprio dall'osservazione di questi massimi di interferenza. Più importante ancora, nel 1927 C. J. Davisson e L. H. Germer, e indipendentemente da loro G. P. Thomson, osservarono sperimentalmente figure di diffrazione, in tutto simili a quelle dei raggi X , irraggiando reticoli cristallini con *elettroni*. I risultati di questi esperimenti confermarono in pieno l'ipotesi di Louis de Broglie che al moto di una particella è associata la propagazione di un'onda di lunghezza d'onda $\lambda = h/p$, dove h è la costante di Planck e p la quantità di moto della particella. Da allora, l'uso di fasci di particelle, per analizzare la struttura di sistemi microscopici è diventata una tecnica sperimentale di uso comune.

Per una descrizione degli esperimenti di diffrazione con elettroni, consiglio:

LA FISICA DI BERKELEY, vol. 4 *Quantum Physics*, McGraw-Hill.

10.9 Diffusione della luce

Nelle frequenze del visibile, mentre i solidi e i liquidi presentano usualmente un indice di rifrazione compreso tra 1 e 2, per i gas n differisce ben poco dall'unità. Questa caratteristica può essere interpretata facilmente osservando l'espressione (10.46) di n^2 . Infatti, per ω inferiore alla più piccola frequenza di risonanza ω_0 , si ha

$$n^2 \approx 1 + 4\pi N\alpha_0,$$

dove, N rappresenta la densità in numero delle molecole e α_0 è la polarizzabilità statica per deformazione, che nel terzo capitolo abbiamo valutato essere dell'ordine di 10^{-24} cm³. Ora, per i solidi e i liquidi $N \sim 10^{23}$ cm⁻³, e perciò il termine $4\pi N\alpha_0$ è dell'ordine dell'unità, mentre per i gas la densità N è di vari ordini di grandezza inferiore e di conseguenza $n \sim 1$. Per esempio, l'indice di rifrazione dell'aria in condizioni standard di temperatura e pressione, risulta essere $n \approx 1.0003$. Inoltre, tenendo presente

la (10.47), anche l'assorbimento di energia risulta del tutto trascurabile. Pertanto, le leggi di propagazione della radiazione luminosa in un gas sono sostanzialmente identiche a quelle nel vuoto. Tuttavia, la presenza delle molecole del gas si manifesta attraverso un importante fenomeno, che prende il nome di diffusione (*scattering*) della luce, che consiste nell'irraggiamento di radiazione elettromagnetica in tutte le direzioni. La figura 10.23 illustra schematicamente il fenomeno; un'onda piana incidente su una regione dove è presente un gas, la attraversa senza che i fronti d'onda subiscano deformazioni apprezzabili: l'onda emergente è ancora piana e si propaga nella stessa direzione perchè il gas ha un effetto trascurabile sulla velocità di fase. Tuttavia, oltre l'onda emergente prevista dalla descrizione macroscopica, si osserva una radiazione che si propaga in tutte le direzioni, rappresentata in figura mediante fronti curvi, che è appunto l'onda diffusa. Un esempio di questo fenomeno è sotto gli occhi di tutti: l'atmosfera della Terra, che di notte è invisibile, con il sole emette una luce di colore azzurro abbastanza intensa da impedire la visione delle stelle.

Per interpretare il fenomeno della diffusione della luce, ricordiamo in primo luogo che per la (10.43) il campo elettrico dell'onda incidente, che per il momento assumiamo monocromatica, induce nelle molecole di un mezzo materiale un momento di dipolo

$$\vec{p}(t) = \alpha(\omega)\vec{E}(t) = \vec{p}_0 \cos(\omega t), \quad (10.83)$$

dove

$$\vec{p}_0 = \alpha(\omega)\vec{A} \approx \alpha_0\vec{A}, \quad (10.84)$$

dove \vec{A} è l'ampiezza dell'onda incidente. Ciascuna molecola diventa quindi centro di emissione di un'onda sferica avente la stessa frequenza

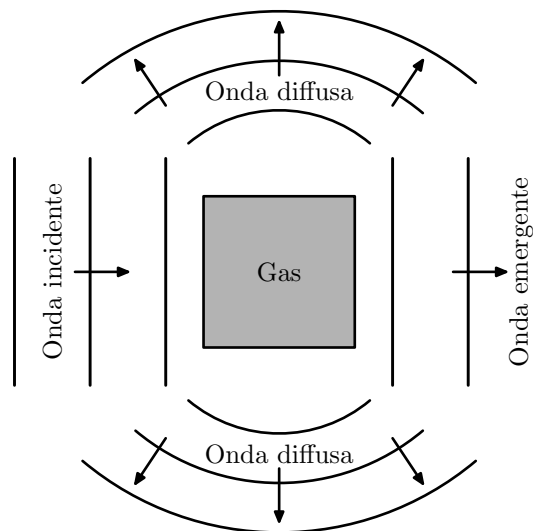


Figura 10.23: Diffusione della luce nell'attraversamento di un gas.

dell'onda incidente e ampiezza proporzionale a \vec{p}_0 . Questo campo di radiazione 'secondario' si somma al campo dell'onda incidente contribuendo a determinare il campo totale nel mezzo. In assenza di assorbimento, le oscillazioni delle molecole sono in fase con il campo incidente, e come abbiamo visto nel paragrafo 10.6, la propagazione del campo totale è determinata dalla relazione di dispersione caratterizzata da un indice di rifrazione reale $n(\omega)$. Alla base di questa descrizione vi è l'assunzione implicita che le proprietà del mezzo non varino in maniera apprezzabile su distanze dell'ordine delle lunghezze d'onda e su tempi confrontabili con il tempo di coerenza. Per mostrare la necessità di questa ipotesi, si può ricorrere a un semplice argomento intuitivo che evita eccessive complicazioni formali. Immaginiamo il mezzo trasparente suddiviso in celle di dimensioni piccole rispetto alla lunghezza d'onda. Tutte le molecole in una cella sono forzate a oscillare con la stessa fase, per cui la cella agisce come una sorgente puntiforme di onde sferiche di ampiezza proporzionale al numero di molecole in essa contenute. Se le celle sono tutte uguali e il mezzo è omogeneo abbiamo un reticolo di sorgenti di passo minore della lunghezza d'onda che produce soltanto il massimo centrale di diffrazione. Di conseguenza, a parte il piccolo sparpagliamento angolare del massimo centrale non si ha nessuna radiazione diffusa come quella mostrata in figura 10.23. Ciò si verifica per i mezzi trasparenti allo stato solido, in cui le molecole occupano posizioni sostanzialmente fissate e la densità è uniforme anche a una scala di lunghezze piuttosto piccola; questi sono visibili solo in virtù delle riflessioni sulla superficie di separazione con altri mezzi. Per questo motivo una porta di vetro risulta praticamente invisibile ed è necessario segnalarne la presenza con qualche fregio colorato.

Nei liquidi e nei gas, dove le molecole sono animate da un moto caotico e non sono legate a posizioni fisse, la densità a piccola scala di lunghezze varia da punto a punto e, soprattutto, da istante a istante. Per analizzare le implicazioni di queste fluttuazioni di densità, prendiamo in considerazione due celle del reticolo descritto sopra, che in una direzione diversa da quella del massimo centrale, interferiscono distruttivamente perché generano campi in opposizione di fase. Utilizzando gli indici 1 e 2 per distinguere le due celle, indichiamo con \vec{E}_1 e $\vec{E}_2 = -\vec{E}_1$, i campi generati da una singola molecola e con m_1 e m_2 il numero delle molecole. Il campo totale delle due celle è quindi

$$\vec{E}_d = m_1 \vec{E}_1 + m_2 \vec{E}_2 = (m_1 - m_2) \vec{E}_1.$$

Tenendo presente che il numero di molecole in una cella è $m = N\Delta v$, in un corpo omogeneo e celle di ugual volume sarà $m_1 = m_2$ e perciò il campo totale nullo, in accordo con l'osservazione fatta sopra per i mezzi solidi. Nei liquidi e nei gas, invece, il coefficiente $m_1 - m_2$ varia nel tempo in maniera casuale. Osserviamo che m_1 e m_2 fluttuano intorno allo stesso valore medio, diciamo m , a causa della omogeneità su grande scala, e perciò la loro differenza assume con uguale probabilità valori positivi e negativi. Di conseguenza il valore medio di \vec{E}_d è nullo, ma non

è nullo il valor medio del quadrato del campo

$$\langle E_d^2 \rangle = \langle (m_1 - m_2)^2 E_1^2 \rangle, \quad (10.85)$$

e non nulla è l'intensità della radiazione diffusa.

Il calcolo della media (10.85) è agevolato dalla circostanza che la scala dei tempi su cui varia la differenza $m_1 - m_2$ è molto più lunga[†] del periodo di oscillazione del campo. Pertanto, nella (10.85) possiamo sostituire E_1^2 con il suo valore medio

$$\langle E_d^2 \rangle = \langle (m_1 - m_2)^2 \rangle \langle E_1^2 \rangle \implies I_d = \langle (m_1 - m_2)^2 \rangle I_1,$$

dove I_1 è l'intensità della radiazione prodotta da una singola molecola e I_d l'intensità della radiazione totale. Utilizzando l'identità banale

$$(m_1 - m_2)^2 \equiv (m_1 - m)^2 + (m_2 - m)^2 - 2(m_1 - m)(m_2 - m),$$

e osservando che, se m è il numero medio di molecole in ciascuna cella, l'ultimo termine si media a zero, otteniamo

$$\langle (m_1 - m_2)^2 \rangle = \langle (m_1 - m)^2 \rangle + \langle (m_2 - m)^2 \rangle.$$

Notiamo ancora che l'intensità I_1 della radiazione emessa da una molecola nella cella 1 è uguale all'intensità I_2 per una molecola nella cella 2; allora l'espressione del campo complessivo delle due celle si scrive in definitiva

$$I_d = \langle (m_1 - m)^2 \rangle I_1 + \langle (m_2 - m)^2 \rangle I_2.$$

Nonostante le molecole nelle due celle oscillino in opposizione di fase, l'intensità della radiazione prodotta è non nulla perché la fluttuazione casuale delle ampiezze riduce[‡] la coerenza; quanto maggiore è lo scarto quadratico medio delle variabili aleatorie m_1 e m_2 , tanto maggiore sarà l'intensità della radiazione diffusa. La teoria cinetica mostra che nei gas le fluttuazioni di densità, alla scala di pochi Ångström sono molto grandi e risulta con ottima approssimazione

$$\langle (m_1 - m)^2 \rangle = \langle (m_2 - m)^2 \rangle \approx m,$$

mentre nei liquidi

$$\langle (m_1 - m)^2 \rangle = \langle (m_2 - m)^2 \rangle \ll m.$$

La cosa è piuttosto intuitiva se si considera che le molecole di un liquido si trovano in condizioni simili a quelle di uno spettatore di un concerto rock, mentre quelle di un gas sono come i passanti che attraversano una piazza di periferia in un giorno di pioggia.

Il semplice argomento presentato qui rende conto della caratteristica essenziale della radiazione diffusa da un gas che si osserva sperimentalmente: l'intensità è proporzionale al numero *totale* di molecole e all'intensità della radiazione di una singola molecola. Quest'ultima è proporzionale all'intensità della radiazione incidente; infatti, per la (10.15),

[†]Osserviamo che il numero di molecole in una cella non varia apprezzabilmente nel tempo che una particella impiega ad attraversare la cella stessa. La velocità di agitazione termica a temperatura ambiente è dell'ordine di 10^4 cm/s; perciò, per una cella avente dimensioni di qualche decina di Ångström, il tempo di attraversamento della cella è dell'ordine di 10^{-11} s.

[‡]In ogni caso, I_d è minore dell'intensità che produrrebbero due sorgenti incoerenti, che vale $m^2 I_1 + m^2 I_2$.

la potenza totale media irraggiata da un dipolo oscillante, omettendo costanti inessenziali, è

$$\langle W \rangle \propto p_0^2 \omega^4,$$

da cui, tenendo conto della (10.84) risulta

$$I_d \propto \alpha_0^2 \omega^4 I(\omega), \quad (10.86)$$

dove si è indicato con $I(\omega) \propto A^2$, l'intensità della radiazione incidente associata alla frequenza ω . Se la radiazione incidente non è monocromatica la formula si applica separatamente a tutte le frequenze in essa contenute. La proporzionalità con la quarta potenza di ω comporta che le componenti a frequenza più elevata vengono diffuse maggiormente di quelle a frequenza più bassa. Un'interessante conseguenza di questa caratteristica del fenomeno di diffusione è la colorazione azzurra del cielo sereno. Nella radiazione bianca del sole le frequenze del visibile hanno, all'incirca, tutte la stessa ampiezza e perciò $I(\omega)$ nella (10.86) si riduce a una costante. Indicando con ω_v e ω_r le frequenze del violetto e del rosso, dalla (10.86) si ha

$$\frac{I_d(\omega_v)}{I_d(\omega_r)} = \left(\frac{\omega_v}{\omega_r} \right)^4 = \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_v} \right)^4.$$

Utilizzando i valori delle lunghezze d'onda riportati nella tabella a pagina 310 otteniamo

$$\frac{I_d(\omega_v)}{I_d(\omega_r)} = \left(\frac{6600}{4000} \right)^4 \approx 7.$$



JOHN WILLIAM STRUTT
LORD RAYLEIGH
1842 – 1919

Quindi, nella radiazione diffusa, l'intensità associata alle frequenze più alte del visibile è prevalente su quella associata alle frequenze basse, producendo la sensazione di colorazione azzurra. Osserviamo inoltre che, pur in assenza di assorbimento, la diffusione sottrae energia all'onda incidente e produce quindi un'attenuazione dell'intensità del massimo centrale di diffrazione. Per questo motivo i colori dominanti dell'alba e del tramonto, osservando in direzione prossima a quella di propagazione dell'onda incidente, sono il giallo e il rosso che vengono diffusi in misura minore. Questa spiegazione del colore del cielo è dovuta a Lord Rayleigh, e il meccanismo di diffusione illustrato sopra viene chiamato '*Rayleigh scattering*'. La teoria di Rayleigh è applicabile, oltre che alle molecole, a particelle in sospensione nell'aria aventi dimensioni inferiori a un decimo di lunghezza d'onda. Per particelle di dimensioni maggiori, la trattazione della luce diffusa è molto più complessa ('*Mie scattering*') e non verrà svolta qui. Vale comunque la pena di segnalare che questa radiazione diffusa ha un'intensità che non dipende apprezzabilmente dalla frequenza, e perciò appare bianca. Le finissime goccioline di acqua che costituiscono le nubi sono un esempio tipico di questa diffusione. Inoltre, l'intensità ha un massimo molto pronunciato nella direzione della radiazione incidente; per questo motivo, osservando il cielo nella zona vicina al sole si può notare che il colore azzurro scolorisce nel bianco.

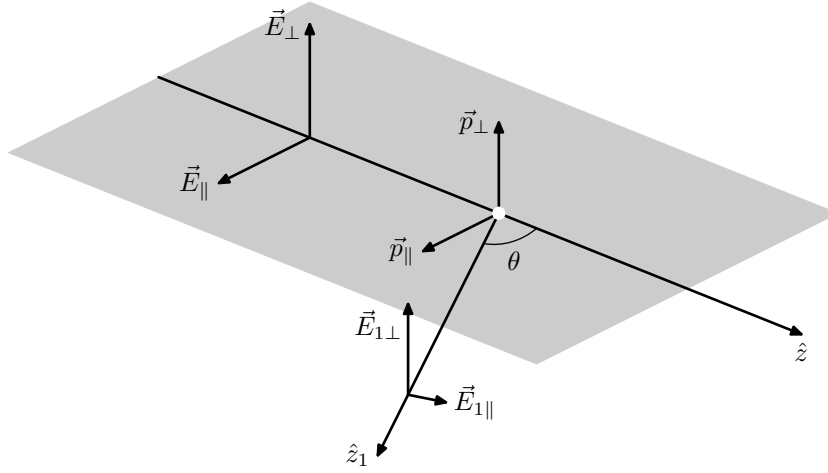


Figura 10.24: Componenti di polarizzazione della radiazione diffusa

La radiazione di Rayleigh presenta anche polarizzazione; consideriamo la radiazione diffusa in una direzione \hat{z}_1 che forma un angolo θ con la direzione \hat{z} dell'onda incidente, come mostrato in figura 10.24. Indichiamo con \vec{E}_\perp e \vec{E}_\parallel , le componenti del campo elettrico incidente, rispettivamente perpendicolare e parallela al piano, ombreggiato in figura, individuato dai due versori di propagazione. Per un'onda non polarizzata, come la luce solare, queste due componenti hanno la stessa ampiezza e sono incoerenti. In una molecola, rappresentata in figura da un pallino chiaro, si induce un momento di dipolo con componenti, perpendicolare e parallela proporzionali al campo incidente. Perciò, \vec{p}_\perp e \vec{p}_\parallel , oscillano con la stessa ampiezza e fasi incoerenti. Le componenti del campo diffuso, $\vec{E}_{1\perp}$ e $\vec{E}_{1\parallel}$, sono ugualmente incoerenti, ma non hanno la stessa ampiezza. Infatti, per la (10.5), soltanto la componente trasversale a \hat{z}_1 , del momento di dipolo è efficace per produrre l'onda diffusa; dalla geometria della figura risulta immediatamente che

$$E_{1\parallel} = E_{1\perp} \cos \theta.$$

Abbiamo quindi un'onda diffusa 'parzialmente polarizzata', con componenti incoerenti, ma di ampiezza diversa. Perpendicolarmente alla direzione di propagazione dell'onda incidente ($\theta = \pi/2$), la componente $\vec{E}_{1\parallel}$ è nulla: l'onda diffusa è linearmente polarizzata, con il campo elettrico che oscilla nella direzione perpendicolare al piano di \hat{z} e \hat{z}_1 . Ciò comporta che osservando il cielo in una direzione[†] perpendicolare a quella del sole, si percepisce una luminosità inferiore a quella che proviene dalla direzione opposta a quella del sole (guardare nella direzione del sole non è consigliabile). Naturalmente, in città non si vede niente di tutto questo, neanche nella giornate che sembrano molto limpide, a causa del massiccio inquinamento atmosferico; la presenza di vari tipi di particelle in sospensione nell'aria da luogo a molteplici effetti di riflessione e diffusione, molto più complicati della 'singola diffusione' da parte delle

[†]Ci sono infinite di queste direzioni che, sulla volta celeste, disegnano un arco di circonferenza.

molecole, che maschera il fenomeno. Tuttavia, disponendo di un filtro polarizzatore, che permette il passaggio di una sola componente del campo di radiazione, anche un cittadino può osservare quest'arco di cielo più scuro, che prende il nome di *'fascio di Heidinger'*.

10.10 Ottica Geometrica

In questo paragrafo viene discussa la propagazione di onde elettromagnetiche in mezzi trasparenti il cui indice di rifrazione varia lentamente con la posizione. Più precisamente, su distanze dell'ordine della lunghezza d'onda della radiazione, l'indice di rifrazione rimane praticamente uniforme. In questa ipotesi, non si hanno massimi principali di diffrazione oltre il massimo centrale, e la propagazione è descritta da un'unica famiglia di fronti d'onda. Ciascun fronte è caratterizzato da un valore fissato della fase che, per un'onda monocromatica, eliminando il fattore $\exp(i\omega t)$, dipende esclusivamente dalla posizione; pertanto, indicando con ϕ la fase, la famiglia delle superfici dei fronti è rappresentata dalla famiglia di equazioni

$$\phi(\vec{r}) = \bar{\phi}, \quad (10.87)$$

dove $\bar{\phi}$ indica un parametro che 'etichetta' le superfici. Per esempio, tenendo presente la (10.12), il fronte di fase π di un'onda piana in un mezzo omogeneo ha equazione

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \varphi - \pi,$$

che ha la forma generale (10.87) attraverso le identificazioni

$$\phi(\vec{r}) \equiv \vec{k} \cdot \vec{r}, \quad \bar{\phi} \equiv \varphi - \pi.$$

Osserviamo che qui il vettore d'onda \vec{k} è determinato dalla funzione ϕ ; infatti, dalla definizione di gradiente si ha subito

$$\vec{k} = \text{grad } \phi. \quad (10.88)$$

[†] **Nota Bene.** La discussione è comunque limitata ai mezzi *isotropi e non dispersivi*; la velocità di fase è indipendente dalla direzione di propagazione e dalla frequenza.

In un mezzo non omogeneo,[†] a causa della diversa velocità di fase nei diversi punti dello spazio, anche un fronte inizialmente piano si deforma, e perciò l'espressione di $\phi(\vec{r})$ sarà più complicata perché il vettore \vec{k} non è più uniforme ma dipende dalla posizione. Tuttavia, nell'ipotesi di variazione lenta dell'indice di rifrazione, la (10.88) continua a valere in quanto sulla scala delle lunghezze d'onda, \vec{k} non varia in maniera significativa. Abbiamo quindi un primo risultato importante:

Nell'approssimazione dell'ottica geometrica, la direzione di propagazione di un'onda elettromagnetica in ogni punto è perpendicolare al fronte d'onda passante per quel punto.

Il versore di propagazione, \hat{k} , si ottiene subito dalla (10.88) dividendo per il modulo del vettore d'onda:

$$\hat{k} = \frac{1}{k} \text{grad } \phi,$$

che, tenendo conto della relazione di dispersione (10.31), si scrive

$$\hat{k} = \frac{c}{n\omega} \text{grad } \phi.$$

Questa formula motiva la seguente definizione di funzione ‘iconale’ (in inglese scientifico ‘eikonal’)

$$L(\vec{r}) \equiv \frac{c}{\omega} \phi = \frac{\lambda_0}{2\pi} \phi(\vec{r}), \quad (10.89)$$

dove λ_0 è la lunghezza d’onda nel vuoto corrispondente alla frequenza ω . Si noti che l’iconale ha dimensione di lunghezza e quindi il gradiente è adimensionale. Inoltre, a differenza di ϕ , la funzione L varia lentamente (nel senso specificato sopra) con la posizione; infatti il modulo del gradiente di L è dell’ordine dell’unità. In termini dell’iconale, la direzione di propagazione di un’onda è espressa da

$$\hat{k} = \frac{1}{n} \text{grad } L, \quad (10.90)$$

che non dipende esplicitamente dalla frequenza della radiazione. Nel limite in cui la dispersione è trascurabile (n indipendente da ω), la (10.90) si applica anche a radiazione non monocromatica, come ad esempio la luce solare o quella di una lampada a incandescenza. In effetti, con l’introduzione dell’iconale, la natura ondulatoria dei fenomeni ottici viene completamente mascherata e diventa possibile una interpretazione in termini di propagazione di particelle. Per vederlo cominciamo con l’osservare che la funzione L può essere determinata, in maniera del tutto indipendente dalla fase dell’onda, come soluzione dell’equazione dell’iconale

$$(\text{grad } L)^2 = n^2, \quad (10.91)$$

che si ottiene dal prodotto scalare della (10.90) per se stessa.

Senza soffermarsi sugli aspetti matematici del problema posto dalla (10.91), daremo per scontato che una soluzione esista, osservando soltanto che, anche qui, per l’unicità della soluzione si richiedono opportune condizioni al contorno. La cosa è ovvia, dal momento che occorre specificare, in ogni particolare problema di ottica, in che modo viene illuminato un determinato mezzo trasparente. Una volta calcolata l’iconale $L(\vec{r})$ si può determinare il campo vettoriale

$$\text{grad } L = n\hat{k},$$

che, per definizione, in ogni punto è perpendicolare alla superficie di livello[†] di L passante per quel punto. Le linee di flusso di questo campo costituiscono una famiglia di curve che vengono chiamate ‘raggi luminosi’. Esempi semplici ma importanti sono, in un mezzo omogeneo, l’iconale di un’onda piana

$$L = n\hat{k} \cdot \vec{r},$$

L’equazione 10.91 è formalmente identica all’equazione di Hamilton-Jacobi che caratterizza le traiettorie di una particella soggetta a un campo conservativo.

Vedi per esempio, H. Goldstein CLASSICAL MECHANICS, Addison-Wesley (1959)

[†]In ottica geometrica si suole continuare a usare il termine fronti d’onda anche se il carattere ondulatorio dei fenomeni rimane dietro le quinte.

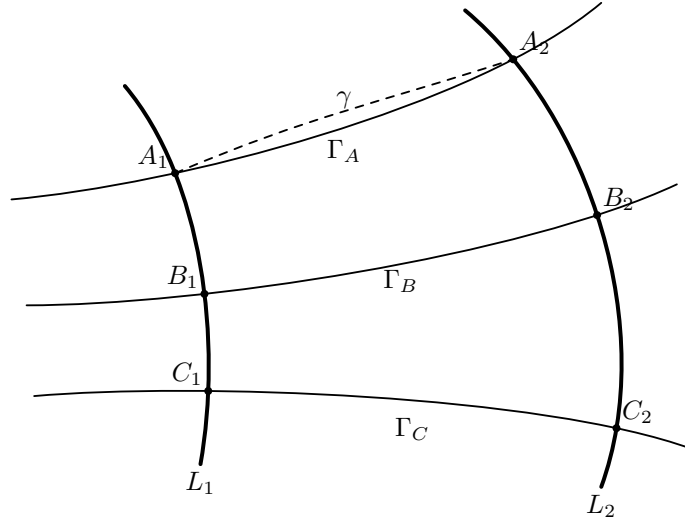


Figura 10.25: Fronti d'onda e raggi in un mezzo non omogeneo.

i cui raggi sono le rette parallele a \hat{k} , e l'iconale di un'onda sferica

$$L = nr,$$

i cui raggi sono le rette passanti per l'origine. La situazione generale è illustrata in figura 10.25; due fronti d'onda corrispondenti a valori L_1 e L_2 dell'iconale sono disegnati con un tratto spesso, mentre tre raggi, che intersecano perpendicolarmente i fronti, sono disegnati con tratto sottile. I raggi possono essere interpretati come le traiettorie di uno sciame di particelle aventi in ogni punto velocità tangente al raggio e modulo $u = c/n$. Per quanto riguarda il verso si può scegliere indifferentemente uno dei due versi di percorrenza dei raggi (ovviamente in maniera congruente per tutti i raggi). Ricordiamo infatti, che stiamo considerando processi stazionari e perciò non è determinato il verso della normale ai fronti. In proposito si osservi che l'equazione dell'iconale contiene il quadrato del gradiente di L e quindi il segno dell'iconale non è determinato. Facendo riferimento alla figura 10.25, si può avere sia evoluzione dal fronte L_1 a L_2 , che viceversa. In ottica geometrica questa proprietà viene chiamata '*Principio di invertibilità del cammino luminoso*'.

Per fissare le idee, assumiamo che il moto avvenga nello stesso verso in cui cresce l'iconale, diciamo da sinistra a destra in figura. Il tempo che una particella impiega per andare da A_1 a A_2 percorrendo il raggio Γ_A con la velocità u è espresso da

$$T(\Gamma_A) = (\Gamma_A) \int_{A_1}^{A_2} \frac{d\ell}{u} = \frac{1}{c} (\Gamma_A) \int_{A_1}^{A_2} n d\ell.$$

Dall'equazione dell'iconale risulta

$$n d\ell = |\text{grad } L| d\ell = \text{grad } L \cdot \vec{d\ell},$$

dove l'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che, per i raggi, $d\vec{\ell}$ e $\text{grad } L$ sono paralleli. Allora si ha

$$T(\Gamma_A) = \frac{1}{c}(\Gamma_A) \int_{A_1}^{A_2} \text{grad } L \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{c} (L_2 - L_1).$$

Da qui risulta evidente che il tempo di percorrenza tra i due fronti è lo stesso per tutti i raggi

$$T(\Gamma_A) = T(\Gamma_B) = T(\Gamma_C).$$

In letteratura, invece del tempo di percorrenza, si fa spesso uso del 'cammino ottico', definito come

$$cT = (\Gamma) \int_1^2 n d\ell = L_2 - L_1,$$

dove l'integrazione si intende estesa a uno qualsiasi dei raggi tra i punti di intersezione (indicati simbolicamente con 1 e 2 nell'integrale) con le superfici iconali L_1 e L_2 . Tenendo presente la definizione (10.89) si vede subito che il cammino ottico è proporzionale alla differenza di fase tra i fronti. L'importanza della nozione di cammino ottico sta nel fatto che, anche ignorando l'interpretazione ondulatoria dei fenomeni luminosi e la nozione di fase, abbiamo una grandezza che, per così dire, ne fa le veci.

Consideriamo ora il tempo di percorrenza lungo curve leggermente diverse dai raggi, come la curva γ tratteggiata in figura 10.25, congiungenti gli stessi estremi

$$T(\gamma) = \frac{1}{c}(\gamma) \int_{A_1}^{A_2} n d\ell = \frac{1}{c}(\gamma) \int_{A_1}^{A_2} |\text{grad } L| d\ell.$$

Dal momento che la tangente a γ non è in generale parallela al vettore $\text{grad } L$, vale la disuguaglianza

$$|\text{grad } L| d\ell \geq \text{grad } L \cdot d\vec{\ell},$$

e perciò, tenendo conto che $\text{grad } L$ è un campo conservativo,

$$T(\gamma) \geq \frac{1}{c}(\gamma) \int_{A_1}^{A_2} \text{grad } L \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{c} (L_2 - L_1).$$

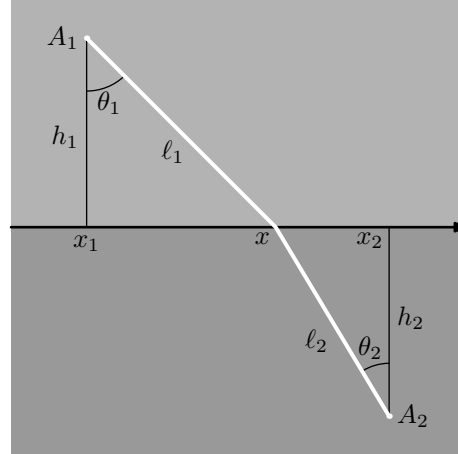
Il tempo di percorrenza lungo i raggi è quindi il minimo possibile rispetto ai cammini vicini. Questa importante proprietà è nota come '*Principio di Fermat*' perché venne enunciata per primo dal grande matematico Pierre de Fermat, noto per il famosissimo "Ultimo Teorema".

Ricordando la discussione svolta alla fine del § 3.2.4, osserviamo che il tempo di percorrenza è un ulteriore esempio di funzionale. In questo caso la 'variabile indipendente' è la curva γ che congiunge i punti A_1 e A_2 . Il raggio luminoso può essere determinato, senza dover risolvere l'equazione dell'iconale, come la curva Γ che rende minimo il funzionale

$$T(\gamma) = (\gamma) \int_{A_1}^{A_2} n d\ell.$$

Come esempio di applicazione del Principio di Fermat ricaviamo la legge di rifrazione alla superficie di separazione tra due mezzi di indici di rifrazione differenti. Osserviamo preliminarmente che, in un mezzo omogeneo, la velocità è uniforme e perciò la condizione di tempo minimo equivale a quella di lunghezza minima del percorso. Quindi in ciascuno dei due mezzi i raggi sono rettilinei. Inoltre, è evidente che il cammino di tempo minimo va cercato nel piano di incidenza.

La famiglia dei percorsi da un punto A_1 nel mezzo di indice di rifrazione n_1 , a un punto A_2 nel mezzo n_2 , è perciò parametrizzata mediante l'ascissa x del punto di intersezione del raggio con la superficie di separazione tra i due mezzi, come illustrato nella figura accanto. Mediante considerazioni geometriche elementari, si ricava immediatamente l'espressione del cammino ottico in funzione di x



$$cT(x) = n_1 \ell_1 + n_2 \ell_2 = n_1 \sqrt{h_1^2 + (x - x_1)^2} + n_2 \sqrt{h_2^2 + (x_2 - x)^2}.$$

La condizione di minimo impone l'annullamento della derivata rispetto a x

$$\frac{d(cT)}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad n_1 \frac{x - x_1}{\ell_1} - n_2 \frac{x_2 - x}{\ell_2} = 0,$$

da cui, osservando la figura, si ricava subito

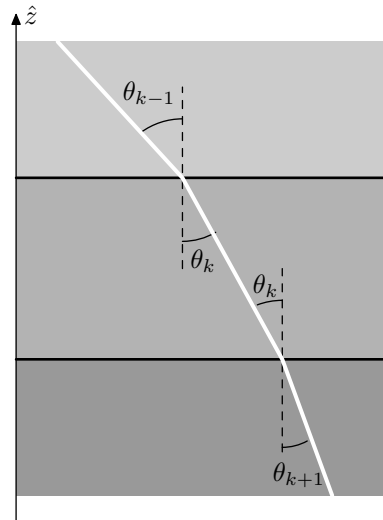
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2.$$

Questo risultato è suscettibile di una interessante generalizzazione; supponiamo di avere un mezzo costituito da più strati di indice di rifrazione differente separati da superfici piane tra loro parallele. Indicando con θ_k l'angolo che, nel k -esimo strato, il raggio forma con la normale comune a tutti i piani, la condizione di minimo tempo di percorrenza sarà ovviamente

$$n_k \sin \theta_k = C,$$

dove C è una costante indipendente dall'indice k .

Ciascun piano di separazione tra due strati è individuato dall'ascissa del punto di intersezione con l'asse \hat{z} mostrato in figura. Ora consideriamo il



caso limite di un mezzo ‘stratificato’ in cui l’indice di rifrazione varia in maniera continua⁵, ma dipende solo dalla coordinata z . Indicando con $\theta(z)$ l’angolo che la tangente al raggio nel punto di ‘quota’ z forma con l’asse \hat{z} , dalla formula precedente si deduce subito

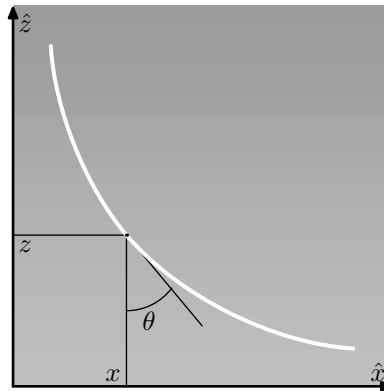
$$\sin \theta(z) = \frac{C}{n(z)}.$$

Questa relazione consente di ricondurre la determinazione della traiettoria di un raggio luminoso a una semplice quadratura. Infatti, indicando con \hat{x} l’asse orizzontale (vedi figura accanto), si ha

$$\frac{dx}{dz} = -\tan \theta = \frac{-C}{\sqrt{n^2 - C^2}},$$

e quindi

$$x = x_0 - C \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\sqrt{n^2(\zeta) - C^2}}.$$



Osserviamo che nella figura sopra, contrariamente a quelle della pagina precedente, si è assunta $n(z)$ funzione crescente di z , come indicato dalla ombreggiatura più scura nella parte alta del disegno. Per questo motivo la traiettoria volge la concavità verso l’alto; infatti la derivata seconda di $x(z)$

$$\frac{d^2x}{dz^2} = Cn(n^2 - C^2)^{-3/2} \frac{dn}{dz},$$

ha lo stesso segno della derivata prima di $n(z)$. Si può dimostrare che questa caratteristica è generale: la traiettoria dei raggi luminosi volge sempre la concavità dalla parte dove punta il gradiente dell’indice di rifrazione. La prova viene omessa perché non è particolarmente interessante nel presente contesto.

Una situazione di mezzo stratificato si produce talvolta nell’atmosfera in condizioni meteorologiche di alta pressione e forte irradiazione solare, come spesso avviene in estate. L’alta pressione comporta assenza di venti e scarso rimescolamento degli strati d’aria a quote differenti; la radiazione solare produce un aumento di temperatura del suolo che, per conduzione, riscalda gli strati d’aria più bassi. Di conseguenza la densità, e con essa l’indice di rifrazione acquista un gradiente verso l’alto che dà luogo a una curvatura dei raggi come quella mostrata nella figura sopra. Raggi che incidono con angolo θ_0 prossimo a π subiscono una vera e propria riflessione negli strati vicino al suolo; l’impressione per chi osserva è quella di trovarsi di fronte a uno specchio d’acqua. Questo

La costante C è determinata da una condizione iniziale che fissa l’angolo θ_0 alla quota z_0

$$C = n(z_0) \sin \theta_0.$$

⁵Questo procedimento fu utilizzato da Johann Bernoulli per risolvere il famoso problema della ‘brachistocrona’. Un’esposizione molto buona del problema e della soluzione di Bernoulli, con interessanti note storiche, si trova sulla pagina web: www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Brachistochrone.html#s1

fenomeno, noto come *miraggio*, si produce soprattutto nelle zone desertiche, ma è anche facilmente osservabile viaggiando in autostrada durante una giornata calda.

Nelle zone desertiche dopo una notte fredda, o sul mare, può anche verificarsi il fenomeno opposto con strati d'aria più freddi al livello del suolo. In questo caso si ha una curvatura verso il basso dei raggi luminosi, per cui oggetti distanti appaiono sollevati dal suolo. Questo fenomeno è noto come *fata Morgana*.

10.10.1 Specchi

L'uguaglianza tra angolo di incidenza e angolo di riflessione può essere ricavata dal principio di Fermat con un ragionamento analogo a quello svolto nel paragrafo precedente per la rifrazione; la cosa è così semplice che può essere lasciata come esercizio per il lettore. Più interessante è osservare che, in presenza di riflessioni, il principio di Fermat va leggermente modificato. Lo specchio \mathcal{S} nella figura è un ellissoide di rotazione

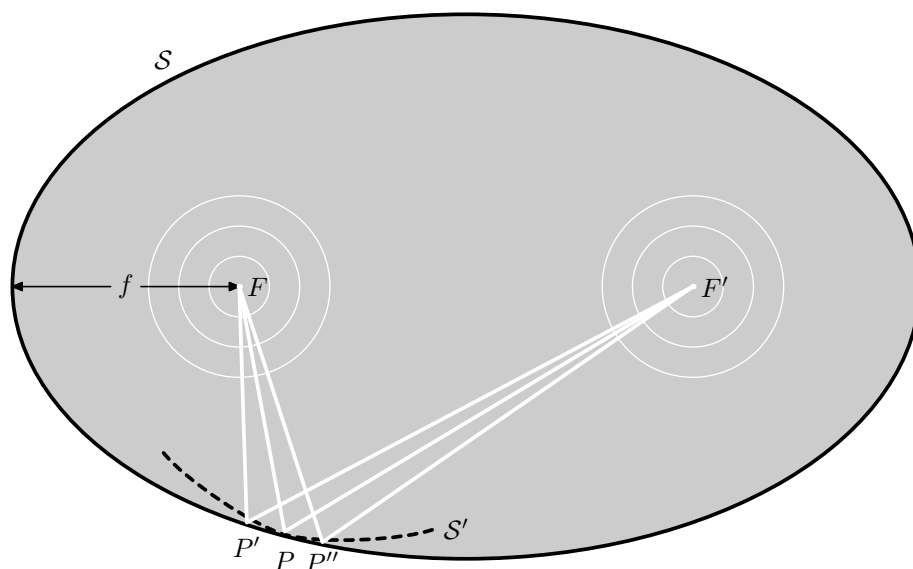


Figura 10.26: Riflessione su uno specchio ellittico

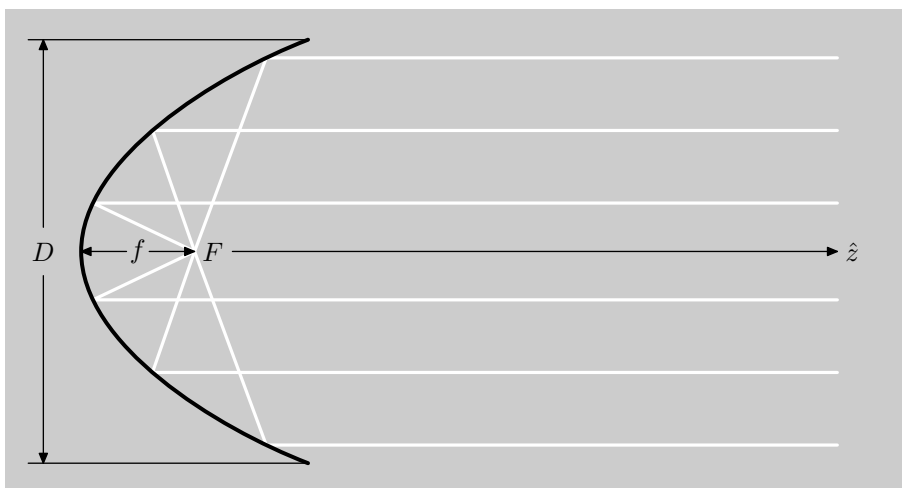
[†] Il lettore che vuole togliersi la curiosità può facilmente verificare che la normale all'ellisse in punto P è bisettrice dell'angolo $\widehat{FPF'}$.

di fuochi F, F' . Per definizione di ellisse, il tempo di percorrenza del cammino FPF' è esattamente uguale[†] a quello dei cammini adiacenti $FP'F'$, $FP''F'$ e perciò non è un minimo relativo. Inoltre, come risulta evidente dalla figura, per uno specchio \mathcal{S}' tangente a \mathcal{S} in P ma di curvatura maggiore, come quello rappresentato con tratteggio nella figura, il tempo di percorrenza lungo FPF' è *un massimo* rispetto ai cammini vicini. Il principio di Fermat si può riformulare in maniera da comprendere tutti i casi asserendo che l'effettivo percorso dei raggi luminosi è quello per cui il tempo di percorrenza è *stazionario*; con ciò si intende che, parametrizzando i cammini vicini con una variabile ordinaria (come

l'ascissa x nell'esempio della rifrazione), la derivata rispetto a questa variabile di $T(\gamma)$ si annulla.

La riflessione su uno specchio ellittico si presta a un'altra osservazione di grande importanza. Il fatto che i raggi riflessi convergano tutti nello stesso punto implica che i fronti d'onda sono sfere con il centro nel punto di convergenza. Nella figura 10.26 sono segnati in bianco alcuni di questi fronti intorno ai due fuochi. Assumendo che la sorgente di radiazione sia in F , l'energia emessa da questo punto attraversa tutti i fronti e, trascurando la perdita nella riflessione, arriva nel punto F' . Dal momento che l'intensità di un'onda sferica è inversamente proporzionale al quadrato del raggio, in F' abbiamo una singolarità. Ovviamente, nel processo reale l'intensità non diverge perché quando il raggio del fronte diventa confrontabile con la lunghezza d'onda l'approssimazione dell'iconale cessa di essere valida, e tuttavia diventa abbastanza alta da poter indurre reazioni chimiche in un'emulsione fotografica o stimolare i recettori della retina umana. Questo giustifica la definizione di '*immagine*' per il punto F' . Per l'invertibilità del cammino luminoso i ruoli dei fuochi si possono scambiare: se la sorgente è in F' l'immagine si forma in F . In generale, tutte le volte che si producono fronti sferici, il centro comune costituisce un'immagine. Ciò avviene, per esempio, anche nella riflessione su uno specchio piano: dopo la riflessione, i raggi hanno direzione che passa per il punto simmetrico della sorgente che viene detto immagine *virtuale* perché in esso si incontrano i prolungamenti dei raggi. Anche un'immagine virtuale può essere a sua volta sorgente e produrre immagini sia virtuali che reali.

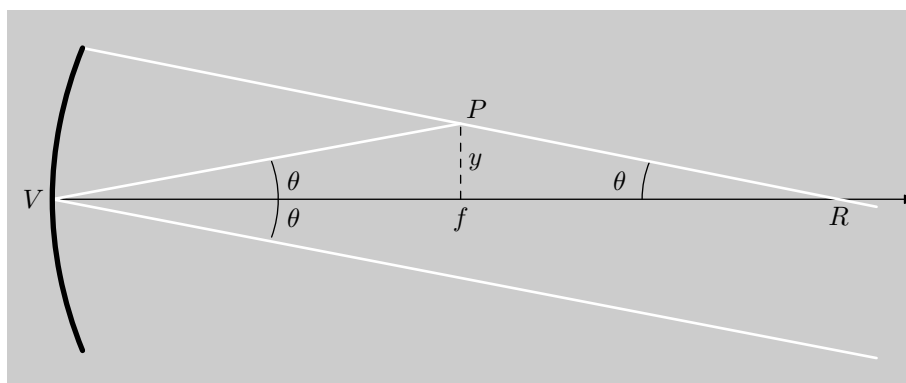
Nel caso limite di fronti d'onda piani (e quindi raggi paralleli), l'immagine si dice 'all'infinito'; questo è il caso dello specchio parabolico mostrato nella figura sotto.



Il fatto che i raggi provenienti dal fuoco F si riflettono tutti in direzione parallela all'asse \hat{z} della parabola, può essere facilmente dimostrato calcolando la pendenza della curva in ogni punto, ma la cosa è ovvia se si ricorda che, quando il fuoco F' va all'infinito e la distanza focale

[†]Lo scarto tra la sfera e il paraboloide è del terzo ordine nel rapporto $D/4f$. La dimostrazione è elementare e può essere svolta come esercizio.

f resta invariata, l'ellisse degenera in parabola. Osserviamo inoltre che se il diametro D dello specchio è inferiore alla distanza focale f , la superficie parabolica è ben approssimata[†] dalla superficie sferica di raggio $R = 2f$. In questa approssimazione, una sorgente in un punto P nel piano focale (perpendicolare all'asse e passante per il fuoco) e distante y da F , produce un'immagine all'infinito, ma in direzione che forma un angolo $\theta \approx y/f$. La prova è fornita nella figura sotto, dove sono tracciati il raggio che incide sul vertice V dello specchio, e quello che incide perpendicolarmente; i raggi riflessi formano entrambi un angolo θ con l'asse dello specchio.



Per l'invertibilità del cammino luminoso, due sorgenti a grande distanza, separate da una distanza angolare θ , producono nel piano focale due immagini separate da una distanza $y = f\theta$.

Occorre comunque segnalare un'importante limite dell'ottica geometrica: per uno specchio parabolico di diametro D , a causa della diffrazione il massimo centrale ha uno sparpagliamento angolare di ampiezza

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{D},$$

e perciò le immagini prodotte dallo specchio sono distinguibili soltanto se è soddisfatta la condizione

$$\theta > \Delta\theta.$$

L'angolo $\Delta\theta$ viene detto '*risoluzione angolare*' perché rappresenta la capacità dello specchio di 'risolvere' (nel senso di separare) due sorgenti viste sotto un angolo molto piccolo.

Specchi parabolici vengono impiegati nei grandi telescopi per le osservazioni astronomiche nel visibile e nell'infrarosso. La realizzazione di specchi di grande diametro è necessaria sia per avere una buona risoluzione angolare, sia per avere una grande sensibilità a sorgenti molto deboli: la potenza che viene convogliata nel punto immagine risulta ovviamente proporzionale a D^2 . Attualmente esistono telescopi con specchi da 12 m, e se ne progettano di dimensioni ancora maggiori. Lo stesso principio si applica per le osservazioni nella gamma delle radioonde e microonde.

Per ottenere un'adeguata risoluzione angolare a queste lunghezze d'onda si impiegano antenne con parabole di centinaia di metri di diametro, o reticoli di antenne su basi di chilometri.

10.10.2 Sistemi diottrici

I dispositivi costruiti mediante materiali trasparenti con indici di rifrazione differente, prendono genericamente il nome di '*sistemi diottrici*'. La trattazione generale di questi sistemi non ha implicazioni concettuali di grande portata, e perciò verrà limitata alle idee essenziali con alcuni esempi semplici e interessanti.

Molta algebra tediosa può essere evitata ricavando preliminarmente una semplice formula per il prisma '*sottile*', vale a dire un prisma le cui facce formano un angolo piccolo

$$\alpha \ll 1.$$

Consideriamo un raggio incidente con angolo anch'esso piccolo, $\theta_1 \ll 1$ (incidenza quasi normale) su una faccia del prisma, che emerge dall'altra faccia con angolo φ_1 . Calcoliamo l'angolo di *deviazione* δ , che il raggio emergente forma con il raggio incidente. Dalla semplice osservazione della figura si ricava immediatamente

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = (\theta_1 - \theta_2) + (\varphi_1 - \varphi_2) = (\theta_1 + \varphi_1) - (\theta_2 + \varphi_2),$$

e

$$\theta_2 + \varphi_2 = \alpha.$$

Allora, la legge della rifrazione per angoli piccoli fornisce

$$n_1 \theta_1 \approx n_2 \theta_2, \quad n_1 \varphi_1 \approx n_2 \varphi_2 \quad \implies \quad \theta_1 + \varphi_1 = \frac{n_2}{n_1} (\theta_2 + \varphi_2) = n \alpha,$$

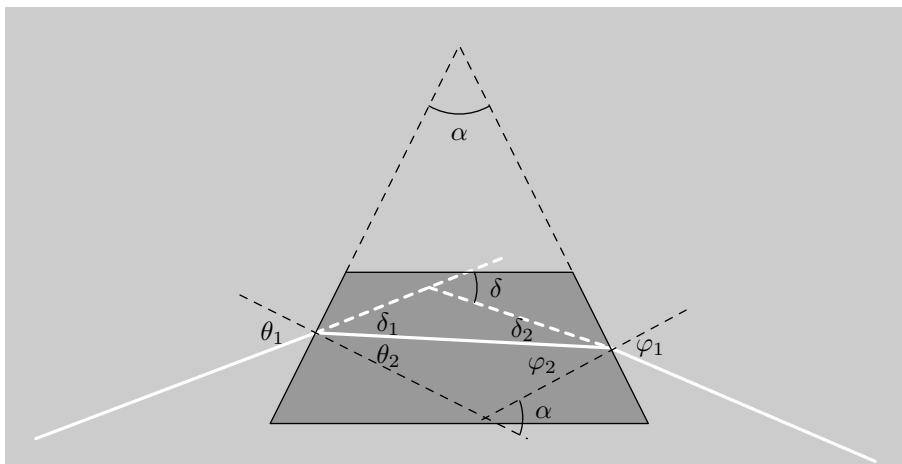
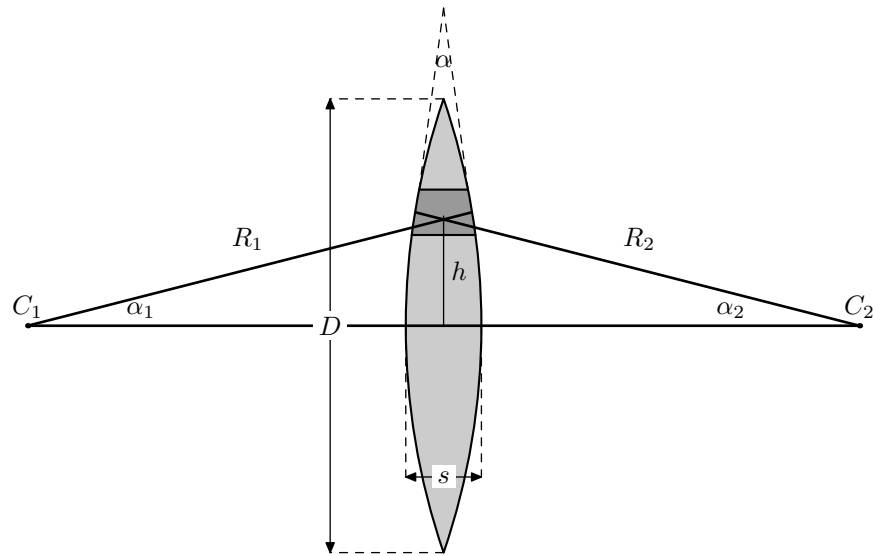


Figura 10.27: Angolo di deviazione di un prisma sottile

dove n indica il rapporto tra gli indici di rifrazione. In conclusione, l'angolo di deviazione di un prisma sottile per incidenza quasi normale risulta indipendente dalla direzione del raggio incidente

$$\delta = (n - 1)\alpha. \quad (10.92)$$

Per questo motivo il prisma sottile viene chiamato anche 'prisma a deviazione costante'. La semplice equazione (10.92) consente di ricavare le proprietà ottiche delle 'lenti sottili'. Le lenti sono delimitate da due superfici sferiche come nell'esempio illustrato nella figura sotto.



Le due sfere si intersecano lungo una circonferenza di diametro D ; la lente si dice sottile se il diametro è molto più piccolo[†] del minimo dei raggi R_1, R_2 . Un calcolo elementare mostra che lo spessore s al centro della lente è

$$\frac{s}{D} \approx \frac{1}{8} \left(\frac{D}{R_1} + \frac{D}{R_2} \right) \ll 1.$$

Perciò, nelle lenti sottili lo spazio percorso dai raggi all'interno della lente stessa può essere trascurato e si deve prendere in considerazione solo la deviazione prodotta dalle rifrazioni sulle calotte sferiche. Limitandosi a considerare raggi 'parassiali', che formano angoli piccoli con l'asse ottico C_1C_2 , l'angolo di deviazione è determinato dalla (10.92). L'angolo α dipende dalla distanza h dall'asse ottico, del punto in cui il raggio incide sulla lente; facendo riferimento alla figura sopra si ha immediatamente

$$\alpha(h) = \alpha_1 + \alpha_2 \approx \frac{h}{R_1} + \frac{h}{R_2}.$$

In conclusione, un raggio parassiale che incide a distanza h dall'asse ottico viene deviato di un angolo

$$\delta(h) = (n - 1)h \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{h}{f}, \quad (10.93)$$

[†] Condizione non rispettata in figura per ovvi motivi di spazio.

ma, per un motivo di
tà sono disegnati gra
anche la pena di rile
la condizione $\alpha \ll 1$
sce che, se θ_2 è picco
 φ_2 lo è in quanto

$\varphi_2 = \alpha - \theta_2$

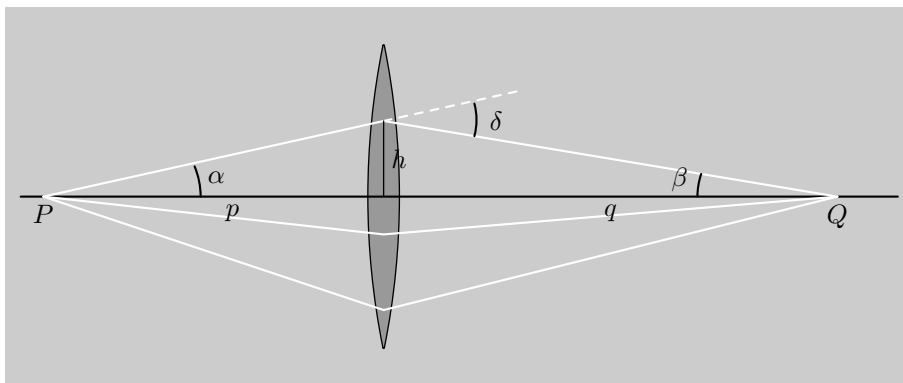
dove la lunghezza f definita da

$$\frac{1}{f} \equiv (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

FORMULA DEI FABBRICANTI
DI LENTI

prende il nome di ‘*distanza focale*’ della lente. Applicando la (10.93) possiamo dimostrare che una sorgente puntiforme produce un’immagine puntiforme. Consideriamo dapprima una sorgente posta in un punto P dell’asse ottico. Un raggio che forma un angolo α con l’asse ottico, nell’attraversare la lente subisce una deviazione δ ed emerge in una direzione che forma con l’asse un angolo β , andando a incidere in un punto Q . Dall’esame della figura si ricava immediatamente

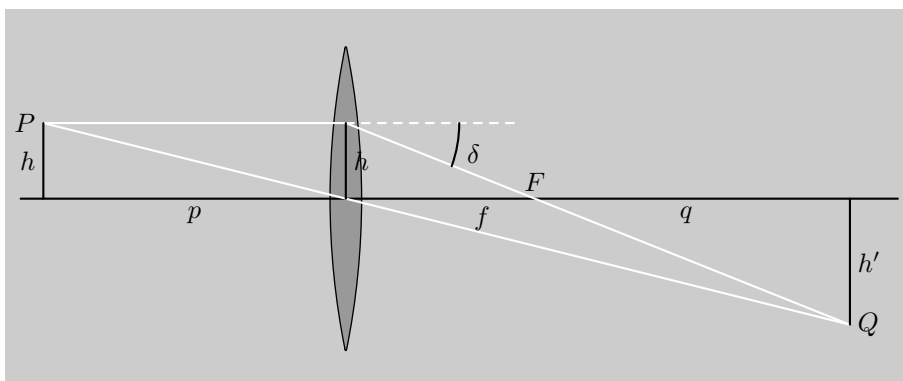
$$\alpha + \beta = \delta.$$



Indicando con p e q le distanze dalla lente dei punti P e Q , si ha $\alpha \approx h/p$, $\beta \approx h/q$; applicando allora la (10.93) si ottiene

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}, \quad (10.94)$$

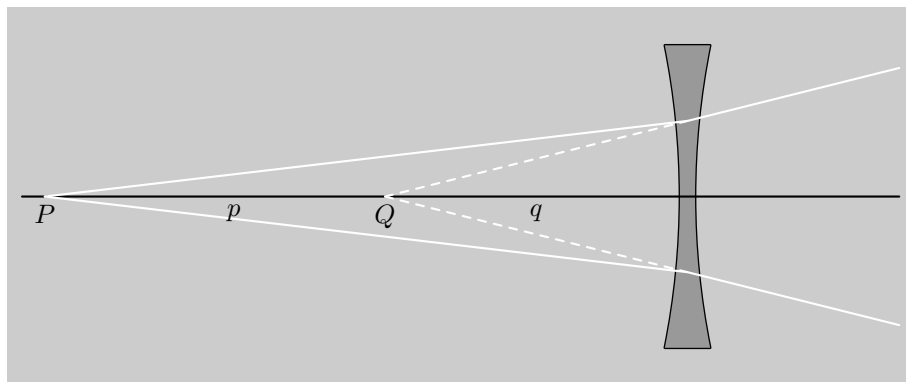
indipendente da α : tutti i raggi che partono da P incidono nello stesso punto Q , dove si forma l’immagine della sorgente P . I punti P e Q si dicono *coniugati*, perché una sorgente posta in Q produce un’immagine in P , come è evidente dalla simmetria della (10.94). Questa simmetria è una manifestazione del principio di invertibilità del cammino luminoso. La stessa relazione è valida anche per punti non appartenenti all’asse ottico, come si può vedere considerando i due raggi mostrati nella figura sotto.



[†]Ovviamente, un raggio parallelo all'asse ottico proveniente da destra, passa per il punto F' simmetrico di F ; niente cambia se una lente viene ribaltata scambiando la destra con la sinistra.

Il raggio che emerge da P parallelamente all'asse ottico subisce una deviazione $\delta = h/f$, e perciò passa per il punto F dell'asse ottico, a distanza f dalla lente, che viene chiamato '*fuoco*'[†]. Invece, il raggio che passa per il centro della lente non subisce alcuna deviazione. Un ragionamento geometrico elementare permette di dimostrare che il punto Q di intersezione tra questi raggi si trova a una distanza q dalla lente data dalla (10.94), e che qualsiasi altro raggio passa per questo stesso punto. In conclusione abbiamo una corrispondenza tra piani, per cui una sorgente estesa posta in un piano perpendicolare all'asse ottico produce un'immagine contenuta nel '*piano coniugato*'.

Le formule trovate per le lenti convergenti si generalizzano subito per le lenti divergenti, delimitate da calotte concave invece che convesse.



In questo caso, la deflessione prodotta dalla lente accresce, invece che ridurre, l'angolo tra i raggi e l'asse ottico. Di conseguenza l'immagine formata è virtuale, come risulta immediato dall'osservazione della figura. La (10.94) si applica anche alle lenti divergenti se si attribuisce un segno negativo alla distanza focale f ; il valore sempre negativo che si ottiene per q indica che l'immagine è virtuale e si forma sulla sinistra, invece che sulla destra, della lente. Si osservi che, anche per le lenti convergenti, quando $p < f$ l'immagine è virtuale e la (10.94) fornisce per q un valore negativo.

La relazione tra i piani coniugati di una lente ha alcune caratteristiche interessanti che vengono sfruttate negli strumenti ottici. Nel caso in cui $p \gg f$ la (10.94) fornisce $q \approx f$, indipendentemente dal preciso valore di p ; pertanto un oggetto a grande distanza produce un'immagine situata sempre nel *piano focale* passante per F . È per questo motivo che l'occhio umano riesce, contemporaneamente, a produrre sulla retina un'immagine *a fuoco* di persone in primo piano e di un panorama sullo sfondo. Infatti, il cristallino *accomodato all'infinito* ha una lunghezza focale di circa 3 cm (che è appunto la distanza dalla retina) e perciò tutti gli oggetti a distanza superiore a qualche metro vengono messi a fuoco; l'intervallo dei valori di p per cui una lente forma immagini a fuoco viene detto *profondità di campo*. Questa nozione si applica, per esempio, alle macchine fotografiche; un obiettivo grand'angolo ha tipicamente una focale paragonabile a quella dell'occhio e quindi un'analoga profondità di

campo. Invece, i teleobiettivi con focali lunghe hanno piccola profondità di campo e richiedono maggiore attenzione nella messa a fuoco.

Spesso, per caratterizzare la distanza focale di una lente si usa l'inverso $1/f$ che viene chiamato '*potere diottrico*'. L'unità di misura è la '*diottria*' espressa in m^{-1} e indicata con D. Per esempio, il cristallino umano, accomodato all'infinito, ha un potere diottrico $1/0.03 \approx 33 \text{ D}$. Questo parametro è comodo quando si considerano sistemi di lenti con gli assi ottici coincidenti e molto vicine tra loro (lenti *addossate*). Dal momento che il raggio emergente da una lente, incide sull'altra alla stessa distanza dall'asse ottico, la deviazione totale prodotta dal sistema di lenti è

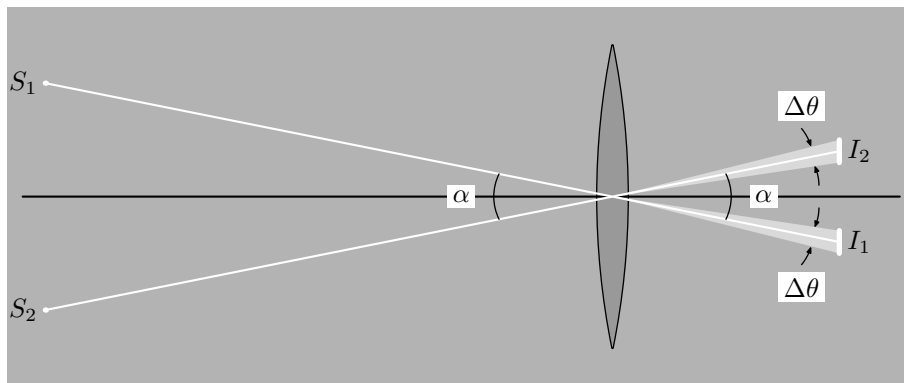
$$\delta(h) = \frac{h}{f_1} + \frac{h}{f_2} = h \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right),$$

dove f_1 e f_2 sono le focali delle due lenti. Da quì risulta ovvio che due lenti addossate equivalgono a una sola lente di potere diottrico pari alla somma dei poteri diottrici

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

Le lenti addossate vengono adoperate nella correzione dei difetti della vista mediante occhiali. Il difetto più comune è la miopia, che consiste in un eccesso di potere diottrico del cristallino (focale più corta della distanza cristallino-retina). La correzione si effettua mediante lenti divergenti, con potere diottrico negativo, che sottrae il numero di diottrie necessario a riportare il piano focale del sistema lente-cristallino sulla retina.

Come già osservato per gli specchi, l'immagine di una sorgente puntiforme non è realmente puntiforme a causa dello sparpagliamento dovuto alla diffrazione. Consideriamo due diverse sorgenti S_1 e S_2 che dal centro della lente vengono viste sotto un angolo α .



Le immagini I_1 e I_2 sono dischetti che sottendono dal centro della lente un angolo

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{D}$$

Le due immagini sono distinguibili solo se α è maggiore di $\Delta\theta$; in altre parole, nell'immagine di un oggetto formata da una lente si perdono tutti

Nella formula accanto, si noti che D è il diametro della lente che non va confuso con la diottria 'D'.

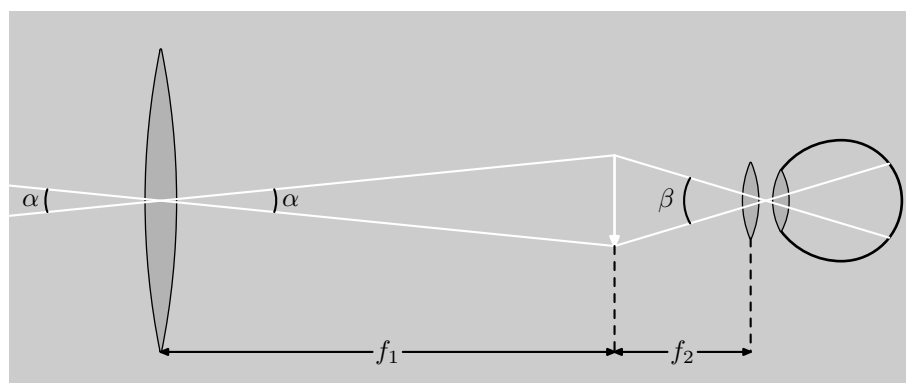
i dettagli che sottendono dal centro un angolo minore della risoluzione angolare $\Delta\theta$. È questo il motivo per cui a occhio nudo non si distinguono i batteri presenti in una goccia d'acqua. Suggestisco al lettore di eseguire il seguente semplice esperimento per determinare la risoluzione angolare dei propri occhi; disegnare su un foglio bianco, servendosi di un righello, due sottili linee parallele a distanza di un millimetro l'una dall'altra; appendere il foglio a un muro e osservare le due linee da distanze via via crescenti. Si troverà che, al di là di una distanza L , di linee non se ne vedono due, ma una sola. Esprimendo L in millimetri la risoluzione angolare sarà allora

$$\Delta\theta = \frac{1}{L}.$$

Si può anche verificare che, eseguendo l'esperimento all'aperto in un giorno di sole splendente, si ottiene un risultato peggiore (L più piccola) che in un ambiente buio in cui viene illuminato solo il foglio. Ciò dipende dal fatto che, in condizioni di forte illuminazione, la pupilla si contrae riducendo così il diametro D e facendo aumentare $\Delta\theta$.

Per osservare i dettagli minuti di un oggetto occorre necessariamente ridurre la distanza L , in modo che questi appaiano sotto un angolo maggiore della risoluzione angolare, ma per questo c'è un limite fisiologico. Osserviamo infatti che, dal momento che la distanza q tra cristallino e retina è invariabile, per poter vedere a fuoco oggetti vicini occorre che aumenti il potere diottrico del cristallino. A ciò provvedono dei muscoli che, contraendosi, schiacciano il cristallino riducendo i raggi di curvatura delle calotte sferiche (si ricordi la formula dei fabbricanti di lenti). In questo modo, una persona normale può arrivare a mettere a fuoco fino a una decina di centimetri. Per ridurre ulteriormente la distanza dall'oggetto si usa una lente di ingrandimento, che è semplicemente una lente convergente con piccola distanza focale. Accostando la lente all'occhio, si sommano i poteri diottrici della lente e del cristallino, e si riesce a mettere a fuoco a distanza di pochi centimetri.

Nel caso in cui l'oggetto non può essere avvicinato, si ricorre all'ingegnoso sistema di produrne, mediante una lente convergente, un'immagine reale in una posizione che può essere esaminata da vicino con una lente di ingrandimento. Questo metodo è usato nel cannocchiale di Keplero o *telescopio*, rappresentato schematicamente in figura.



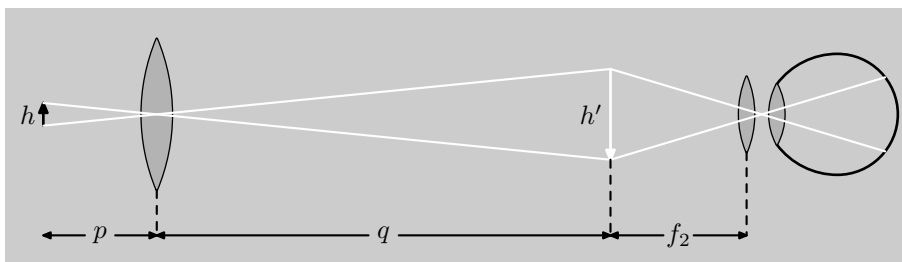
La lente di *obiettivo* sulla sinistra focalizza l'immagine di un oggetto lontano, visto sotto un angolo α , nel piano focale a distanza f_1 . L'immagine è rappresentata con una freccia bianca che punta in basso per evidenziare l'inversione prodotta dalla lente. La lente *oculare* sulla destra ha una distanza focale f_2 , e viene posizionata proprio a questa distanza dall'immagine, in modo che il cristallino accomodato all'infinito produca un'immagine a fuoco sulla retina. Dall'esame della figura risulta immediato che l'angolo sotto cui l'occhio vede l'immagine è dato da

$$\beta = \frac{f_1}{f_2} \alpha.$$

Con $f_1 \gg f_2$ si aumenta notevolmente la risoluzione angolare e quindi la possibilità di discernere dettagli dell'oggetto lontano. Per questo motivo i telescopi devono essere lunghi, in modo da permettere una distanza focale dell'obiettivo grande. Inoltre il diametro dell'obiettivo deve essere grande, per dare un'immagine luminosa e ben definita nei dettagli. L'oculare, invece, deve avere diametro approssimativamente pari a quello della pupilla.

L'immagine fornita dal telescopio è capovolta, ma nelle osservazioni astronomiche questo non è un problema; per le osservazioni terrestri, il capovolgimento viene evitato adoperando il cannocchiale di Galileo, il cui oculare è una lente divergente posta *prima* del piano focale dell'obiettivo. Il lettore può compiere un utile esercizio verificando che, a parità di distanza focale f_2 (in valore assoluto) l'oculare divergente fornisce lo stesso ingrandimento angolare.

Infine, un breve cenno al principio di funzionamento del *microscopio*; anche qui abbiamo un obiettivo, ma questa volta di focale molto piccola, dell'ordine dei millimetri (le proporzioni non sono rispettate in figura).



L'oggetto, indicato dalla freccetta nera a sinistra, viene posto appena la di là del piano focale dell'obiettivo

$$p \approx f_1,$$

e quindi l'immagine reale (freccia bianca) si forma a una distanza $q \gg f_1$. La distanza tra oculare e obiettivo è fissata, e l'osservatore regola la distanza p in maniera che l'immagine si formi nella posizione più comoda per una visione con occhio adattato a 'distanza di lettura' (~ 25 cm) attraverso l'oculare, che funziona anche in questo caso da lente di ingrandimento. Dal momento che la lunghezza L del microscopio (tipicamente

di una ventina di centimetri), è molto maggiore della focale dell'obiettivo, si ha un notevole ingrandimento trasversale

$$\frac{h'}{h} = \frac{q}{p} \approx \frac{L}{f_1} \gg 1.$$

L'ingrandimento convenzionale di un microscopio viene definito come il prodotto tra l'ingrandimento trasversale dell'immagine e l'ingrandimento angolare consentito dall'oculare rispetto alla visione diretta; esprimendo f_2 in centimetri si pone

$$G = \frac{25}{f_2} \frac{L}{f_1}.$$

Un buon microscopio supera il valore mille di questo parametro. Dal punto di vista dell'ottica geometrica si potrebbe fare molto di più, ma qui si incontra un limite fisico. Un'osservazione umana diretta non può rivelare dettagli di dimensione inferiore alla lunghezza d'onda della luce visibile. L'impiego di radiazione a piccola lunghezza d'onda, invisibile all'occhio umano ma in grado di impressionare pellicole fotografiche, è precluso dal fatto che ad alta frequenza l'indice di rifrazione è praticamente uno per tutti i materiali. Si ricorre allora alle onde di de Broglie degli elettroni, citate a pagina 358, che hanno lunghezza abbastanza piccole da consentire l'osservazione di singoli atomi. Dal momento che gli elettroni hanno carica elettrica, l'ufficio delle lenti è svolto efficacemente da campi magnetici.

Indice analitico

- Accumulatori, 186
- Alternatore, 274
- Ampère
 - legge di circuitazione, 208
 - forma locale, 219
 - unità di misura, 202
- Ampère, André Marie, 208
- Amperora, 186
- Angoli solidi, 20–25
- Angolo limite, 327
- Ångstrom, 310
- Antenna dipolare, 307
- Aurore polari, 259
- Autoinduzione, *vedi* Coefficiente
- Avogadro, numero di, 6

- Bernoulli, Johann, 369
- Birkeland, Kristian, 259
- Boltzmann
 - Distribuzione di probabilità, 98
- Boltzmann, Ludwig, 98
- Brachistocrona, 369
- Brewster, angolo di, 327
- Brillouin, funzione di, 248

- Calusius-Mossotti, Formula, 102
- Cammino ottico, 367
- Campo
 - centrale, 41
 - conservativo, 40
 - irrotazionale, 40
 - magnetizzante \vec{H} , 241
 - radiale, 41
- Campo Elettrico
 - definizione operativa, 9
 - di distribuzioni a simmetria sferica, 27–30
 - di un disco, 17
 - di un filo rettilineo indefinito, 19
 - di un segmento, 19
 - di un sistema di cariche puntiformi, 8
 - di una carica che accelera, 135
 - di una carica in moto uniforme, 134
 - di una distribuzione di volume, 15
 - di uno strato piano, 18
 - unità di misura, 9, 52
- Campo macroscopico, 65
- Campo Magnetico
 - come tensore, 195
 - definizione operativa, 193
 - di Biot-Savart, 203
 - di un magnete, 234
 - di un solenoide, 227
 - di una carica in moto uniforme, 269
 - di una distribuzione di corrente a simmetria cilindrica, 210
 - di una spira circolare, 224
 - di uno strato piano, 213
 - dimensioni e unità, 189
 - legge di flusso, 207
- Cannocchiale di Keplero, 378
- Capacità
 - Condensatore, 77
 - di un conduttore singolo, 70
 - unità di misura, 70
- Carica
 - conservazione, 6, 162–164
 - di una batteria, 186
 - elementare, 5
 - immagine, 73
 - Invarianza, 125
 - quantizzazione, 5
 - unità di misura, 2
- Cariche

- di polarizzazione, 102–104
 - libere, 105
- Cavendish, Henry, 4
- Cavo coassiale, 211
- Centro guida, 255
- Ciclotrone
 - di Lawrence, 256
 - frequenza, 254
- Circuitazione, 40
- Circuito
 - esploratore, 200
 - oscillante, 292
 - RC, 296
 - RLC, 294
- Coefficiente
 - di assorbimento, 332
 - di autoinduzione, 291
 - di un solenoide, 291
 - di mutua induzione, 289
 - tra due solenoidi, 290
- Coerenza
 - tempo di, 339
 - tra sorgenti, 342
- Componente normale
 - del campo elettrico, 36
 - del campo magnetico, 211
- Componente tangenziale
 - definizione, 42
 - del campo elettrico, 43
 - del campo magnetico, 211
- Composizione delle velocità
 - Legge di Galilei, 116
 - Legge relativistica, 143
- Concatenato(a), *vedi* Flusso, Corrente
- Condensatore
 - Capacità, 77
 - Carica, 77
 - definizione, 77
 - Energia, 82
 - Tensione, 77
- Conducibilità, 168
- Cono luce, 139
- Conservazione
 - dell'energia-impulso, 150
 - della carica, 6
- Contrazione delle lunghezze, 129
- Copernicus, Nicolaus, 111
- Corrente
 - concatenata a una curva chiusa, 208
 - di spostamento, 281
 - di trascinamento, 160
 - magnetica, 280
- Correnti
 - di magnetizzazione, 240
 - libere, 241
 - nei metalli, 161
 - stazionarie, 164–167
- Costante dielettrica, 106
 - complessa, 331
- Coulomb
 - Legge di, 1
 - limiti di validità, 4
 - verifica sperimentale, 4
 - Teorema di, 68
 - unità di misura, 2, 3
- Coulomb, Charles Augustin, 1
- Curie
 - costante, 248
 - temperatura, 251
- Densità
 - di carica di linea, 17
 - di carica di superficie, 17
 - di carica di volume, 14
 - di corrente
 - definizione, 155–159
 - di superficie, 158
 - di energia
 - del campo elettrico, 62
 - del campo magnetico, 294
 - di forza su una corrente di volume, 199
 - di magnetizzazione \vec{M} , 239
 - di magnetizzazione residua, 251
 - di particelle, 14
 - di polarizzazione \vec{P} , 101
 - spettrale, 336
- Descrizione
 - euleriana, 155
 - lagrangiana, 155
- Diaframma, 353
- Diagramma polare, 307

- Diffrazione
 - degli elettroni, 358
 - reticoli, 353
 - singola fenditura, 349
- Diffusione della luce, 358
- Diffusione di Rayleigh, 362
- Dilatazione dei tempi, 131
- Diodo, 160
- Dipolo
 - approssimazione di, 88–94
 - azioni meccaniche su, 94–98
 - campo elettrico, 93
 - energia in campo esterno, 96
 - momento di
 - definizione, 90
 - indotto in una molecola, 91, 92
 - proprio di una molecola, 92
 - radiazione di, 306
 - ampiezza del campo, 307
- Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 54
- Dirichlet, problema di, 57
- Dispersione
 - della luce, 329
 - relazione di, 310
- Divergenza
 - definizione, 32
 - in coordinate cartesiane, 32
 - in coordinate cilindriche, 34
 - in coordinate sferiche, 34
 - Teorema della, 35
- Drude, *vedi* Modello
- Effetto
 - di specchio, 258
 - Doppler, 131
 - Hall, 263
 - Joule, 174
- Eikonal, *vedi* Iconale
- Einstein, Albert, 118
- Einstein, Equazione di, 150
- Elettrone
 - carica, 5
 - momento magnetico, 238
- Energia
 - a riposo, 148
 - relativistica, 148
- Energia potenziale
 - di un sistema di cariche, 58–61
 - di una carica in un campo esterno, 58
- Equazione
 - costitutiva
 - dei conduttori, 67
 - dei dielettrici, 101
 - della dinamica, 151
 - di continuità, 164
- Esperimento
 - di Cavendish, 76
 - di Michelson–Morley, 118
- Euleriana, *vedi* Descrizione
- Farad, 70
- Faraday
 - costante di, 186
 - legge di induzione, 279
- Fase
 - ritardo di, 307
- Fata Morgana, 370
- Fattore g , 238
- Fizeau, Armand, 143
- Flusso
 - concatenato a una curva chiusa, 271
 - definizione, 25
 - primario vs secondario, 275
- Forza
 - del campo elettrico su una carica in moto, 153
 - di Lorentz, 253, 265
 - di Minkowski, 151
 - su un circuito filiforme, 200
 - su una carica di superficie, 61
- Forza elettromotrice
 - definizione, 184
 - indotta, 277
 - indotta in un circuito in moto, 273
- Frangere di interferenza
 - di due sorgenti, 343
- Franklin, Benjamin, 1
- franklin, unità di misura, 2
- Frequenza
 - portante, 333

- frequenza, 309
 Frequenze di risonanza, 332
 Fresnel
 costruzione di, 349
 formule di, 325
 Fresnel, Augustin Jean, 347
 Funzionale dell'energia, 85
 Funzione
 di partizione, 248
 Funzione potenziale
 additività, 49
 definizione, 45
 del campo coulombiano, 48
 scelta dello zero, 46
 unità di misura, 49
 Funzioni armoniche, 53, 56
 Galilei
 Composizione delle velocità, 116
 nave di, 112
 trasformazione, 116
 Galilei, Galileo, 112
 Gauge, *vedi* Trasformazione
 Gauss
 Legge di, 26, 124
 forma locale per cariche di superficie, 36
 forma locale per cariche di volume, 32
 Teorema di, *vedi* Divergenza,
 Teorema della
 unità di misura di \vec{B} , 202
 Gauss, Carl Friedrich, 25
 Gilbert, William, 187
 Gradiente, 50–52
 Hall, coefficiente di, 264
 Heideringer, fascio di, 364
 Hertz, Heinrich Rudolf, 286
 Huygens, Christian, 346
 Iconale, 365
 Impulso relativistico, 148
 Indice di rifrazione, 321
 Induttanza, *vedi* Coefficiente di autoinduzione
 Induttore, 291
 Induzione elettrostatica, 66
 Instabilità dell'equilibrio di un sistema di cariche, 59
 Intensità
 di corrente, 156
 unità e dimensioni, 156
 Interferenza
 frange di, 342
 termine di, 340
 Invarianza
 dei tempi, 115
 dell'accelerazione, 116, 145
 della forza, 117
 della massa, 116
 della quadrivelocità, 143
 delle distanze, 116
 Irreversibilità della magnetizzazione ferromagnetica, 251
 Isolanti
 caratterizzazione statica, 86
 Dielettrici, 88
 Isteresi magnetica, 251
 Lagrangiana, *vedi* Descrizione
 Landé, fattore g , 238
 Langevin
 Funzione, 100
 Langevin, Paul, 100
 Laplace
 equazione di, 53
 Prima formula, 223
 Seconda formula, 199
 Laplace, Pierre Simon, 53
 laplaciano, operatore, 52
 Larghezza di banda, 337
 Larmor
 precessione, 247
 velocità angolare, 246
 Lawrence, Ernest O., 256
 Lenti sottili, 374
 Lenz, legge di, 275
 Linea universo, 122
 Linee di flusso
 costruzione, 11
 definizione, 10
 dei campi solenoidali, 166
 del campo elettrico
 proprietà, 12, 26, 44

- Lord Rayleigh, *vedi* Strutt
 Lorentz, Hendrik Antoon, 127
 Lunghezza d'onda, *vedi* Onda, lunghezza di
 Magnete
 azioni meccaniche su, 234–236
 definizione, 233
 Magnetizzazione residua, *vedi* Densità
 Magnetone di Bohr, 238
 Maxwell
 corrente di spostamento, 281
 equazioni del campo elettromagnetico, 282
 quarta equazione, 281
 Maxwell, James Clerk, 281
 Mezzi trasparenti, 321
 Michelson, Albert Abraham, 118
 Microscopio, 379
 Millikan, Robert, 6
 Minkowski
 diagramma, 122
 forza, 151
 Spazio-Tempo, 137–141
 Minkowski, Hermann, 137
 Miraggio, 370
 Modello di Drude, 170
 Molecola
 deformazione, 87
 modello sferico, 86
 Momento magnetico
 di un atomo, 237
 di un circuito filiforme, 231, 233
 di una corrente di volume, 233
 nucleare, 238
 Monopolo magnetico, 207
 Moto
 di una carica in campo elettrico, 152–153
 uniformemente accelerato, 145–146
 Mutua induzione, *vedi* Coefficiente
 Neutrone
 decadimento, 6
 momento magnetico, 238
 Newton
 Esperimento del secchio, 114
 Spazio Assoluto, 114
 Tempo Assoluto, 115
 Newton, Isaac, 114
 Numero d'onda, 312
 complesso, 331
 Ørsted, Hans Christian, 187
 Ohm
 legge, 167
 generalizzata, 183
 limiti di validità, 172–173
 prima legge per i resistori, 177
 seconda legge per i resistori, 177
 unità di misura, 168
 Ohm, Georg Simon, 168
 Onda
 lunghezza di, 309
 sferica, 304
 Onde
 elettromagnetiche, 283
 equazione delle, 284
 monocromatiche, 309
 piane, 283
 trasversali, 285
 Ottupolo, 92
 Pacchetto d'onde, 334
 Paradosso dei gemelli, 146
 Pendolo di Foucault, 114
 Permeabilità magnetica
 di un materiale, 244
 del vuoto, 202
 Permittività elettrica del vuoto, 2
 Pila
 di volta, 180
 resistenza interna, 182
 Weston, 180
 Poisson, equazione di, 52
 Poisson, Siméon Denis, 53
 Polarizzabilità
 assorbitiva, 330
 elastica, 330
 elettrica, 92
 magnetica, 247
 Polarizzazione
 lineare, 307
 per diffusione, 363

- Potenza
 dissipata in un conduttore, 173
 dissipata in un resistore, 179
- Potenziale
 costante del, 46
 della Terra, 72
 di un conduttore, 68
 vettore \vec{A} , 220
 vettore di una distribuzione di corrente, 222
- Potere
 diottrico, 377
- Potere risolutivo
 di un reticolo, 357
- Poynting
 teorema di, 298
 vettore di, 298
 nei mezzi trasparenti, 322
- Poynting, John Henry, 298
- Pressione magnetica, 228
- Principio
 di invertibilità del cammino luminoso, 366
 di Fermat, 367
 di Huygens, 346
 di inerzia, 113
 di invarianza di c , 119
 di Relatività
 di Einstein, 119
 di Galilei, 113
 di sovrapposizione, 7
- Problema dell'elettrostatica
 generale, 52–56
 per i dielettrici, 108
 per i resistori, 175
 per un conduttore, 69–74
- Processo
 quasi-stazionario, 287
 stazionario, 164
- Proprio(a)
 lunghezza, 129
 riferimento, 130
 tempo, 131
- Protone
 carica, 5
 momento magnetico, 238
- Quadrivettore
 accelerazione, 144
 quantità di moto, 147
 quantità di moto
 conservazione, 149
 velocità, 142
- Quadrivettori
 definizione, 138
 norma, 139
 nulli, 139
 space-like, 141
 time-like, 141
- Quadrupolo, 92
- Radiazione di dipolo, *vedi* Dipolo
- Raggio
 classico dell'elettrone, 150
- Rapporto giromagnetico, 237
- Relatività
 Ristretta vs Generale, 111
- Relazione di dispersione
 nei mezzi trasparenti, 322
 nel vuoto, 310
- Resistività, 167
- Resistori, 175
- Riferimenti inerziali, 113
- Riferimento
 Proprio, 130
 tangente, 142
- Riflessione
 legge della, 324
 totale, 327
- Rifrazione
 legge della, 324
- Rigidità dielettrica, 173
- Risoluzione angolare, 372
- Rotore
 definizione, 215
 espressione cartesiana, 216
 in coordinate cilindriche, 217
 in coordinate sferiche, 217
 teorema, 219
- Saturazione ferromagnetica, 250
- Scattering, *vedi* Diffusione
- Schermo elettrostatico, 75–76
- Secondo Principio della dinamica, 151

- Segnale gaussiano, 337
- Semiconduttori, 169
- Simmetria e Invarianza, 17
- Sincrotrone, 257
- Sistema gaussiano, 2
- Sistema internazionale, 2
- Sistemi diottrici, 373
- Solenoido, 226
- Sorgenti
 - coerenti, 341
 - incoerenti, 341
- Spazio-Tempo, *vedi* Minkowski
- Specchio
 - di Lloyd, 345
 - parabolico, 371
- Spin, 238
- statcoulomb, definizione, 2
- Stokes, Teorema di, *vedi* Rotore
- Strutt, John William (Lord Rayleigh), 362
- Superconduttori, 169
 - correnti indotte, 276
 - diamagnetismo, 245
- Suscettività
 - elettrica, 101
 - magnetica, 244
- Tempo
 - di correlazione, 339
 - di rilassamento, 169, 171
 - proprio, 131
- Tensore
 - degli sforzi, 197
 - del campo elettromagnetico, 266
 - momento di inerzia, 197
 - polarizzabilità, 197
- Teorema
 - delle forze vive, 152
- Terne levogire e destrogire, 194
- Terrella
 - di Birkeland, 259
 - di Gilbert, 187
- Tesla, Nikola, 202
- Tesla, unità di misura di \vec{B} , 202
- Thomson, modello di, 309
- Trasformazione
 - del campo elettromagnetico, 267
 - del campo elettrostatico, 133
 - di Galilei, 116
 - di gauge, 221
 - di Lorentz, 127
 - interpretazione geometrica, 128
- Trocoide, 262
- Van Allen, fasce di radiazione, 259
- Velocità
 - del segnale, 336
 - delle onde e.m.
 - nei mezzi trasparenti, 322
 - nel vuoto, 285
 - di deriva in campi incrociati, 261
 - di gruppo, 335
 - selettore, 262
- Verne, Jules, 205
- Vettore d'onda, 312
- Vettore induzione elettrica, 105
- Volta, Alessandro, 180
- Weiss, domini di, 250
- X, radiazione, 310, 358
- Young, esperimento di, 342
- Young, Thomas, 342
- Zona di Fraunhofer, 349